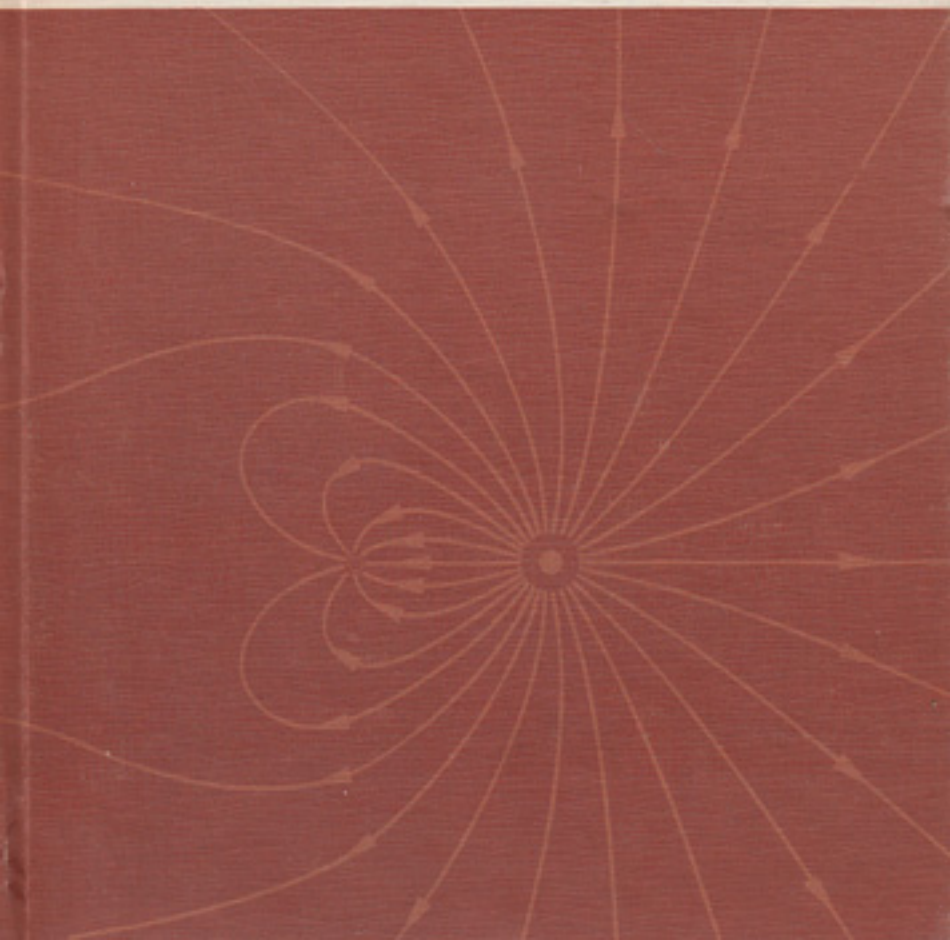


CURSUL DE FIZICĂ  
BERKELEY

VOLUMUL II

ELECTRICITATE  
ȘI MAGNETISM





# CURSUL DE FIZICĂ BERKELEY

VOLUMUL II

## ELECTRICITATE ȘI MAGNETISM

EDWARD M. PURCELL  
Profesor de fizică la Universitatea Harvard





## Cuprins

Prefața la versiunea în limba română .....	7
Prefață la cursul de fizică Berkeley .....	9
Prefață la volumul II .....	11
Îndrumări metodice .....	13
Capitolul 1 Electrostatică: sarcini și câmpuri .....	17
Capitolul 2 Potențial electric .....	53
Capitolul 3 Câmpul electric în jurul conductorilor .....	99
Capitolul 4 Curenți electrici .....	127
Capitolul 5 Câmpul purtătorilor de sarcină în mișcare .....	163
Capitolul 6 Câmpul magnetic .....	201
Capitolul 7 Inducția electromagnetică și ecuațiile lui Maxwell .....	241
Capitolul 8 Circuite de curent alternativ .....	289
Capitolul 9 Câmpuri electrice în substanță .....	313
Capitolul 10 Câmpuri magnetice în substanță .....	369
Alte probleme și întrebări .....	421



## Prefața la versiunea în limba română

Scrierea unui curs bun de fizică generală este astăzi o sarcină deosebit de grea. Autorii sînt confrunțați cu necesitatea de a face numeroase opțiuni în materie de conținut, metodică și formă, de atitudine, atît față de progresele fizicii cît și față de cei ce se inițiază în tainele ei. O întrunire adecvată a acestor opțiuni poate avea ca rezultat un material cu valoare de referință ce se va bucura de o largă circulație. Dimpotrivă, o alegere necorespunzătoare a mijloacelor poate să îngreueze, dacă nu să dăuneze, înțelegerii și însușirii disciplinei. La originea acestei situații se află, desigur, dezvoltarea foarte rapidă a cercetării științifice de fizică. Volumul de informații crește continuu, iar importanța relativă a multor fapte se schimbă. Aceasta creează greutate în selectarea corectă a elementelor și noțiunilor de bază, proces care nu poate fi realizat prin simple adăugiri și eliminări, ci necesită o muncă de analiză și sinteză, de evaluare și ordonare. În același timp, ritmul rapid de acumulare face ca ceea ce astăzi este surprinzător și de avangardă, mline să apară ca vechi și uneori depășit. Asimilarea într-un curs universitar a noutăților științifice trebuie făcută astfel încît modificările ulterioare să conserve, pe o perioadă cît mai îndelungată structura logică și valoarea de cunoaștere a faptelor expuse. Imaginea pe care cursul sau manualul de fizică ține să o creeze în conștiința studentului este aceea a unei științe a naturii solid constituite și, totodată, orientată mereu spre progres.

Întregul proces de instruire este de fapt, supus acestor exigențe, iar numeroasele căutări din întreaga lume privind organizarea și modernizarea predării fizicii reflectă tocmai conștiința că soluțiile actuale pot fi, în continuare, îmbunătățite.

Modul de organizare și orientare a procesului de învățămînt năzuiește spre formarea unor specialiști cu o gîndire sistematică și, totodată, independentă și creatoare. Se știe că învățămîntul strict expozitiv-deductiv, cu pretenția de a da enunțuri definitive unor constatări valabile în general numai pentru cazuri idealizate determină formarea unor specialiști limitați, incapabili să vadă dincolo de litera cărții. Claritatea și logica internă a unei cărți nu este contradictorie cu deschiderea sa către faptele reale, care nu pot fi tratate în general exact, putînd fi în schimb, modelate din ce în ce mai adecvat. De aceea, aprecierea valorii unui curs de fizică generală trebuie făcută nu numai din punctul de vedere al clarității faptelor prezentate ci, în egală măsură, prin deschiderea pe care o oferă înțelegerii fenomenelor complexe în interdependență.

Aplicarea cît mai eficientă a unor asemenea criterii de orientare și evaluare a materialului didactic constituie o preocupare permanentă a învățămîntului din țara noastră, angajat într-un proces de continuă perfecționare, în pas cu exigențele progresului și în acord cu condițiile deosebite create de statul nostru învățămîntului și cercetării științifice. O serie de cărți de fizică de bună calitate apărute în ultimii ani demonstrează concret rezultatele acestei preocupări. În acest sens, traducerea în limba română a cursului de fizică al Universității din Berkeley poate constitui o contribuție exemplară.

Cursul, apărut în cinci volume, conține lecțiile de fizică generală pentru studenții anilor I—II de la Universitatea Berkeley — S.U.A. Între autori am recunoscut cu



plăcere fizicieni ale căror înaltă competență și autoritate profesională de cercetători le-am putut aprecia din experiența contactelor și colaborării directe.

De data aceasta, specialiști ca Knight, Kittel, Pound, Purcell și alții, sînt în primul rînd, profesori. Scopul lor mărturisit este de a prezenta un ciclu de lecții care să permită atât formarea gîndirii fizice cît și însușirea noțiunilor de bază ale acestei științe. Cele cinci volume — mecanica, electricitatea, oscilații și unde, fizica cuantică, fizica statistică nu constituie unități închise, fiind legate unele de altele prin exemple interesante care se referă la fenomene ce urmează a fi prezentate sau prin referiri la legi și noțiuni discutate anterior. Dezvoltarea cursului se face din aproape în aproape, într-o succesiune firească. Nivelul matematic este accesibil, redus la strictul necesar, în centrul atenției autorilor aflîndu-se explicația sensului fizic al fenomenelor. Se realizează astfel o tratare clară, modernă și unitară a întregului ansamblu al ideilor de bază ale fizicii.

Fiecare volum posedă un material de metodică a predării capitolului respectiv, destinat profesorului cît și unele recomandări ale autorilor către student. Prefetele volumelor dau lămuriri complete asupra conținutului și metodicii. Se scoate astfel în evidență atenția cu care aceste lucrări au fost elaborate, reprezentînd și sub acest aspect un model de lucru care poate fi studiat cu folos și la noi în țară.

Cu toate că materia prezentată în fiecare volum se propune a fi predată într-o perioadă scurtă de timp (8—14 săptămîni), spațiul alocat este suficient pentru ca studentul să poată efectua un studiu individual. În acest scop sînt indicate lucrări bibliografice, sînt date exerciții și probleme și sînt expuse și propuse spre efectuare o serie de experimente pentru acasă. Se încearcă și se reușește, să se aducă „acasă” fizica studiată la facultate.

Pe baza experienței dobîndite în mai mulți ani de predare, cursul a suferit modificări care i-au îmbunătățit conținutul și au permis aducerea lui la o formă cît mai adecvată, didactic și științific.

Dacă se ține seama de faptul că în cadrul programului Berkeley a fost pus la punct și un set de lucrări de laborator, se poate aprecia că acest curs este bine echilibrat, cuprinzînd atât aspectele teoretice cît și cele experimentale esențiale în predarea fizicii generale.

Sînt sigur că lucrarea va fi mult folosită de toți cei care fac primii pași în însușirea meseriei de fizician reprezentînd, alături de alte traduceri și tratate scrise de specialiști români, o carte de referință. Consider că Editura didactică și pedagogică face, prin publicarea traducerii acestui curs, un serviciu real învățămîntului de fizică, precum și învățămîntului tehnic, în general, din țara noastră.

Acad. prof. Ioan Ursu.



## Prefața la cursul de fizică Berkeley

Acesta este un curs general de fizică de doi ani pentru studenții ce urmează științele și ingineria. Intenția autorilor a fost de a prezenta elementele de fizică pe cât posibil în modul în care sînt folosite de către fizicienii ce lucrează pe fronturi înaintate ale domeniului lor. Ne-am gândit să facem un manual care să scoată în evidență fundamentele fizicii. Obiectivele noastre particulare au fost de a introduce în mod coerent într-o programă elementară ideile relativității restrinse, fizicii cuantice și ale fizicii statistice.

Acest curs se adresează oricărui student ce a urmat un curs de fizică în liceu. În paralel cu acest curs ar trebui urmat un curs de matematică incluzînd calculul diferențial și integral.

În momentul de față<sup>1</sup>, în Statele Unite se află în lucru cîteva noi cursuri universitare de fizică. Ideea de a elabora cursuri noi aparține multor fizicieni afectați atît de nevoile dezvoltării științei și ingineriei cît și de accentul crescînd pus de studiul științelor în școala generală și în liceu. Propriul nostru curs a fost inițiat ca urmare a discuției ce a avut loc la sfîrșitul anului 1961 între Philip Morrison de la Universitatea Cornell și Charles Kittel. Am fost încurajați de către John Mays și colegii săi de la Fundația Națională de Știință și de către Walter C. Michels, pe atunci președintele Comisiei de fizică universitară. S-a format un comitet neoficial care să îndrume elaborarea cursului în etapele inițiale. Comitetul a fost alcătuit la început, din Luis Alvarez, William B. Fretter, Charles Kittel, Walter D. Knight, Philip Morrison, Edward M. Purcell, Malvin A. Ruderman și Jerrold R. Zacharias. Comitetul s-a întrunit pentru prima dată în mai 1962, la Berkeley; la acea dată a elaborat un plan provizoriu a noului curs de fizică. Din cauza obligațiilor unora dintre membrii inițiali, comitetul a fost parțial reconstituit în ianuarie 1964 și acum constă din subsemnații. Contribuțiile celorlalți au fost recunoscute în prefețele la volumele individuale.

Planul provizoriu și ideea care a stat la baza elaborării lui au avut o puternică influență asupra cursului final. Planul a acoperit în întregime temele și deprinderile care credem că ar trebui și ar putea fi însușite de către studenții începători în studiul științei și ingineriei. N-am avut niciodată intenția să elaborăm un curs adresat numai absolvenților sau studenților avansați. Ne-am gândit să prezentăm principiile fizicii din puncte de vedere noi și unificatoare. De aceea, părțile acestui curs pot părea aproape tot atît de noi atît pentru cel care instruieste cît și pentru cel instruit. Cele cinci volume ale cursului vor include:

- I Mecanica (Kittel, Knight, Ruderman)
- II Electricitate și Magnetism (Purcell)
- III Unde și Oscilații (Crawford)
- IV Fizica cuantică (Wichmann)
- V Fizica statistică (Reif)

---

<sup>1</sup> în ianuarie 1965 (N.T.).



Autorii fiecărui volum au fost liberi să-și aleagă stilul și metoda de prezentare potrivite subiectului elaborat.

Activitatea de început la acest curs l-a condus pe Alan M. Portis să conceapă un nou laborator de fizică generală denumit acum Laboratorul de fizică Berkeley. Deoarece cursul scoate în evidență principiile fizicii, unor profesori li s-ar putea părea că el nu se ocupă îndeajuns de fizica experimentală. Laboratorul este bogat în experiențe importante și este făcut să contrabalanseze cursul.

Suportul financiar în vederea apariției acestui curs a fost dat de Fundația Națională de Știință cu un aport indirect din partea Universității din California. Fondurile au fost administrate de către Compania pentru servicii de educație, o organizație constituită pentru a administra îmbunătățirea programelor generale. Sîntem în mod special îndatorații lui Gilbert Oakley, James Aldrich și William Jones, toți de la Compania pentru servicii de educație pentru sprijinul lor substanțial și binevoitor. Compania a deschis la Berkeley, sub competența direcției a doamnei Mary R. Maloney, un oficiu pentru a ajuta la dezvoltarea cursului și a laboratorului. Universitatea din California nu a avut o legătură oficială cu programul nostru dar ne-a ajutat în diferite moduri. Pentru acest ajutor dorim să mulțumim în special celor doi președinți consecutivi ai catedrei de fizică, August C. Helmholtz și Burton J. Moyer, cadrelor didactice și personalului departamentului, lui Donald Coney și multor alora din Universitate. Abraham Olshen ne-a ajutat mult la problemele inițiale de organizare.

Corecturile și sugestiile dumneavoastră vor fi întotdeauna bine primite.

Eugene D. Commins	Edward M. Purcell
Frank S. Crawford, Jr.	Frederick Reif
Walter D. Knight	Malvin A. Ruderman
Philip Morrison	Eyvind H. Wichmann
Alan M. Portis	Charles Kittel, președinte

*Berkeley, California*



## Prefață la volumul II

Acest volum al Cursului de fizică de la Berkeley conține electricitatea și magnetismul. Succesiunea temelor, în general, este cea obișnuită; electrostatică, curent continuu, câmp magnetic, inducție electromagnetică, polarizarea electrică și magnetică a substanței. Și totuși, modul lor de tratare diferă de cel tradițional. Diferența este și mai evidentă în capitolele 5 și 6 în care, pe baza materiei prezentate în volumul I, tratăm câmpul electric și magnetic al sarcinilor în mișcare ca manifestări ale relativității și invarianței sarcinii electrice. Această tratare atrage atenția asupra unor chestiuni importante ca: conservarea sarcinii, invarianța sarcinii, noțiunea de câmp. Singurul formalism necesar din teoria relativității speciale este transformarea Lorentz de coordonate și formula compunerii vitezelor. Este important, totuși, ca înainte de a începe studiul acestei părți, studentul să cunoască câteva idei și situații dezvoltate în volumul I, printre care capacitatea de a vedea lucrurile din diferite sisteme de referință, să aprecieze invarianța și să respecte condițiile de simetrie. În volumul II vom utiliza mult, de asemenea, principiul superpoziției.

Modul de tratare a fenomenelor electrice și magnetice din substanță este în principal „microscopic“, bazându-se pe natura atomică și moleculară a dipolilor, atât electrici cât și magnetici. Conducția electrică, este, de asemenea, descrisă microscopic pe baza modelului Drude-Lorentz. Evident, unele chestiuni rămân deschise pînă cînd studentul își însușește fizica cuantică din volumul IV. Dar noi vorbim liber despre molecule și atomi ca despre structuri electrice cu dimensiuni, formă și rigiditate, despre orbite electronice și spin. Încercăm să tratăm atent o chestiune care uneori este ocolită sau conținută în cursuri introductive, noțiunea de câmpuri macroscopice  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  în substanță.

În vol. II, bagajul de cunoștințe matematice al studentului este îmbogățit cu noțiuni de calcul vectorial — ca gradient, divergență, rotor și laplacean. Aceste noțiuni sînt corespunzător dezvoltate în capitolele de la început.

În versiunea inițială volumul II a fost predat la Universitatea din California. El a beneficiat de observațiile aduse de mai multe persoane avînd legătură cu cursul de la Berkeley și în special de contribuțiile lui E. D. Commins și F. S. Crawford Jr., care au predat primii cursul. Ei și studenții lor au descoperit numeroase porțiuni care trebuiau clarificate sau chiar corectate; multe din revizuirile s-au bazat pe sugestiile lor. Observațiile critice ale studenților la ultima versiune au fost strînse de Robert Garen, care a ajutat și la aranjarea problemelor. Observații critice prețioase am primit, de asemenea, de la J. D. Gavenda care a predat cursul în versiunea inițială la Universitatea din Texas și de la E. F. Taylor de la Universitatea Wesleyan. Într-un stadiu anterior Allan Kaufman a contribuit cu idei. A. Felzer a prelucrat cea mai mare parte a primei noastre schițe constituind primul „test studentesc“.

Acest mod de tratare a electricității și magnetismului a fost încurajat nu numai de comitetul nostru inițial format pentru scrierea cursului dar și de colegi de la Institutul de Tehnologie din Massachusetts (M.I.T.) care lucrau în paralel pentru un nou curs. Dintre ultimii J. R. Tessman de la Centrul de îndrumare a profesorilor M. I. T. și Universitatea din Tuft ne-a ajutat în mod special și ne-a influențat la formularea inițială.



El a predat cursul în versiunea inițială la MIT și de observațiile sale critice s-a ținut seama în multe din transformările și corecturile ce-au urmat.

Publicarea versiunii preliminare și a revizuirilor succesive a fost apoi văzută de doamna Mary R. Malonay. Cea mai mare parte a manuscrisului a fost dactilografiată de doamna Lila Lowell. Ilustrațiile în ultima formă au fost realizate de Felix Cooper.

Autorul acestui volum rămâne profund îndatorat prietenilor săi din Berkeley și mai ales lui Charles Kittel, pentru stimularea și încurajarea constantă care a făcut ca această sarcină grea să fie plăcută.

E. M. Purcell



## Îndrumări metodice

Materia conținută în volumul II poate fi suficient de bine parcursă într-un semestru de 14—15 săptămâni. Aceasta înseamnă că un student, care și-a însușit materialul cuprins în volumul I, este capabil să studieze cu atenție materialul de bază, să citească fără a se grăbi prea mult celelalte părți ale textului și să facă cunoștință cu cel puțin una sau două probleme speciale introduse în exerciții. Cu toate acestea, este necesară o selectare și planificare rațională a materialului. Volumul cursului depășește numărul temelor ce pot fi *studiate* cu atenție într-un semestru. O serie de paragrafe pot fi și trebuie omise la prima citire sau să fie recomandate doar ca lectură facultativă. În indicațiile de mai jos vom preciza paragrafele ce sînt mai mult sau mai puțin obligatorii. Spunem „mai mult sau mai puțin” întrucît în final decide profesorul, în funcție de posibilitățile și interesul studenților, de timpul disponibil și de punctul de vedere personal al profesorului asupra subiectului respectiv.

### Problemele

Au fost propuse mult mai multe probleme decît ar corespunde posibilităților studenților. Ele se împart în două categorii. Problemele de la sfîrșitul fiecărui capitol se referă direct la cunoștințele de bază prezentate în capitolul respectiv și constituie exerciții obligatorii. Dacă studentul întîmpină dificultăți serioase cu una din acestea, înseamnă că el nu și-a însușit una din cunoștințele fundamentale. Lista de probleme, pentru fiecare capitol, se continuă la sfîrșitul cărții în paragraful intitulat „Alte probleme și întrebări”. Deși diferența dintre cele două categorii de probleme nu este întotdeauna prea mare, problemele suplimentare au un caracter mai general și sînt, de obicei, mai interesante decît cele date la sfîrșitul capitolului. Unele dintre ele introduc aplicații noi sau chiar teme noi. O demonstrație omisă uneori în text este dezvoltată pe baza indicațiilor și discuțiilor din problemă. Aceste probleme și întrebări urmăresc diferite scopuri: dau de gîndit studenților buni, sugerează domeniul larg de aplicații al ideilor studiate, chiar dacă nu sînt rezolvate ci pur și simplu citite. Unele probleme pot servi ca puncte de plecare în studiul unor chestiuni speciale. (Un exemplu este problema 4.25 despre dioda cu sarcină spațială limitată). De fapt, este util ca în timpul lecției să se rezolve două sau trei probleme de acest fel. Întrebările suplimentare pot fi deseori folosite ca punct de plecare pentru o discuție la curs.

### Experimente de curs

Experimentele de curs sînt deosebit de importante. Nici o carte nu poate da studentului o reprezentare completă asupra electricității și magnetismului. Cărțile tind să fie prea teoretizate mai ales în cazul subiectelor ce au o minunată structură logică. Nici această carte nu face excepție. Studenții trebuie să pună mîna pe magneți, să bobineze, să producă descărcări, să vadă un instrument electric sensibil, să cunoască un instrument foarte precis. Ei trebuie să sesizeze efectul unui megawatt cît și a unui



microwatt. Laboratorul din Berkeley este bun până la un punct. Trebuie, însă, folosite orice alte mijloace pentru a introduce studentul în lumea în care câmpul electric nu mai este doar un simbol ci ceva palpabil.

### Examenele

În această carte multe probleme sînt tratate la un nivel destul de ridicat. Credem că studentul va profita de pe urma unei asemenea expuneri. Totuși nu trebuie să fim tentați să examinăm la același nivel. Experiența noastră arată că examinările relativ simple sînt cele mai bune.

*Capitolul 1.* (Electrostatică: sarcini și câmpuri) Cuprinde o expunere directă a ideilor fundamentale. Materialul este destul de arid și poate fi însoțit, chiar de la început, de experiențe de electrostatică.

Paragrafe facultative: 1.6.

*Capitolul 2.* (Potențial electric) În acest capitol nu se introduc prea multe noțiuni noi de fizică, dar se dezvoltă noțiuni noi de matematică. Acest material trebuie parcurs cu grijă, într-un ritm corespunzător nivelului de înțelegere și pregătire al studenților. Orice chestiune din acest capitol va fi necesară mai curînd sau mai tîrziu. Operatorul rotor, totuși, nu va fi prea mult folosit pînă la cap. 6. În scopul diluării materialului, dacă se consideră necesar, citirea paragrafelor 2.15 pînă la 2.18 poate fi amînată pînă atunci. Este necesar ca studenții să înțeleagă intuitiv natura divergenței și rotorului. În text sînt introduse cîteva chestiuni ajutătoare ca figurile 2.32 și 2.34 și cîteva exerciții, dar acestea nu suplinesc expunerea, schițarea pe tablă, discuțiile.

Paragrafe facultative: nici unul.

*Capitolul 3.* (Cîmpul electric în jurul conductorilor) Acest capitol poate fi parcurs destul de repede. Condensatorul plan-paralel, introdus aici, va reapare frecvent. Legate de teorema unicității apar unele idei importante; nebanalitatea acestei teoreme este cel mai bine pusă în evidență prin discuții. Introducerea metodei de relaxare și a metodei variaționale pentru problemele la limită din electrostatică nu este prea obișnuită la această etapă, dar studenții par interesați de aceste probleme care, înainte de toate, sînt mult mai utile și instructive decît tradiționalele trucuri cu „imagini”. Cu toate acestea, întregul paragraf (3.8) poate fi sărit fără consecințe. La fel și paragraful 3.6, care introduce coeficienții capacitivi și intenționează să prezinte pe scurt, folosind exemple concrete, cum pot fi descrise sistemele liniare în general. O lipsă a acestui capitol este faptul că nu cuprinde nici o descriere a instrumentelor sau experiențelor referitoare la câmpuri: electroscoape, voltmetre electrostatice etc. Pentru a ne introduce în realitate, sînt necesare aici experimente de curs și lucrări de laborator.

Paragrafe facultative: 3.6, 3.8.

*Capitolul 4.* (Curenți electrici) Noțiunea de densitate de curent de volum este introdusă mai devreme și se explică din punct de vedere microscopic transportul de sarcină prin ioni. Fizica ce stă la baza legii lui Ohm este studiată pe calea modelului clasic Drude-Lorentz. Acest material din paragraful 4.4 poate fi tratat mai mult sau mai puțin profund după cum permite programa. Nici una din problemele ce urmează nu este legată de el. Dar noțiunile de fizică cuprinse aici sînt importante și, prin urmare, ar trebui ca studentul să-l citească. Tratarea circuitelor de curent continuu a fost trecută la noțiuni fundamentale. El poate fi extins ușor în direcțiile necesare prin exemple și probleme. Studenții au efectuat în Laboratorul de la Berkeley lucrări practice cu circuite cu mult înainte acestui capitol.

Paragrafe facultative: 4.5, 4.6, 4.10.

*Capitolul 5.* (Cîmpul purtătorilor de sarcină în mișcare) În urma studierii volumului I și din lucrările de laborator, studentul cunoaște cîmpul magnetic și forța  $q(\vec{v} \times \vec{B})$  exercitată asupra sarcinii în mișcare. Este bine ca înainte începerii capitolului să se revia aceste



noțiuni. Înaintea începerii paragrafului 5.3, se vor face experiențe simple de interacțiuni magnetice și mai ales cu forța ce acționează între doi curenți paraleli. În acest capitol, studentul va privi interacțiunile magnetice dintr-un punct de vedere nou. Invarianța sarcinii este un fapt fizic fundamental. Pentru a-l aprecia, definirea sarcinii în sistemul purtător de sarcină în mișcare trebuie făcută cu grijă.

Un prim scop al capitolului este înțelegerea clară a cîmpului electric al unui purtător de sarcină în mișcare. Cheia înțelegerii este transformarea cîmpului electrostatic în sistemul de referință în mișcare. Aici este necesară, discutarea amănunțită a noțiunii de cîmp. Studentul va privi cu suspiciune deducerea legii generale de transformare dacă nu va înțelege demonstrația din paragraful 5.5; ea îi va apărea ca un caz foarte special. Cîmpul electric al particulelor relativiste este o interesantă surpriză pentru majoritatea studenților, chiar și pentru cei mai pretențioși care se așteaptă mai curînd la un cîmp „retardat”. Aici, radiația este doar un mic pas înainte și deși am amînat-o pentru volumul III, se poate, totuși, arăta studenților cum apare radiația de frinare (v. prob. 5.8) și radiația sincrotronică. Paragraful 5.8, care ia mai mult timp pentru a demonstra ceva ce studentul a luat de bun, poate fi mult scurtat dacă studenții au studiat transformările pentru forță din volumul I. În ultimul paragraf rezultă dependența de viteză a forței. Detaliile de calcul sînt mai puțin importante decît înțelegerea deducerii. Poate fi subliniată simplitatea și exactitatea rezultatului.

Paragrafe facultative: nici unul.

**Capitolul 6. (Cîmpul magnetic)** Se reintroduce inducția cîmpului magnetic  $B$ , originea căreia a fost expusă. Relația integrală  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$ , dedusă pentru curenți rectilinii, este pur și simplu postulată ca fiind valabilă pentru orice curent continuu în general. (Continuarea deducerii ar fi implicat particule cu sarcină accelerate). Din mai multe motive am introdus în acest capitol potențialul vector. Așa cum este folosit aici și mai departe în capitolul 10, nu este complicat. Orice student care se ocupă de fizică trebuie să se familiarizeze cu el. Deși nu există neclarități în text, trebuie ținut cont de diferența dintre un vector axial și unul polar și trebuie să fim atenți în continuare la studiul lui  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  în interiorul substanței, referitor la deosebirea esențială în simetria dintre sursele cîmpului electric și magnetic. În acest capitol, totuși, accentul trebuie pus pe cîmpul magnetic. Legile de transformare pentru cîmpuri în vid, pot fi ilustrate prin cîteva exemple. Problema 6.15, de exemplu, este una din cele care pot fi rezolvate și discutate. Paragrafele 6.8 și 6.9 nu sînt indispensabile (deși prima parte a paragrafului 6.9 este importantă în clarificarea unei anumite chestiuni) și pot fi indicate ca lectură facultativă.

Paragrafe facultative: 6.8, 6.9.

**Capitolul 7. (Inducția electromagnetică și ecuațiile lui Maxwell)** Pentru a face introducerea în acest capitol poate fi folosită o mare varietate de demonstrații experimentale. Echivalența despre care s-a discutat în paragrafele 7.2, 7.3 și 7.4 poate fi foarte clar pusă în evidență cu ajutorul unui galvanometru balistic sensibil, cu bobine în mișcare și magneți. (Nu ezitați să aduceți magneți permanenți, deși în text ei nu sînt menționați pînă la capitolul 10!). Acest capitol nu prezintă probleme speciale iar posibilitățile ilustrațiilor practice ale inducției sînt nelimitate. În două puncte expunerea noastră poate părea superficială și pripită; (1) paragraful 7.8 în care se expun dificultățile auto-inducției, cu scopul de a introduce la început inducția mutuală, (2) paragraful 7.12 unde se discută rolul curentului de deplasare.

Din experiența noastră știm că aceste chestiuni tratate neatent pot eventual neliniști un student care meditează; ele ar fi putut fi tratate direct de la bun început. Odată cunoscute ecuațiile lui Maxwell este greu să rezisti tentației de a vorbi despre undele electromagnetice și în ultima parte a paragrafului 7.13 intrăm puțin în domeniul volumului III.

Paragrafe facultative: 7.7; ultima parte din 7.13.



*Capitolul 8.* (Circuite de curent alternativ) Se parcurg doar părțile elementare ale teoriei curentului alternativ. Sperăm ca această introducere modestă să completeze cunoștințele practice obținute de studenți în laborator. Exercițiile cu reprezentări complexe îl vor pregăti pentru studiul volumului III. Dacă timpul permite, profesorul poate extinde această prezentare ce poate fi făcută ușor urmînd calea obișnuită. Sau, poate sări întreg capitolul dacă studenții săi încep studiul amănunțit al circuitelor de curent alternativ la cursul de electrotehnică. În acest caz, paragraful 8.1 trebuie studiat la capitolul 7 unde urmează logic după paragraful 7.10.

Paragrafe facultative: (toate cu excepția paragrafului 8.1).

*Capitolul 9.* (Cîmpuri electrice în substanță) Fără o planificare atentă, timpul rămas pentru capitolele 9 și 10 s-ar putea să fie prea scurt. Acestor capitole trebuie să li se atribuie mai mult de o cincime din întregul curs-trei sau mai bine patru săptămîni dintr-un semestru de 14 săptămîni. Aici ne-am propus în principal să facem cunoscut studentului structura electrică a substanței; teoria formală a cîmpului macroscopic este pe locul al doilea. De exemplu, dacă timpul ne presează, putem renunța la exemplul clasic al sferei dielectrice în favoarea dipolilor moleculari induși și permanenți. (Totuși, unul din paragrafele lungi — 9.13, poate fi oricum omis la prima citire cu excepția studenților foarte bine pregătiți). Este necesară folosirea cunoștințelor de chimie ale studenților, oricum ar fi ele. Acest subiect este terenul comun al fizicienilor și chimiștilor și fundamentele sale privesc în mod egal și pe viitorii specialiști în biologie moleculară și pe fiziologi. Folosiți-le în spiritul lui Debye!

Paragrafe facultative; 9.6, 9.10, 9.11, 9.13, 9.17.

*Capitolul 10.* (Cîmpuri magnetice în substanță) Acest capitol cere ceva mai puțin timp decît cap. 9, și la fel ca și cap. 9 el deschide mai multe perspective pentru ca profesorul să-și conducă studenții în incursiuni fascinante. Dacă timpul este scurt, se pot expune doar rezultatele paragrafelor 10.3 și 10.4, fără demonstrații, înaintea analizei clasice amănunțite a diamagnetismului, introdus în paragraful 10.5, începînd cu ec. (23). De asemeni ne putem opri mai puțin asupra chestiunii cîmpurilor macroscopice în substanță, chestiune la care studentul poate reveni mai tîrziu cînd are absolută nevoie de ea. Tratarea cîmpului magnetic macroscopic se face paralel cu tratarea cîmpului electric în cap. 9. În ambele cazuri se evită folosirea ipoteticilor „cavități”. Sintetizarea noțiunilor din figura 10.19 poate folosi ca ghid profesorului în expunerea sa.



## Capitolul 1

# Electrostatica: sarcini și câmpuri

1.1. Sarcina electrică	18
1.2. Conservarea sarcinii	19
1.3. Cuantificarea sarcinii	21
1.4. Legea lui Coulomb	22
1.5. Energia unui sistem de purtători de sarcini	26
1.6. Energia electrică a unei rețele cristaline	30
1.7. Câmpul electric	32
1.8. Distribuții de sarcină	36
1.9. Flux	37
1.10. Legea lui Gauss	39
1.11. Câmpul unei distribuții sferice de purtători de sarcină	42
1.12. Câmpul unei sarcini liniar distribuite	44
1.13. Câmpul sarcinii distribuite pe un plan infinit	45
Probleme	47

441.1521





microwatt. Laboratorul din Berkeley este bun până la un punct. Trebuie, însă, folosite orice alte mijloace pentru a introduce studentul în lumea în care câmpul electric nu mai este doar un simbol ci ceva palpabil.

### Examenele

În această carte multe probleme sînt tratate la un nivel destul de ridicat. Credem că studentul va profita de pe urma unei asemenea expuneri. Totuși nu trebuie să fim tentați să examinăm la același nivel. Experiența noastră arată că examinările relativ simple sînt cele mai bune.

*Capitolul 1.* (Electrostatică: sarcini și câmpuri) Cuprinde o expunere directă a ideilor fundamentale. Materialul este destul de arid și poate fi însoțit, chiar de la început, de experiențe de electrostatică.

Paragrafe facultative: 1.6.

*Capitolul 2.* (Potențial electric) În acest capitol nu se introduc prea multe noțiuni noi de fizică, dar se dezvoltă noțiuni noi de matematică. Acest material trebuie parcurs cu grijă, într-un ritm corespunzător nivelului de înțelegere și pregătire al studenților. Orice chestiune din acest capitol va fi necesară mai curînd sau mai tîrziu. Operatorul rotor, totuși, nu va fi prea mult folosit pînă la cap. 6. În scopul diluării materialului, dacă se consideră necesar, citirea paragrafelor 2.15 pînă la 2.18 poate fi amînată pînă atunci. Este necesar ca studenții să înțeleagă intuitiv natura divergenței și rotorului. În text sînt introduse cîteva chestiuni ajutătoare ca figurile 2.32 și 2.34 și cîteva exerciții, dar acestea nu suplinesc expunerea, schițarea pe tablă, discuțiile.

Paragrafe facultative: nici unul.

*Capitolul 3.* (Cîmpul electric în jurul conductorilor) Acest capitol poate fi parcurs destul de repede. Condensatorul plan-paralel, introdus aici, va reapare frecvent. Legate de teorema unicității apar unele idei importante; nebanalitatea acestei teoreme este cel mai bine pusă în evidență prin discuții. Introducerea metodei de relaxare și a metodei variaționale pentru problemele la limită din electrostatică nu este prea obișnuită la această etapă, dar studenții par interesați de aceste probleme care, înainte de toate, sînt mult mai utile și instructive decît tradiționalele trucuri cu „imagini”. Cu toate acestea, întregul paragraf (3.8) poate fi sărit fără consecințe. La fel și paragraful 3.6, care introduce coeficienții capacitivi și intenționează să prezinte pe scurt, folosind exemple concrete, cum pot fi descrise sistemele liniare în general. O lipsă a acestui capitol este faptul că nu cuprinde nici o descriere a instrumentelor sau experiențelor referitoare la câmpuri: electroscop, voltmetre electrostatice etc. Pentru a ne introduce în realitate, sînt necesare aici experimente de curs și lucrări de laborator.

Paragrafe facultative: 3.6, 3.8.

*Capitolul 4.* (Curenți electrici) Noțiunea de densitate de curent de volum este introdusă mai devreme și se explică din punct de vedere microscopic transportul de sarcină prin ioni. Fizica ce stă la baza legii lui Ohm este studiată pe calea modelului clasic Drude-Lorentz. Acest material din paragraful 4.4 poate fi tratat mai mult sau mai puțin profund după cum permite programa. Nici una din problemele ce urmează nu este legată de el. Dar noțiunile de fizică cuprinse aici sînt importante și, prin urmare, ar trebui ca studentul să-l citească. Tratarea circuitelor de curent continuu a fost trecută la noțiuni fundamentale. El poate fi extins ușor în direcțiile necesare prin exemple și probleme. Studenții au efectuat în Laboratorul de la Berkeley lucrări practice cu circuite cu mult înainte acestui capitol.

Paragrafe facultative: 4.5, 4.6, 4.10.

*Capitolul 5.* (Cîmpul purtătorilor de sarcină în mișcare) În urma studierii volumului I și din lucrările de laborator, studentul cunoaște cîmpul magnetic și forța  $q(\vec{v} \times \vec{B})$  exercitată asupra sarcinii în mișcare. Este bine ca înainte începerii capitolului să se reia aceste



## 1.1. SARCINA ELECTRICĂ

Primilor ei cercetători electricitatea le-a apărut ca un fenomen uluitor.

Pentru a smulge corpurilor „focul ascuns”, cum era numit uneori, pentru a le aduce într-o stare puternic electrizată, pentru a produce un curent staționar, se cerea multă inventivitate. Părea că fenomenele obișnuite ale naturii, cu excepția fulgerului, începînd cu înghețarea apei și pînă la creșterea unui copac, nu au nici o legătură cu comportarea neobișnuită a obiectelor electrizate. Acum știm că proprietățile fizice și chimice ale materiei — de la atom la celula vie — sînt în mare parte determinate de forțele electrice. Atingerea acestui stadiu al cunoașterii îl datorăm savanților secolului al XIX-lea Ampère, Faraday, Maxwell și mulți alții, care au descoperit natura electromagnetismului, cît și fizicienilor și chimiștilor secolului al XX-lea, care au descifrat structura atomică a materiei.

Teoria clasică a electromagnetismului se ocupă cu studiul sarcinilor electrice, a curenților electrice și a interacțiunilor lor, presupunînd că toate aceste mărimi pot fi măsurate independent una de alta și cu precizie din ce în ce mai mare. Aici prin „clasic” se înțelege pur și simplu „necuantic”. În teoria clasică a electromagnetismului, ca și în mecanica clasică, legile cuantificării sînt ignorate. De fapt, teoria clasică era aproape de stadiul actual al dezvoltării ei încă înainte de descoperirea lui Planck, păstrîndu-și deplina valabilitate și în prezent. Nici revoluția produsă în concepțiile noastre de fizică cuantică, nici dezvoltarea teoriei speciale a relativității, n-au umbrît strălucirea ecuațiilor cîmpului electromagnetic date de Maxwell cu peste o sută de ani în urmă.

Bineînțeles, teoria era fundamentată experimental și astfel a putut fi aplicată în domenii practice, ca de exemplu, la bobine, condensatori, curenți alternativi și, în fine, la radiunde și unde luminoase. Dar chiar un asemenea succes nu poate fi o garanție a valabilității ei și în alt domeniu, ca de exemplu, fenomenele intramoleculare.

Importanța pe care continuă s-o aibă teoria clasică a electromagnetismului în fizica modernă se explică prin faptul că, în primul rînd, teoria specială a relativității nu cere revizuirea teoriei clasice a electromagnetismului. Privită din punct de vedere istoric, teoria specială a relativității s-a dezvoltat pe baza teoriei clasice a electromagnetismului și a experiențelor legate de ea. Ecuațiile de cîmp ale lui Maxwell, elaborate cu mult înaintea lucrărilor lui Lorentz și Einstein, sînt perfect compatibile cu teoria relativității. În al doilea rînd, caracteristicile cuantice ale forțelor electromagnetice sînt neglijabile chiar pentru distanțe mai mici de  $10^{-10}$  cm, care sînt de o sută de ori mai mici decît dimensiunea atomului. Pentru descrierea respingerii și atracției particulelor din atom se aplică aceleași legi ca și în cazul foitelor unui electroscope deși, pentru a prezice comportarea particulelor



sub acțiunea forțelor electrice avem nevoie de mecanica cuantică. Pentru distanțe mai mici, are loc o fuzionare destul de reușită a teoriei electrodinamice și cuantice — numită *electrodinamică cuantică* — se pare, în acord cu experiența pînă la cele mai mici distanțe accesibile pînă în prezent privind studiul interacțiunilor.

Presupunind că cititorul este familiarizat cu noțiunile de bază din electricitate, nu vom repeta toate experiențele care demonstrează existența purtătorilor de sarcină electrică, sau toate dovezile care vin în sprijinul structurii electrice a materiei. Pe de altă parte, vom revizui cu atenție bazele experimentale ale legilor fundamentale, de care depind toate celelalte legi. În acest capitol vom studia fizica sarcinilor electrice staționare — *electrostatica*.

Una din proprietățile fundamentale ale sarcinii electrice este, desigur, existența ei în cele două forme, care au fost denumite încă de mult, sarcină pozitivă și negativă. S-a observat că toate particulele încărcate pot fi împărțite în două clase, astfel încît particulele aparținînd aceleiași clase se resping, atrăgînd, în același timp, particulele aparținînd celeilalte clase. Dacă două corpuri mici încărcate, *A* și *B*, separate printr-o distanță oarecare, se resping și dacă *A* atrage un al treilea corp electrizat *C*, atunci întotdeauna *B* va atrage *C*. Această proprietate universală nu este încă perfect elucidată. Dar fizicienii contemporani consideră sarcinile pozitive și negative ca fiind în fond, manifestări opuse ale aceleiași calități, așa cum „dreapta” și „stînga” sînt manifestări opuse ale proprietății de simetrie. Într-adevăr, problema simetriei, cu noțiunile „dreapta” și „stînga”, pare strîns legată de dualitatea sarcinii electrice și de o altă simetrie fundamentală — cele două sensuri ale timpului. Fizica particulelor elementare aduce o oarecare lumină în aceste probleme.

Sarcina pe care o numim negativă, poate fi, la fel de bine, numită pozitivă și invers.\* Alegerea a fost o întîmplare istorică. Universul nostru reprezintă un echilibru de sarcini electrice pozitive și negative, ceea ce nu este de mirare, întrucît sarcinile de același fel se resping.

Pentru înțelegerea structurii electrice a materiei, sînt esențiale alte două proprietăți ale sarcinii electrice: sarcina se conservă și se cuantifică. Aceste proprietăți se referă la *mărimea* sarcinii și, prin urmare, implică măsurarea ei. În acest capitol, vom stabili cum poate fi măsurată sarcina cu precizie, folosind forța de interacțiune între sarcinile aflate la o distanță bine determinată ș.a.m.d. Dar pînă atunci, să considerăm acest lucru cunoscut și să discutăm cele două proprietăți esențiale ale sarcinii electrice amintite mai sus.

## 1.2. CONSERVAREA SARCINII

Într-un sistem izolat, sarcina totală rămîne neschimbată. Prin *izolat* înțelegem că nici un fel de substanță nu trece granițele ce delimitează sistemul. Lumina poate intra sau ieși din sistem, fără a afecta acest principiu,

\* Sarcina unui electron obișnuit nu are nimic intrinsec negativ. O dată ce înmulțirea a fost definită, un număr întreg negativ diferă de un număr întreg pozitiv prin aceea că pătratul lui este un număr întreg de semn opus. Dar produsul a două sarcini nu este o sarcină, deci nu există paralelism.



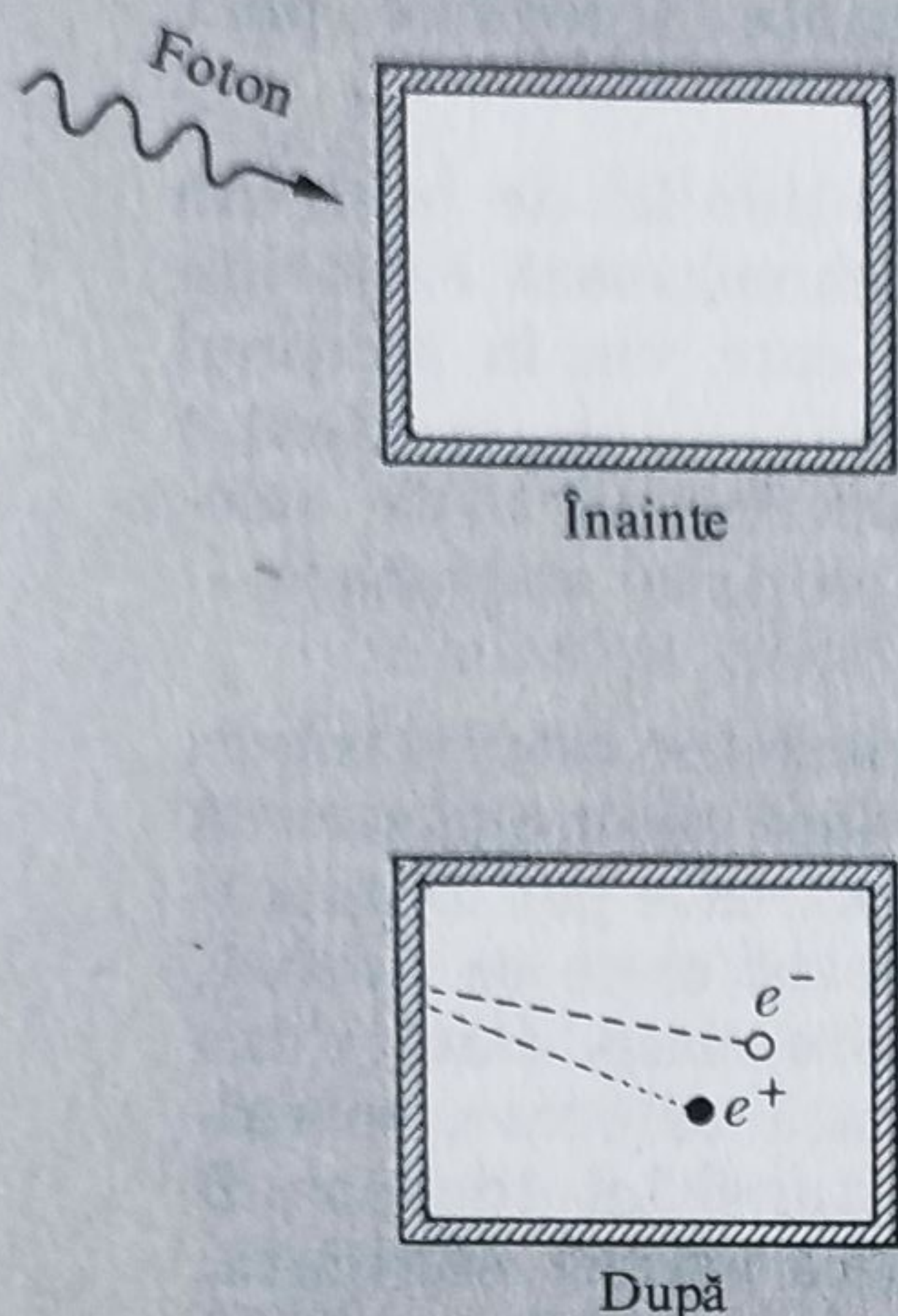


Fig. 1.1. Particulele încărcate apar perechi cu sarcini egale în mărime și de semne contrare.

întrucât fotonul nu are sarcină. De exemplu, într-o incintă cu pereți subțiri, aflată în vid și expusă razelor gamma, se poate observa formarea de perechi, prin transformarea unui foton de înaltă energie într-un electron negativ și unul pozitiv (fig. 1.1).

Au luat naștere două particule încărcate electric, dar variația sarcinii totale, în interiorul și pe suprafața incintei, este nulă. Legea conservării sarcinii n-ar fi respectată în cazul creării unei particule încărcate pozitiv *fără* crearea simultană a unei particule încărcate negativ. Un asemenea fenomen n-a fost observat niciodată.

Bineînțeles că, în cazul în care sarcinile electrice ale electronului și pozitronului nu ar fi perfect egale, formarea perechii ar încălca legea strictă a conservării sarcinii. Conform determinărilor experimentale, sarcinile lor *sînt* egale. O verificare experimen-

tală interesantă este dată de structura numită *pozitronium*, care constă dintr-un electron și un pozitron. Acest „atom” curios poate exista un timp suficient de lung — în jurul unei zecimi de microsecundă — pentru a putea fi studiat în detaliu. El se comportă ca și cum ar fi neutru din punct de vedere electric. Majoritatea fizicienilor ar fi uluiți și nici n-ar crede, dacă s-ar găsi vreo diferență în mărimea sarcinilor, întrucât raportul dintre electron și pozitron este similar cu raportul ce există între particulă și antiparticulă.

Această egalitate perfectă a sarcinilor, ca și cea a maselor, este o manifestare a unei simetrii universale a naturii, dualitatea particulă-antiparticulă. S-ar putea presupune că conservarea sarcinii este doar o consecință a unei legi mai generale de conservare, care ar dicta crearea și anihilarea particulelor. Dar s-ar putea pune problema și invers: conservarea sarcinii să fie fundamentală și celelalte legi să fie conforme cu ea. Noi nu știm încă dacă aceste întrebări au rost.

Un singur lucru ne este clar în studiul electromagnetismului: neconservarea sarcinii ar fi incompatibilă cu conținutul actual al teoriei electromagnetice. Prin urmare, *legea conservării sarcinii* poate fi formulată fie ca un postulat al teoriei, sau ca o lege empirică, verificată de toate observațiile făcute pînă în prezent, fără excepție:

Intr-un sistem izolat, sarcina electrică totală, adică suma algebrică a sarcinilor pozitive și negative, se conservă.



Mai devreme sau mai târziu, ne vom pune întrebarea dacă această lege satisface condiția de invarianță relativistă. Aminăm discutarea acestei chestiuni importante până la capitolul 5. Dar răspunsul este afirmativ și nu numai în sensul că formularea de mai sus este adevărată în orice sistem de referință inerțial, dar și într-un sens mai riguros: observatori aflați în diferite sisteme de referință, măsurând sarcina, obțin aceeași valoare. Cu alte cuvinte, sarcina electrică totală a unui sistem izolat este un invariant relativist.

### 1.3. CUANTIFICAREA SARCINII

Experiența lui Millikan cu picătura de ulei și un alt șir de numeroase experiențe au arătat că în natură sarcinile electrice sînt formate din sarcini discrete, de aceeași mărime. Această mărime o notăm cu  $e$ , sarcina electronului. Am stabilit că pozitronul are exact aceeași sarcină. Remarcabilă este, de asemenea, egalitatea perfectă a sarcinilor tuturor celorlalte particule încărcate, ca de exemplu egalitatea dintre valoarea sarcinii pozitive a protonului și valoarea sarcinii negative a electronului.

Această egalitate — dintre sarcinile protonului și electronului — a fost stabilită într-o experiență de mare finețe în care se verifică neutralitatea electrică a atomului sau moleculei de hidrogen normal. În acest scop, un fascicul de atomi sau molecule era deviat în câmp electric. În experiență\*, un fascicul bine colimat de atomi de cesiu era dirijat spre o incintă cu vid înșaintat plasată într-un câmp electric intens.

Neobservîndu-se nici un fel de deviere, s-a tras concluzia că sarcina netă a atomului de cesiu trebuie să fie mai mică decît  $10^{-16}e$ . O experiență de și mai mare finețe a fost recent realizată printr-o altă metodă\*\*. O cantitate mare de hidrogen gazos a fost supusă comprimării într-un rezervor perfect izolat din punct de vedere electric de mediul înconjurător. Apoi s-a dat drumul gazului din rezervor, astfel încît ionii să nu poată ieși. Dacă sarcina protonului ar fi diferită de sarcina electronului, să spunem, cu o fracțiune dintr-un miliard, atunci fiecare moleculă de hidrogen, formată din doi protoni și doi electroni, ar fi transportat o sarcină de  $2 \times 10^{-9}e$ , și prin evacuarea întregii mase de hidrogen, sarcina electrică și potențialul rezervorului ar fi variat sensibil. De fapt, în această experiență era posibilă punerea în evidență a unei sarcini reziduale cam de  $10^{-20}e$  pe atom și totuși nu s-a observat nimic! Putem trage concluzia, cu o precizie de  $10^{-20}$ , că electronul și protonul au sarcini egale.

Conform concepțiilor actuale, deosebirea dintre electron și proton, ca și dintre alte două particule elementare, nu se limitează numai la semnul sarcinii. De aceea, nimeni încă nu-și explică această precizie fantastică în

\* J. C. Zorn, G. E. Chamberlain și V. W. Hughes, *Phys. Rev.* 129, 2566 (1963).

\*\* J. G. King, *Phys. Rev. Letters* 5, 562 (1960). Referințe cu privire la verificările egalității de sarcină, pot fi găsite în acest articol și în capitolul 13 al cărții lui V. W. Hughes, *Gravitație și relativitate*, editată de H. Y. Chiu și W. F. Hoffman (W. A. Benjamin Inc., New York, 1964).



egalitatea sarcinilor. Evident, cuantificarea sarcinii este o lege esențială și universală a naturii. Toate particulele elementare, în măsura posibilităților noastre de investigare, au aceleași valori ale sarcinii. Putem spera că vreo viitoare descoperire sau intuiție teoretică ne va putea explica de ce nu pot exista particule cu sarcina  $0,500 e$  sau  $0,999 e^*$ .

Cuantificarea sarcinii, desigur, iese din limitele electromagnetismului clasic. De obicei ignorăm acest fapt și acționăm ca și cum sarcinile punctiforme  $q$  ar putea avea orice valoare. Acest lucru nu ne va deranja. Totuși, este bine să reținem că teoria clasică nu este în stare să ne explice structura particulelor elementare. (Nu este sigur că teoria cuantică actuală o poate face!) Ce menține electronul sub forma unui tot unitar, este tot atât de misterios ca și ce anume determină, atât de exact, mărimea sarcinii lui. Întrucât forțele electrostatice, dintre diferitele părți ale electronului sînt repulsive, înseamnă că intervin și forțe de altă natură.

În studiul electricității și magnetismului, vom considera particulele încărcate ca simple purtătoare de sarcină, atât de mici încît dimensiunea și structura lor, în majoritatea cazurilor, poate fi neglijată. În cazul protonului, de exemplu, din experiențele de difuzie la mare energie, cunoaștem că particula nu depășește cu mult raza de  $10^{-13}$  cm. Reamintim că Rutherford, analizînd difuzia particulelor alfa, a arătat că chiar în nucleele grele sarcina electrică se distribuie pe o regiune mai mică decît  $10^{-11}$  cm. Pentru fizicianul secolului al XIX-lea „sarcina punctiformă” era o noțiune abstractă concretizată, destul de needificator, printr-o bobită de soc încărcată electric. În momentul de față, sîntem familiarizați cu particulele ce compun atomul. Structura discretă a sarcinii a devenit atât de firească în descrierea modernă a naturii, încît sarcina punctiformă ni se pare o idealizare mai puțin artificială decît o distribuție continuă a densității de sarcină. Cînd postulăm asemenea distribuții continue de sarcini, le putem considera ca niște medieri asupra unui număr foarte mare de sarcini elementare, la fel ca la definirea densității macroscopice a unui lichid, cînd nu ținem seama de neomogenitățile existente la nivel molecular. Cuantificarea sarcinii nu este evidentă pentru obiecte ce sînt mult mai mari ca picăturile de ulei ale lui Millikan!

#### 1.4. LEGEA LUI COULOMB

După cum probabil știți, interacțiunea dintre două sarcini electrice aflate în repaus este descrisă de legea lui Coulomb: două sarcini electrice aflate în repaus se resping sau se atrag cu o forță proporțională cu produsul dintre mărimea sarcinilor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele.

\* Pe baza unor cercetări teoretice recente asupra particulelor elementare, se presupune posibilitatea existenței particulelor cu sarcina egală cu  $\frac{1}{3}e$  și  $\frac{2}{3}e$ . Dar încercările de găsire a unor asemenea particule, în condiții considerate favorabile producerii și detectării lor, au dat greș. (L. B. Leipuner, W. T. Chu, B. C. Larsen, R. K. Adair, *Particule cu sarcina  $\frac{1}{3}e$* , Phys. Rev. Letters, 12, 423 (1964). În momentul de față, încercările pentru găsirea unor asemenea particule, continuă.



Această lege se poate scrie vectorial sub forma:

$$\mathbf{F}_2 = k \frac{q_1 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{21}}{r_{21}^2} \quad (1)$$

Aici  $q_1$  și  $q_2$  sînt numere (scalari) care exprimă mărimea și semnul sarcinii,  $\hat{\mathbf{r}}_{21}$  este vectorul unitar orientat\* pe suportul celor două sarcini, de la sarcina 1 la sarcina 2 și  $\mathbf{F}_2$  este forța ce acționează asupra sarcinii 2. Printre altele, ecuația (1) exprimă și faptul că sarcinile de același fel se resping și sarcinile de semn contrar se atrag și că forța este newtoniană, adică:  $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ .

Vectorul unitar  $\hat{\mathbf{r}}_{21}$  arată că forța este paralelă cu dreapta ce unește cele două sarcini. Pentru ca acest lucru să nu fie adevărat, ar trebui ca însuși spațiul să fie neomogen, dar într-un spațiu vid și izotrop, două sarcini punctiforme sînt unite printr-o dreaptă.

Dacă „sarcina punctiformă” ar avea o structură internă oarecare cu o axă care să determine o direcție, atunci ea nu poate fi descrisă doar printr-o mărime scalară  $q$ .

În scrierea ecuației (1) presupunem sarcinile bine localizate, cu dimensiuni neglijabile în raport cu distanța dintre ele,  $r_{21}$ ; în caz contrar, distanța  $r_{21}$  nu poate fi determinată astfel încît ecuația (1) să fie general valabilă. Condiția ca sarcinile să fie în repaus este necesară, pentru a elimina forțele magnetice ce iau naștere prin mișcarea sarcinilor, problemă ce va fi studiată în capitolele următoare.

Valoarea constantei  $k$ , introdusă în ecuația (1), depinde de sistemul de unități ales.

Dacă  $r_{21}$  se măsoară în cm,  $F$  în dyne, sarcina se măsoară în unități CGS electrostatice sau CGSes. În acest caz  $k = 1$ . Două sarcini egale fiecare cu o unitate CGSes de sarcină electrică, aflate la o distanță de 1 cm, se resping cu o forță egală cu o dynă; ecuația (1), în care  $k = 1$ , poate fi considerată ca definiția unității de sarcină în sistemul CGSes. Ca unitate de sarcină, vom folosi *coulombul*. Această unitate este inclusă în sistemul metru-kilogram-secundă. Dacă în ecuația (1), sarcinile se exprimă în coulombi și distanța în metri, atunci forța se obține în newtoni dacă  $k = 8,9875 \times 10^9$ . Introducerea coulombului simplifică relațiile dintre unitatea de sarcină și celelalte unități ale mărimilor electrice (amper, volt, ohm și watt), care sînt des utilizate în tehnică, în laborator și în viața de toate zilele. Un coulomb este egal cu  $2,998 \times 10^9$  u CGS.es\*\*.

Observarea interacțiunii corpurilor încărcate este singura posibilitate de detecție și măsură a sarcinilor electrice. Și atunci se naște întrebarea: ce

\* Convenția, adoptată aici, s-ar putea să nu pară firească dar întrucît ea este folosită și în alte capitole ale fizicii, vom continua s-o folosim în această carte.

\*\* Numărul 2,998, cu care ne vom mai întîlni în transformările diferitelor unități electrice, ne amintește de valoarea vitezei luminii ( $2,998 \times 10^8$  m/s). Nu vom explica acum de unde provine acest coeficient. Deseori, în cărți și tabele, veți întîlni doar factorul 3. Riguros vorbind, în locul coeficientului 3, care apare în transformările unităților electrice, trebuie pus 2,99792 număr care exprimă valoarea vitezei luminii în  $10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .



anume este doar definiție în legea lui Coulomb? Conținutul fizic esențial al acestei legi este dependența inversă a forței de pătratul distanței și *aditivitatea* acțiunii sarcinilor electrice. Pentru a înțelege ultima afirmație, trebuie să considerăm nu numai două sarcini. În afară de acestea, dacă în lume n-ar exista decât două sarcini  $q_1$  și  $q_2$  cu care să putem realiza experiențe, nu le-am putea măsura niciodată separat. Am putea doar verifica proporționalitatea lui  $F$  cu  $\frac{1}{r_{21}^2}$ . Să presupunem că avem trei purtători de sarcină

$q_1$ ,  $q_2$  și  $q_3$ . Putem măsura forța exercitată asupra lui  $q_1$ , dacă  $q_2$  se află la 10 cm de  $q_1$ , iar  $q_3$  se află la distanță foarte mare față de  $q_1$  și  $q_2$  (fig. 1.2,a). Apoi, putem îndepărta sarcina  $q_2$ , aducând în locul ei pe  $q_3$  și să măsurăm din nou forța exercitată asupra lui  $q_1$ . În fine, vom apropia foarte mult sarcinile  $q_2$  și  $q_3$  și le vom așeza la 10 cm de  $q_1$ .

Măsurînd forța exercitată asupra lui  $q_1$ , vom constata că ea este egală cu suma forțelor măsurate în experiențele precedente. Acest rezultat important nu putea fi prezis pe baza argumentelor logice ce decurg din simetrie, așa cum am procedat în cazul celor două sarcini punctiforme, pentru a arăta că forța acționează pe direcția drepte ce le unește. *Forța cu care interacționează două sarcini nu variază în prezența unei a treia sarcini.*

Indiferent de numărul sarcinilor din sistem, legea lui Coulomb (ecuația 1) poate fi folosită în calculul interacțiunii fiecărei perechi. Această afirmație stă la baza *principiului superpoziției*, pe care îl vom întâlni deseori în studiul electromagnetismului. Înțelegem prin superpoziție, că două surse pot fi unite într-un singur sistem, prin așezarea celei de-a doua surse „pe” prima, fără a schimba prin aceasta configurația surselor. Acest principiu ne asigură că forța exercitată asupra unei sarcini, aflate într-un punct oarecare al sistemului, este suma vectorială a forțelor ce acționează asupra acestei sarcini, din partea fiecărei surse în parte. Acest principiu nu este general valabil.

Ar putea exista fenomene, în care să apară distanțe foarte mici sau forțe foarte mari, în care principiul superpoziției să nu fie valabil. Într-adevăr, se cunosc asemenea fenomene cuantice în câmp electromagnetic care, din punct de vedere al teoriei clasice, relevă insuficiența principiului superpoziției.

Prin urmare, o reprezentare completă asupra fizicii interacțiunilor electrice poate fi formată numai dacă numărul sarcinilor

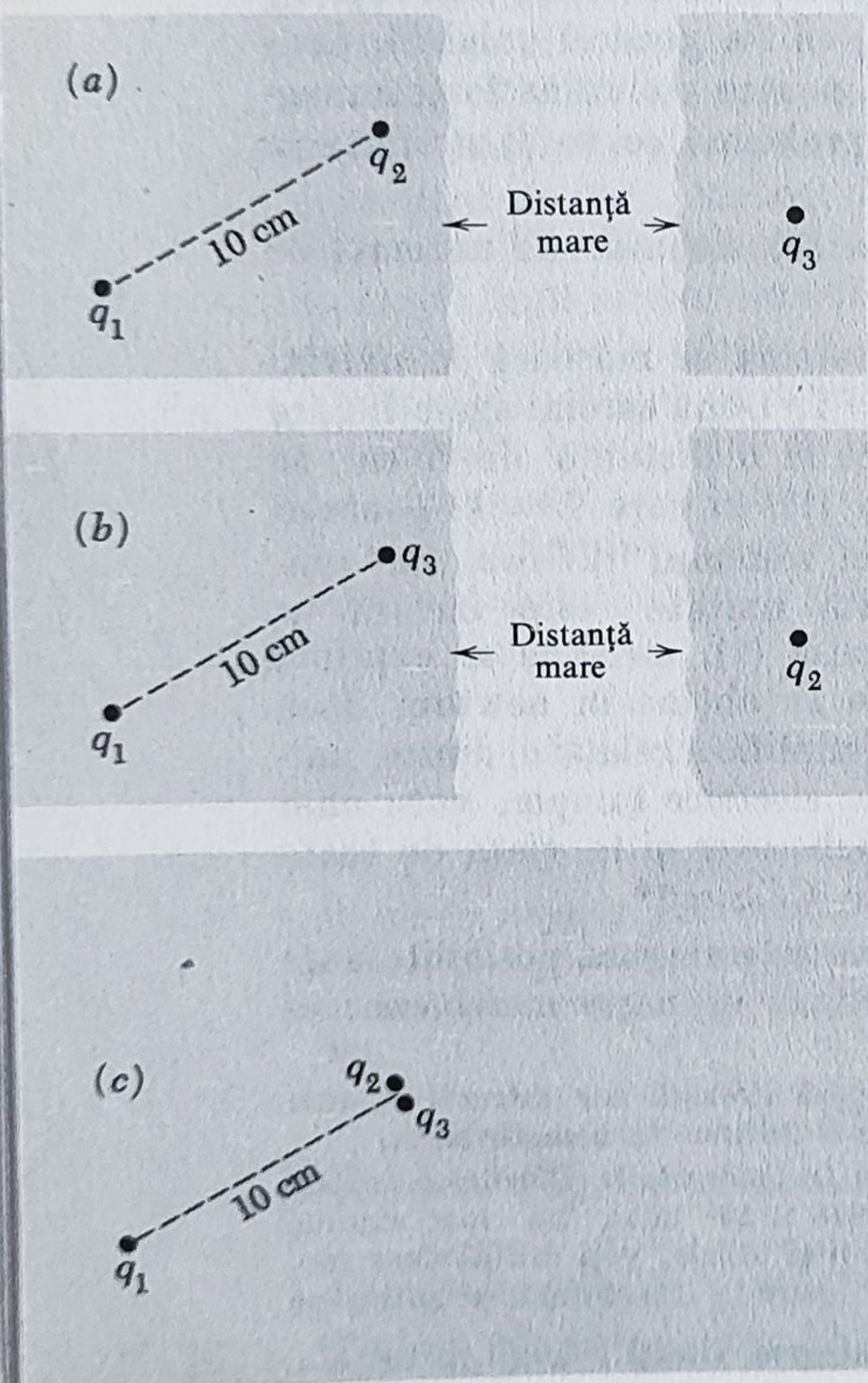


Fig. 1.2. Forța exercitată asupra lui  $q_1$  în (c) este egală cu suma forțelor exercitate asupra lui  $q_1$  în (a) și (b).



Fig. 1.3. Forța exercitată asupra unei sarcini rezultată din celelalte două sarcini, exprimată de relația 2.

este mai mare decât doi. Extinzând ecuația (1) la cazul a trei sarcini ce interacționează, dispuse ca în figura 1.2, forța exercitată asupra uneia din sarcini, de exemplu  $q_3$ , poate fi perfect determinată din ecuația:

$$\mathbf{F}_3 = \frac{q_3 q_1 \hat{r}_{31}}{4\pi\epsilon_0 r_{31}^2} + \frac{q_3 q_2 \hat{r}_{32}}{4\pi\epsilon_0 r_{32}^2} \quad (2)$$

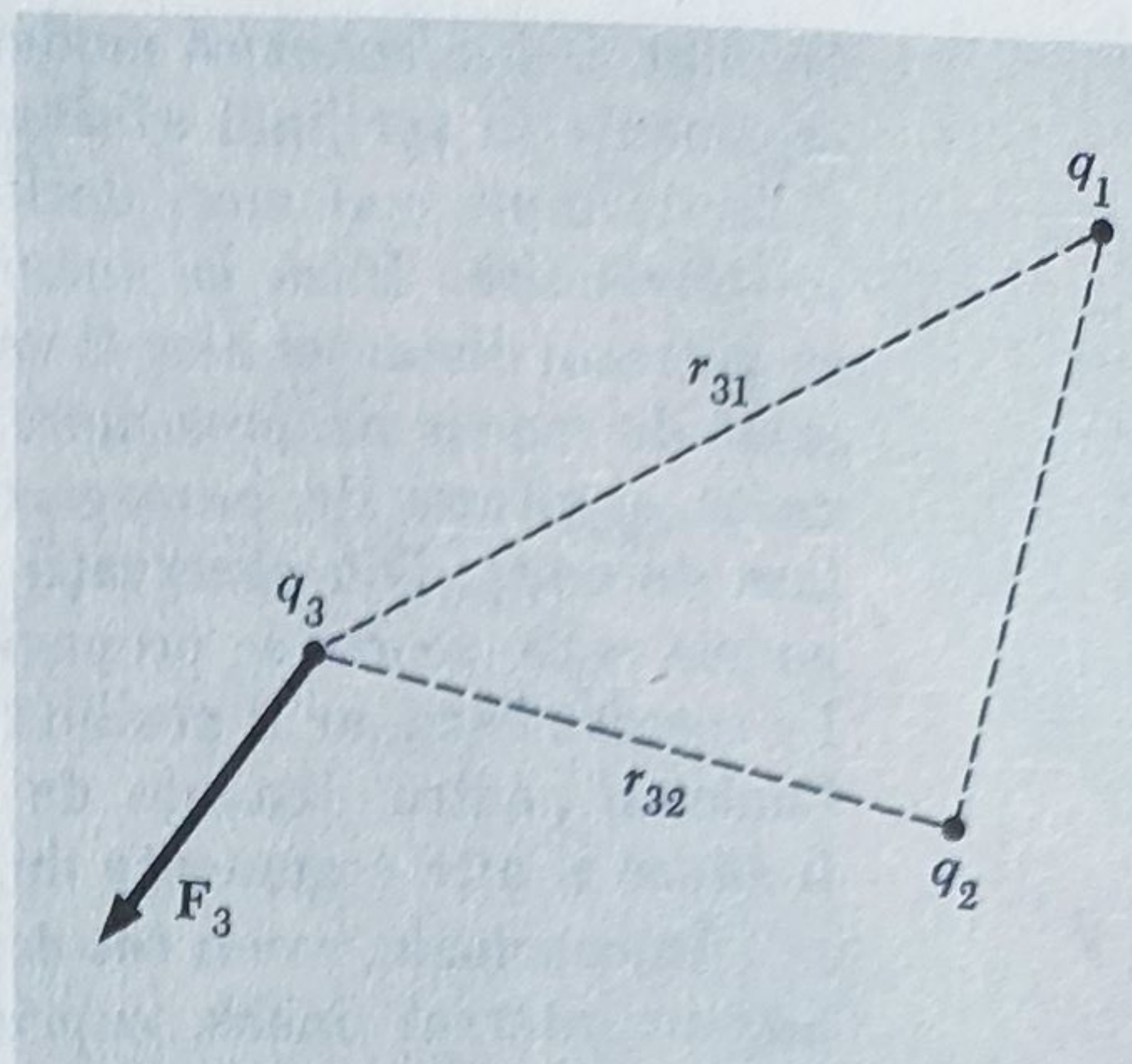
Ecuația (2) corespunde, de exemplu, situației reprezentate în figura 1.3.

În ceea ce privește verificarea experimentală a faptului că forța este invers proporțională cu pătratul distanței, pentru anumite valori ale distanței, poate fi considerată încheiată. În anul 1875, Coulomb a măsurat cu ajutorul unei balanțe de torsiune, forța dintre două sfere mici încărcate. Cu mulți ani înaintea lui Coulomb, Priestley a stabilit, prin analogie cu câmpul gravitațional, că absența influenței electrice în interiorul unei sfere goale încărcate este dovada proporționalității inverse a forței cu pătratul distanței. Henry Cavendish, genialul experimentator englez, a cărui activitate era aproape necunoscută contemporanilor săi, a verificat în 1772 legea invers proporționalității cu pătratul distanței cu o precizie de 2%. Cavendish a încărcat o suprafață sferică ce putea fi apoi separată în două emisfere. Absența sarcinii pe fața interioară a emisferelor era o dovadă a proporționalității inverse a forței cu pătratul distanței\*. Reluările moderne ale experienței lui Cavendish\*\* au confirmat această lege, pentru distanțe de ordinul centimetrilor sau zecilor de centimetri, cu o precizie de câteva unități ori  $10^{-9}$ .

Uneori, acest rezultat experimental este descris ca o metodă de determinare a „exponentului” din legea proporționalității forței cu pătratul distanței. Totuși, problema reală constă nu în a stabili dacă valoarea corectă a exponentului este 2 sau un alt număr, de exemplu — 1,99998, ci în a stabili pînă la ce valori ale distanței legea este valabilă. Există două domenii, puse astăzi în evidență prin experiențe directe, în care s-ar putea ca legea să nu fie valabilă. Primul, este domeniul distanțelor foarte mici — mai mici decât  $10^{-14}$  cm, unde, așa după cum am mai spus, nu sîntem siguri că teoria electromagnetică este întotdeauna valabilă. De asemenea, pentru distanțe foarte mari, cuprinse între cele geografice și cele astronomice, nu s-a verificat experimental legea lui Coulomb. Cu toate acestea, nu avem nici un motiv bine determinat pentru a pune la îndoială valabilitatea legii la distanțe mari.

\* După cum vom vedea în capitolul 3, câmpul este nul în interiorul oricărui strat conductor de formă sferică sau de altă formă. Cavendish, raționind ca și Priestley, prin analogie cu câmpul gravitațional, se pare că nu cunoștea această consecință mai generală a invers proporționalității forței cu pătratul distanței.

\*\* S. J. Plimpton și W. E. Lawton, Phys. Rev. 50, 1066/1936.





De fapt, teoria cuantică modernă a câmpului electromagnetic ne aduce câteva argumente în sprijinul afirmației că legea lui Coulomb este valabilă pentru distanțe mult mai mari decât cele folosite în experiențele reactualizate ale lui Cavendish. Dacă la distanțe mari, legea invers proporționalității forței cu pătratul distanței n-ar fi valabilă, cuanta de lumină sau fotonul, ar avea o masă de repaus nu prea mare, dar finită, ceea ce ar duce la o slabă dependență a vitezei de propagare a undelor electromagnetice în vid de lungimea de undă. Din observații directe\* se cunoaște cu o precizie de  $10^{-6}$ , că undele radio scurte se propagă în vid cu aceeași viteză ca undele luminoase. Pe această bază, ar fi posibilă argumentarea teoretică a valabilității legii lui Coulomb pentru distanțe de cel puțin câțiva kilometri. Probabil ar putea fi aduse și alte argumente de acest gen, mai riguroase.

În concluzie, avem tot dreptul să considerăm legea lui Coulomb valabilă într-un interval imens, cuprins între  $10^{-13}$  cm și pînă la câțiva kilometri, poate și mai mult și fundamentală în descrierea electromagnetismului.

### 1.5. ENERGIA UNUI SISTEM DE PURTĂTORI DE SARCINI

În principiu legea lui Coulomb este fundamentală în electrostatică. Fiind date sarcinile și coordonatele lor, putem determina toate forțele electrice. Dacă sarcinile se pot mișca liber, sub acțiunea altor forțe, putem găsi starea de echilibru în care distribuția de sarcini rămîne staționară. În același sens, legile de mișcare ale lui Newton sînt fundamentale în mecanică. Dar și în mecanică și în electromagnetism, posibilitatea de pătrundere în esența fenomenelor crește, prin introducerea altor noțiuni, din care cea mai importantă este energia.

În electrostatică, conceptul de energie este foarte util întrucît forțele electrice sînt *conservative*. Să studiem, pentru început, lucrul mecanic ce trebuie efectuat *asupra* sistemului, pentru a distribui într-un anume fel câteva corpuri încărcate. Să începem cu două corpuri sau particule încărcate, aflate la distanță foarte mare una de alta, ca în figura 1.4, *a*, și care poartă sarcinile  $q_1$  și  $q_2$ . Nu ne interesează energia necesară pentru a obține aceste două concentrații inițiale de sarcină. Vom apropia încet particulele una de alta, pînă cînd distanța dintre ele devine egală cu  $r_{21}$ . Ce lucru mecanic s-a efectuat? N-are importanță pe ce drum apropiem sarcina  $q_1$  de  $q_2$ . Indiferent de drum, lucrul mecanic efectuat este egal cu integrala produsului dintre forță și deplasarea pe direcția forței. Forța, ce trebuie aplicată pentru a deplasa una din sarcini spre cealaltă, este egală cu forța lui Coulomb și de sens opus ei

$$W = \int \text{forță} \times \text{deplasare} = \int_{r=\infty}^{r_{21}} \frac{q_1 q_2 (-dr)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}}. \quad (3)$$

\* Evident, în acest sens, este faptul că nu de mult, s-a observat ajungerea practic simultană pe Pămînt (la interval de cel mult cîteva minute), a radiațiilor radio și luminoase, provenite din erupția unei „stele luminoase“, aflate la o distanță de 20 de ani lumină (B. Lovell, F. L. Whipple și L. H. Solomon, Nature 202, 377 (1964).



Fig. 1.4. Trei sarcini sînt aduse una lîngă alta. Întîi se apropie  $q_2$ , apoi  $q_1$  și  $q_2$  fiind fixate se apropie  $q_3$ .

Deoarece  $r$  variază de la  $\infty$  la  $r_{12}$ , deplasarea elementară este  $-dr$ . Evident, lucrul mecanic efectuat asupra sistemului, pentru sarcini de același semn, va fi pozitiv, întrucît ele se resping. Dacă  $q_1$  și  $q_2$  se exprimă în coulombi și  $r_{12}$  în metri, conform ecuației (3), lucrul mecanic se exprimă în jouli.

De la studiul *forțelor conservative* (vol. I, pag. 173) știm că acest lucru mecanic este întotdeauna același, indiferent de forma traiectoriei pe care se face deplasarea. Să vedem cum se aplică acest lucru în cazul a două sarcini  $q_1$  și  $q_2$  (fig. 1.5). Fixăm pe  $q_1$ , iar  $q_2$  poate fi deplasat, pe două traiectorii diferite, în aceeași poziție finală. Orice strat sferic, cuprins între  $r$  și  $r+dr$ , va fi intersectat de ambele traiectorii. Lucrul mecanic elementar, pe această porțiune, este același pentru ambele traiectorii și este egal cu  $-\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ . Acest lucru se explică prin faptul că  $\mathbf{F}$  are aceeași valoare în ambele puncte și este orientat pe direcția razei, de la  $q_1$  la suprafață, în timp ce  $ds = dr/\cos \theta$ . Prin urmare,  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F dr$ . Oricărui lucru mecanic elementar de pe o traiectorie îi corespunde un lucru mecanic elementar pe cealaltă traiectorie, astfel încît suma lucrurilor mecanice elementare de pe cele două traiectorii trebuie să fie egale. Concluziile noastre sînt valabile chiar și pentru traiectorii neregulate ca aceea reprezentată în figura 1.5. (De ce?)

Să ne întoarcem, acum, la cele două sarcini din figura 1.4, *b* și să aducem, dintr-un loc îndepărtat pînă în punctul  $P_3$  — aflat la distanța  $r_{31}$  de sarcina  $q_1$  și la distanța  $r_{32}$  de sarcina  $q_2$  — sarcina  $q_3$ . Lucrul mecanic efectuat va fi:

$$W_3 = - \int_{\infty}^{P_3} \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s}. \quad (4)$$

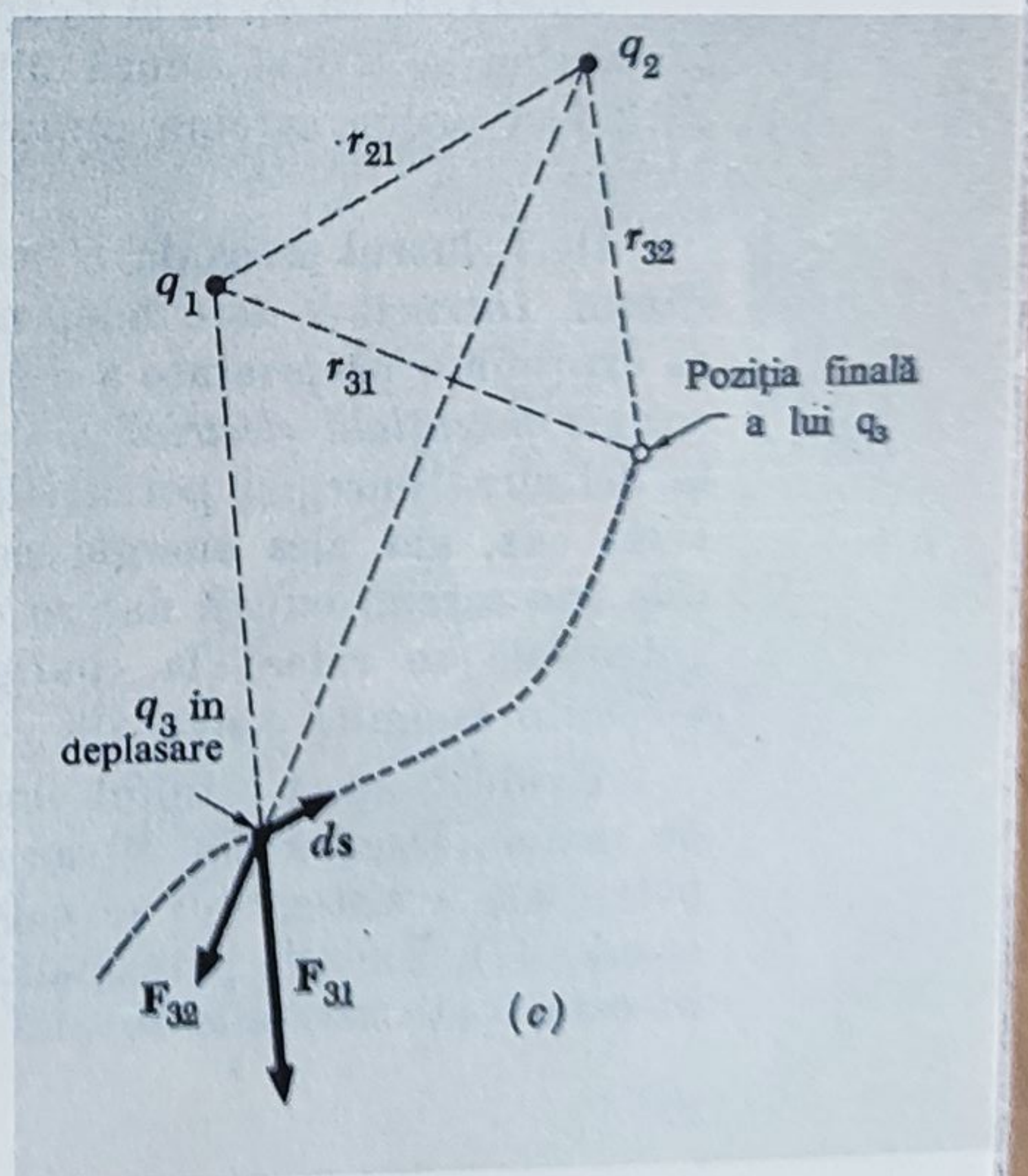
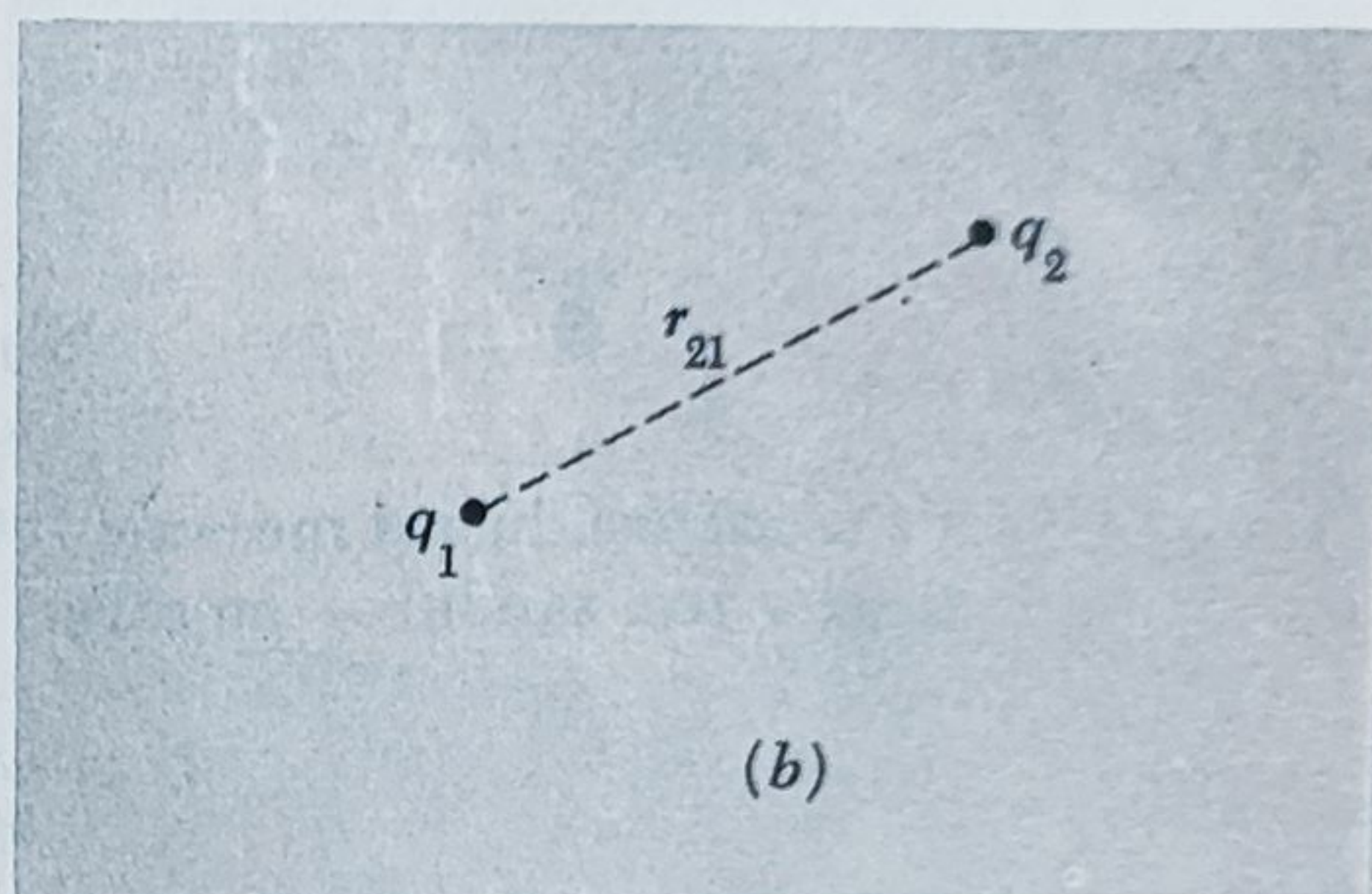
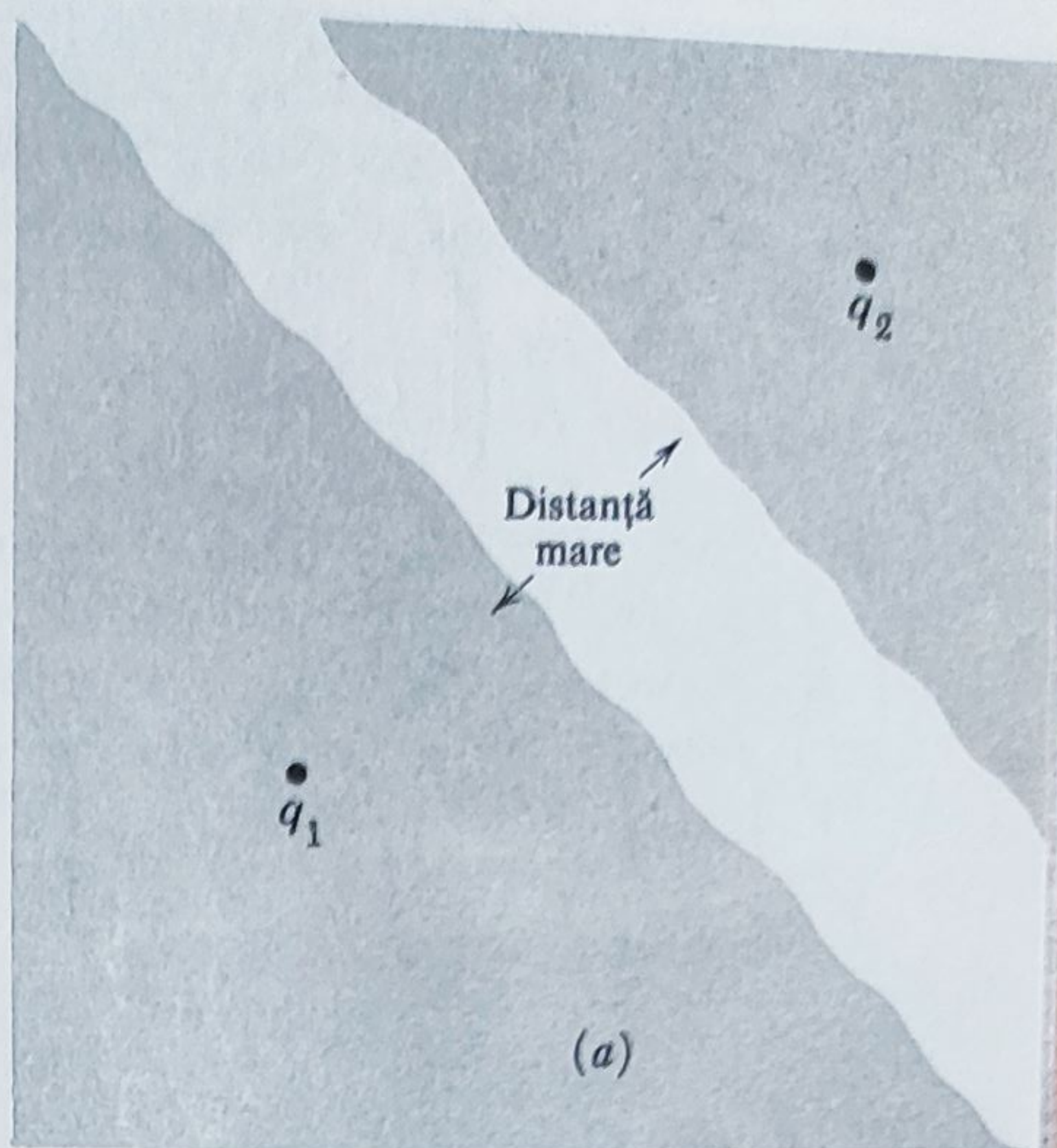




Fig. 1.5. Deoarece forța este centrală, pe porțiunile diferitelor traiectorii, cuprinse între  $r + dr$  și  $r$ , se efectuează același lucru mecanic.

Pe baza aditivității interacțiunilor electrice, pe care am menționat-o mai înainte

$$\begin{aligned} -\int \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s} &= -\int (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}) \cdot d\mathbf{s} = \\ &= -\int \mathbf{F}_{31} \cdot d\mathbf{s} - \int \mathbf{F}_{32} \cdot d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (5)$$

Asta înseamnă că lucrul mecanic efectuat pentru a aduce pe  $q_3$  în punctul  $P_3$  este suma lucrului mecanic, necesar pentru a aduce pe  $q_3$  în  $P_3$ , dacă ar exista doar sarcina  $q_1$  și a lucrului mecanic necesar pentru a aduce pe  $q_3$  în  $P_3$ , dacă ar exista doar sarcina  $q_2$ .

$$W_3 = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{32}}. \quad (6)$$

Prin urmare, lucrul mecanic total efectuat pentru a obține această dispunere a celor trei sarcini — pe care-l vom nota cu  $U$  — este egal cu:

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}. \quad (7)$$

Observăm că  $q_1$ ,  $q_2$  și  $q_3$  apar simetric în ecuația (7), indiferent de faptul că sarcina  $q_3$  a fost adusă ulterior. Am fi obținut același rezultat dacă  $q_3$  ar fi fost prima sarcină prezentă în sistem. (Încercați să demonstrați acest lucru.)

Deci, lucrul mecanic  $U$  nu depinde de ordinea introducerii sarcinilor în sistem. Întrucât  $U$  este independent și de drumul parcurs de sarcini, înseamnă că exprimă o proprietate a dispoziției finale a sarcinilor. Ea poate fi numită *energie potențială electrică* a sistemului de sarcini studiat. Ca întotdeauna, în definirea energiei potențiale, trebuie să avem un nivel de referință. În acest caz, am ales energia potențială zero, corespunzătoare situației când cele trei sarcini există dar se află depărtate una de alta la infinit. Energia potențială se referă la configurație în *totalitatea ei*. A atribui uneia din sarcini o anumită parte din ea, nu are sens.

Evident, acest rezultat simplu poate fi generalizat la un număr oarecare de sarcini. Dacă avem  $N$  sarcini diferite, dispuse oricum în spațiu, energia potențială a sistemului se calculează însumând după toate perechile, ca în ecuația (7). Energia potențială zero, ca și în primul caz, corespunde situației în care toate sarcinile se află la distanțe mari una de alta.



Ca exemplu, să calculăm energia potențială a sistemului format din opt sarcini negative, dispuse în colțurile unui cub cu latura  $b$  și o sarcină pozitivă aflată în centrul cubului (fig. 1.6, a). Presupunem că fiecare sarcină negativă este un electron de sarcină  $-e$ , iar particula centrală poartă o sarcină pozitivă dublă  $2e$ . Însumind pentru toate perechile, obținem:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{8(-2e^2)}{(\sqrt{3}/2)b} + \frac{12e^2}{b} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}b} + \frac{4e^2}{\sqrt{3}b} \right] = \frac{4,32e^2}{4\pi\epsilon_0 b}. \quad (8)$$

În figura 1.6, b se indică cum apare fiecare termen al acestei sume. Energia este pozitivă, indicând faptul că lucrul mecanic a fost efectuat pentru a întruni aceste sarcini într-un sistem. Desigur, același lucru mecanic se regăsește dacă îndepărtăm sarcinile una de alta, destrămând sistemul, prin acțiunea unor forțe asupra unui corp (sau corpuri) exterioare.

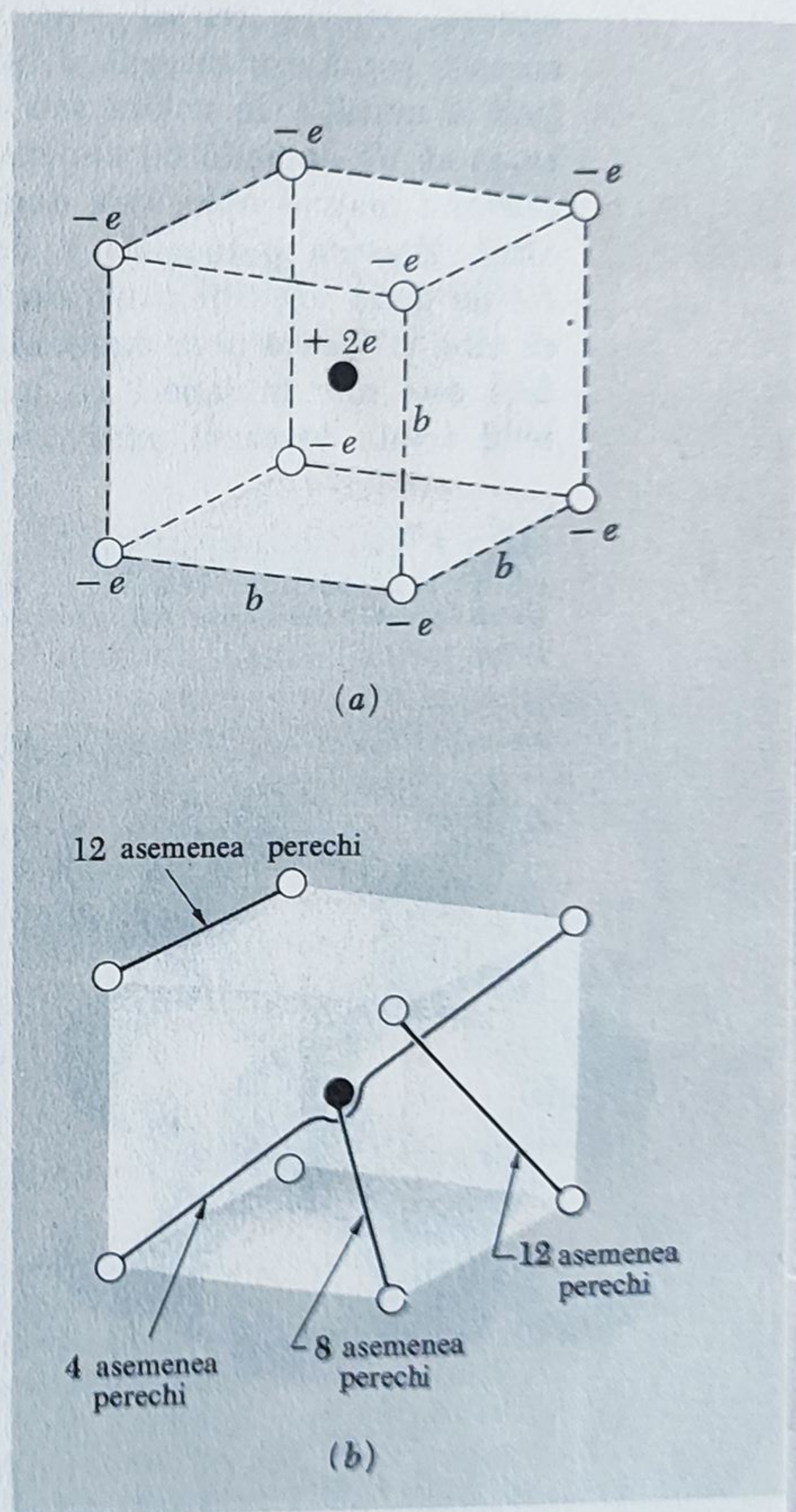
Dacă electronii ar putea, pur și simplu pleca din această configurație la infinit *energia cinetică totală* a tuturor particulelor ar fi egală cu  $U$ . Acest lucru este valabil și în cazul în care particulele se îndepărtează simultan și simetric, și în cazul în care părăsesc sistemul separat, una după alta. Aici ni se relevă conținutul noțiunii simple de energie potențială totală a sistemului. Închipuiți-vă, cât de dificil ar fi calculul forței rezultante care acționează asupra fiecărei particule, în fiecare stadiu de formare a configurației. În exemplul nostru, desigur, simetria geometrică ar simplifica mult problema și totuși ea ar fi mult mai complicată decât calculul simplu făcut mai înainte.

Însumarea pe perechi mai poate fi scrisă sub forma:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j}^N \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}}. \quad (9)$$

Semnul însumării duble  $\sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j}^N$ , înseamnă că: se ia  $j = 1$  și se însumează după  $k = 2, 3, 4, \dots, N$ ; apoi se ia  $j = 2$  și se însumează după  $k = 1, 3, 4, \dots, N$ ; ș.a.m.d. până la  $j = N$ . Evident, în felul acesta fiecare pereche apare în sumă de două ori, de aceea în fața sumei stă factorul  $\frac{1}{2}$ .

Fig. 1.6. (a) Energia potențială a unei asemenea distribuții de nouă sarcini punctiforme este dată de ecuația (8). (b) În sumă intră patru tipuri de perechi.



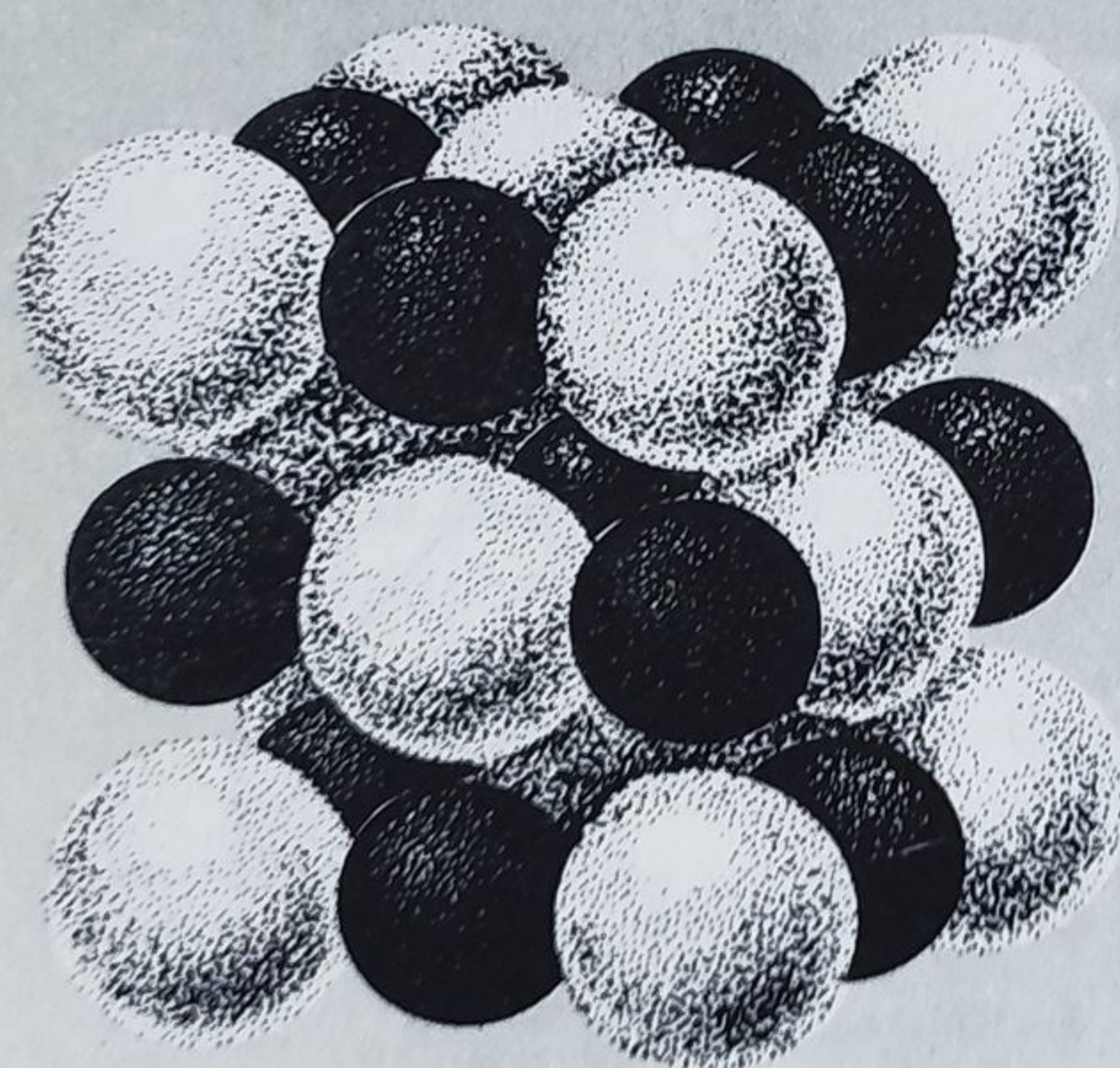


## 1.6. ENERGIA ELECTRICĂ A UNEI REȚELE CRISTALINE

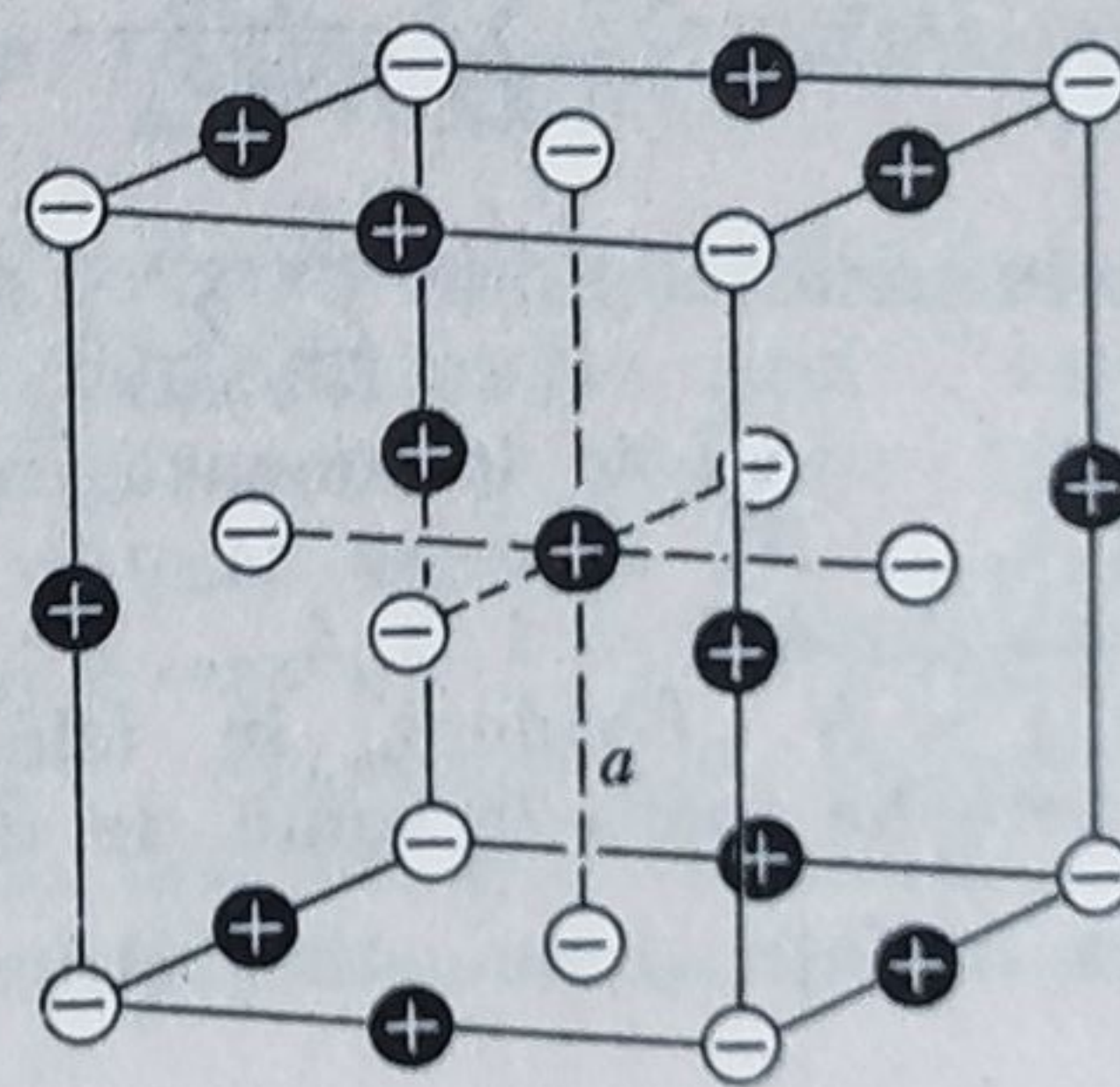
Conceptele introduse au o largă aplicație în fizica cristalelor. Știm că un cristal ionic, ca de exemplu cristalul de clorură de sodiu, poate fi descris, cu o bună aproximație, ca o rețea tridimensională regulată în care alternează ionii pozitivi de  $\text{Na}^+$  și ionii negativi de  $\text{Cl}^-$ . Distribuția ionilor, în cristalul de clorură de sodiu, este reprezentată în figura 1.7, *a*. Desigur, ionii nu sînt sarcini punctiforme, dar ei reprezintă o distribuție de sarcină aproximativ sferică și prin urmare (așa cum vom dovedi), forțele electrice exercitate între ei sînt aceleași ca în cazul în care fiecare ion s-ar înlocui cu o sarcină punctiformă echivalentă așezată în centrul său. Acest sistem electric echivalent este reprezentat în figura 1.7, *b*. Energia potențială electrostatică a rețelei de sarcini joacă un rol important în explicarea stabilității și coeziunii cristalului ionic. Să vedem dacă o putem calcula.

Se pare că avem de-a face cu o sumă colosală, aproape dublu infinită, întrucît oricare cristal macroscopic conține cel puțin  $10^{20}$  atomi. Va fi această sumă convergentă? Sperăm să putem găsi măcar energia potențială a unității de volum sau a unității de masă a cristalului. Ne așteptăm ca ea să nu depindă de dimensiunile cristalului, ținînd cont de faptul că, în cristalul macroscopic, cele două capete se vor influența prea puțin unul pe altul. Energia potențială a două grame de clorură de sodiu ar trebui să fie de două ori mai mare decît cea pentru un gram, iar forma n-ar trebui să aibă influență prea mare, atîta timp cît numărul atomilor aflați pe suprafață este mic în raport cu numărul total de atomi. Am greși raționînd în felul acesta în cazul unui cristal format doar din ioni de același semn. În

Fig. 1.7. Este reprezentată o porțiune din cristalul de clorură de sodiu cu respectarea aproximativă a proporțiilor relative ale ionilor de  $\text{Na}^+$  și  $\text{Cl}^-$  (*a*), și înlocuirea lor prin sarcini punctiforme echivalente (*b*).



(a)



(b)



acest caz, un gram de cristal ar avea o sarcină electrică enormă și pentru a uni două asemenea cristale, într-un cristal de două grame, ar fi necesară o cantitate fantastică de energie. (O puteți calcula!) Această situație este salvată de faptul că în structura cristalului sarcinile egale și de semn opus alternează, astfel încît orice porțiune dintr-un cristal microscopic este, practic, neutră.

Pentru a evalua energia potențială, observăm că pozițiile ocupate de fiecare ion pozitiv sînt echivalente. De asemenea, pe baza figurii 1.7, putem conchide că distribuția ionilor pozitivi în jurul unui ion negativ este exact aceeași ca și distribuția ionilor negativi în jurul unui ion pozitiv ș.a.m.d. Prin urmare, putem lua ca central un ion, indiferent de ce fel, să însumăm asupra tuturor interacțiunilor cu ionii înconjurători și să multiplicăm cu numărul total de ioni de ambele semne. În acest fel suma dublă din ecuația (9), se reduce la o singură sumă și un factor  $N$ , coeficientul  $\frac{1}{2}$  este introdus, ținînd seama de faptul că fiecare pereche a fost luată de două ori. Astfel, energia rețelei de clorură de sodiu, formată din  $N$  ioni, este

$$U = \frac{1}{2} N \sum_{k=2}^N \frac{q_1 q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{1k}}. \quad (10)$$

Alegînd ionul pozitiv în centru, ca în figura 1.7,  $b$ , suma cuprinde toți vecinii, apropiați și depărtați. Expresia explicită a sumei este următoarea:

$$U = \frac{1}{2} \frac{N}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}a} + \dots \right]. \quad (11)$$

Primul termen apare datorită celor șase ioni de clor din apropiere, aflați la distanța  $a$ , al doilea de la cei 12 ioni de sodiu, aflați în colțurile cubului ș.a.m.d. Este evident că acest șir nu este absolut convergent. Dacă am fi făcut greșeala să însumăm întii toți termenii pozitivi, atunci suma ar fi fost divergentă. Pentru a calcula o asemenea sumă, o vom extinde la ionii din ce în ce mai îndepărtați, incluzîndu-i în grupe care să reprezinte celule aproape neutre de substanță. Apoi, dacă se fragmentează suma, întrucît ionii mai îndepărtați formează un amestec egal de sarcini pozitive și negative, putem fi siguri că contribuția lor este neglijabilă. Aceasta este o descriere grosolană a unei probleme delicate, pentru care astăzi se folosesc, în evaluările numerice, calculatoarele electronice. În exemplul tratat rezultatul este:

$$U = - \frac{7,8642 \cdot 10^9 Ne^2}{a} \text{ J} \quad (12)$$

unde  $N$  — este numărul ionilor, de două ori mai mare decît numărul moleculelor de  $\text{NaCl}$ .

Semnul minus exprimă rolul dominant al vecinilor mai apropiați și arată că pentru a deeface cristalul în ioni este necesară efectuarea unui lucru mecanic. Cu alte cuvinte, energia electrică ajută la explicarea coeziunii cristalului. Totuși, ea nu este singura explicație, întrucît energia potențială a distribuției de sarcini scade prin micșorarea distanțelor  $a$  și cristalul s-ar destrăma. Întîlnim din nou cunoscuta dilemă a fizicii clasice, adică necuantice. Conform legilor fizicii clasice, nici un sistem nu poate fi în echilibru stabil dacă se află numai sub acțiunea forțelor electrice. Anulează oare aceasta analiza



noastră? Nicidecum. Este remarcabil și îmbucurător faptul că, în fizica cuantică a cristalelor, noțiunea de energie potențială își păstrează sensul și ea poate fi calculată prin metoda prezentată aici.

## 1.7. CÎMPUL ELECTRIC

Să presupunem că avem o distribuție oarecare de sarcini  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , fixate în spațiu și că nu ne interesează forțele pe care le exercită una asupra celeilalte, ci numai efectul lor asupra unei alte sarcini oarecare  $q_0$ , care poate fi adusă în vecinătatea lor. Știm cum se calculează forța rezultantă ce acționează asupra acestei sarcini, dacă sînt date coordonatele ei  $x, y, z$ . Forța exercitată asupra sarcinii  $q_0$  este:

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=1}^N \frac{q_0 q_j \hat{\mathbf{r}}_{0j}}{4\pi\epsilon_0 r_{0j}^2} \quad (13)$$

unde  $r_{0j}$  este distanța de la sarcina  $j$  pînă la punctul  $(x, y, z)$ . Forța este proporțională cu  $q_0$ , astfel încît dacă eliminăm pe  $q_0$ , obținem o mărime vectorială care depinde numai de structura inițială a sistemului de sarcini  $q_1, q_2, \dots, q_N$  și de poziția punctului  $(x, y, z)$ . Numim această funcție vectorială de  $x, y, z$  — *cîmpul electric* produs de sarcinile  $q_1, q_2, \dots, q_N$  — și o notăm cu  $\mathbf{E}$ . Sarcinile  $q_1, q_2, \dots, q_N$  le numim *sursele cîmpului*. Putem defini cîmpul electric  $\mathbf{E}$  al distribuției de sarcini, în punctul  $(x, y, z)$

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j \hat{\mathbf{r}}_{0j}}{4\pi\epsilon_0 r_{0j}^2} \quad (14)$$

În figura 1.8 este reprezentată compunerea vectorială a cîmpului produs de sarcina punctiformă egală cu  $+\frac{2}{3} \cdot 10^{-9}$  (unități SI de sarcină electrică) cu cîmpul produs de sarcina punctiformă  $-\frac{1}{3} \cdot 10^{-9}$ , într-un anumit punct din spațiu. În S.I. intensitatea cîmpului electric se exprimă în newton pe coulomb, N/C.

Pînă acum n-am aflat nimic nou, cîmpul electric reprezintă doar o altă posibilitate de descriere a sistemului de sarcini; el determină mărimea și direcția forței ce acționează asupra unității de sarcină studiate  $q_0$ , aflată într-un punct oarecare. Trebuie să fim atenți la această interpretare. Dacă

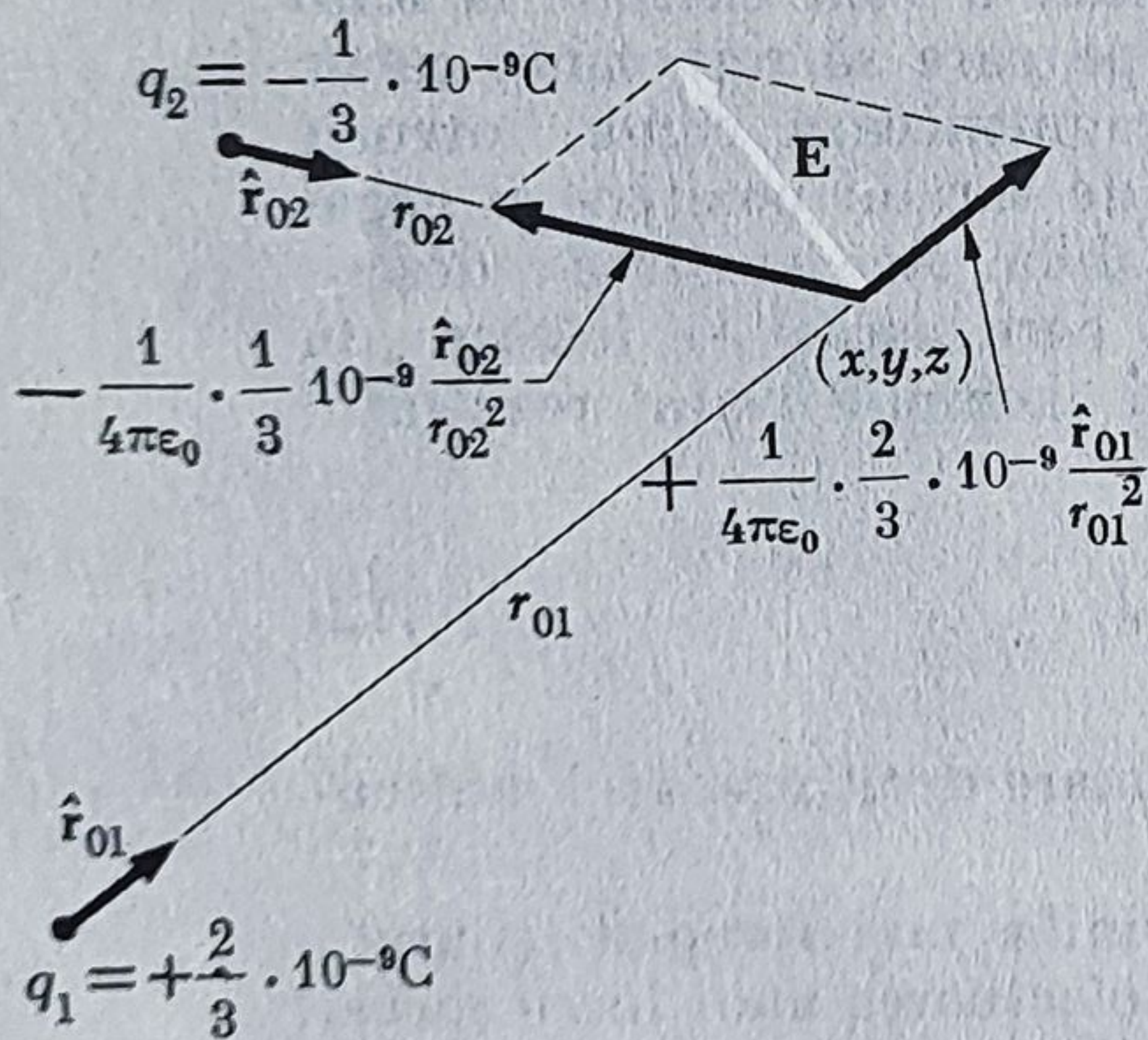


Fig. 1.8. Intensitatea cîmpului într-un punct dat este suma vectorială a intensității cîmpurilor datorate fiecărei sarcini din sistem.



sarcinile sînt fixe, introducerea unei sarcini finite  $q_0$ , poate determina schimbarea poziției sarcinilor sursă, astfel încît însuși cîmpul, definit prin ecuația (14), să difere. De aceea pornim raționamentele noastre, de la sarcini fixe. Uneori, se definește cîmpul, pornind de la condiția ca sarcina  $q_0$  să fie „infini mică” și atunci cîmpul  $E$  se determină ca limita raportului  $\frac{F}{q_0}$

cînd  $q_0 \rightarrow 0$ . Rigurozitatea unei asemenea determinări este aparentă. Să nu uităm că, în realitate, n-am întîlnit niciodată o sarcină mai mică decît ea! Dacă luăm ecuația (14) ca definiție a lui  $E$ , fără referiri la sarcina de probă, nu apare nici o problemă și nu e necesar ca sursele să fie fixe. Dacă introducerea unei noi sarcini determină deplasarea sarcinilor sursă, atunci, într-adevăr, are loc și schimbarea cîmpului electric și pentru a stabili forța ce acționează asupra noii sarcini, trebuie să considerăm în calcul noul cîmp electric.

Vă puteți, totuși, întreba ce este un cîmp electric? Este ceva real sau doar o denumire pentru un coeficient într-o ecuație, care trebuie înmulțit cu ceva pentru a da valoarea numerică a forței pe care o măsurăm experimental? Pentru a răspunde, trebuie să avem în vedere două chestiuni. În primul rînd, atîta timp cît formula e valabilă, nu există nici o diferență. Acest răspuns este cît se poate de serios.

În al doilea rînd, faptul că cunoașterea vectorului cîmp electric într-un punct din spațiu este suficientă pentru a determina forța ce acționează asupra unei sarcini oarecare, aflate în acel punct, nu este deloc banal. Ar fi putut fi altfel! Dacă n-ar fi existat experiențele, ne-am putea imagina că asupra a două sarcini unitate, aflate în puncte diferite, acționează forțe egale, iar sarcinile de probă de două ori mai mari, ar fi supuse unor forțe diferite, depinzînd de natura altor sarcini din sistem. În această situație, descrierea forțelor cu ajutorul cîmpului electric nu este valabilă.

Cîmpul electric conferă fiecărui punct al sistemului o *proprietate locală*, avînd următorul sens: dacă cunoaștem valoarea lui  $E$  într-o regiune a spațiului, știm, fără a mai face alte cercetări, ce se va întîmpla cu oricare din sarcinile aflate în această regiune. Nu e nevoie să știm cum s-a format cîmpul. Dacă cunoaștem cîmpul electric în toate punctele spațiului, avem o descriere completă a întregului sistem care ne ajută să găsim pozițiile și mărimile tuturor sarcinilor.

Pentru reprezentarea unui cîmp electric trebuie să asociem, fiecărui punct din spațiu, un vector care determină mărimea și direcția cîmpului. În carte vom folosi diferite reprezentări ale cîmpului de vectori, dar nici una din ele nu este complet satisfăcătoare.

Este greu de reprezentat, în spațiul cu două dimensiuni, o funcție vectorială definită în spațiul tridimensional. Putem indica mărimea și direcția lui  $E$ , în diferite puncte, prin săgeți trasate în apropierea acestor puncte, făcînd săgețile mai lungi acolo unde  $E$  este mai mare\*. Folosind această reprezentare, în figura 1.9, *a* este desenat cîmpul unei sarcini punctiforme izolate, egală cu  $+3$  unități arbitrare și în figura 1.9, *b* — cîmpul unei sarcini de  $-1$  unități. Aceste reprezentări nu ne ajută cu nimic în înțelegerea noțiunii de cîmp al unei sarcini izolate; fiecare își poate imagina un cîmp radial de forțe care variază invers proporțional cu pătratul distanței și fără desen.

\* O asemenea reprezentare este greoaie. Este greu de indicat punctul din spațiu în care se aplică valoarea vectorului dat și de obicei domeniul valorilor lui  $E$  este atît de mare, încît nu se pot desena săgețile proporționale cu  $E$ .



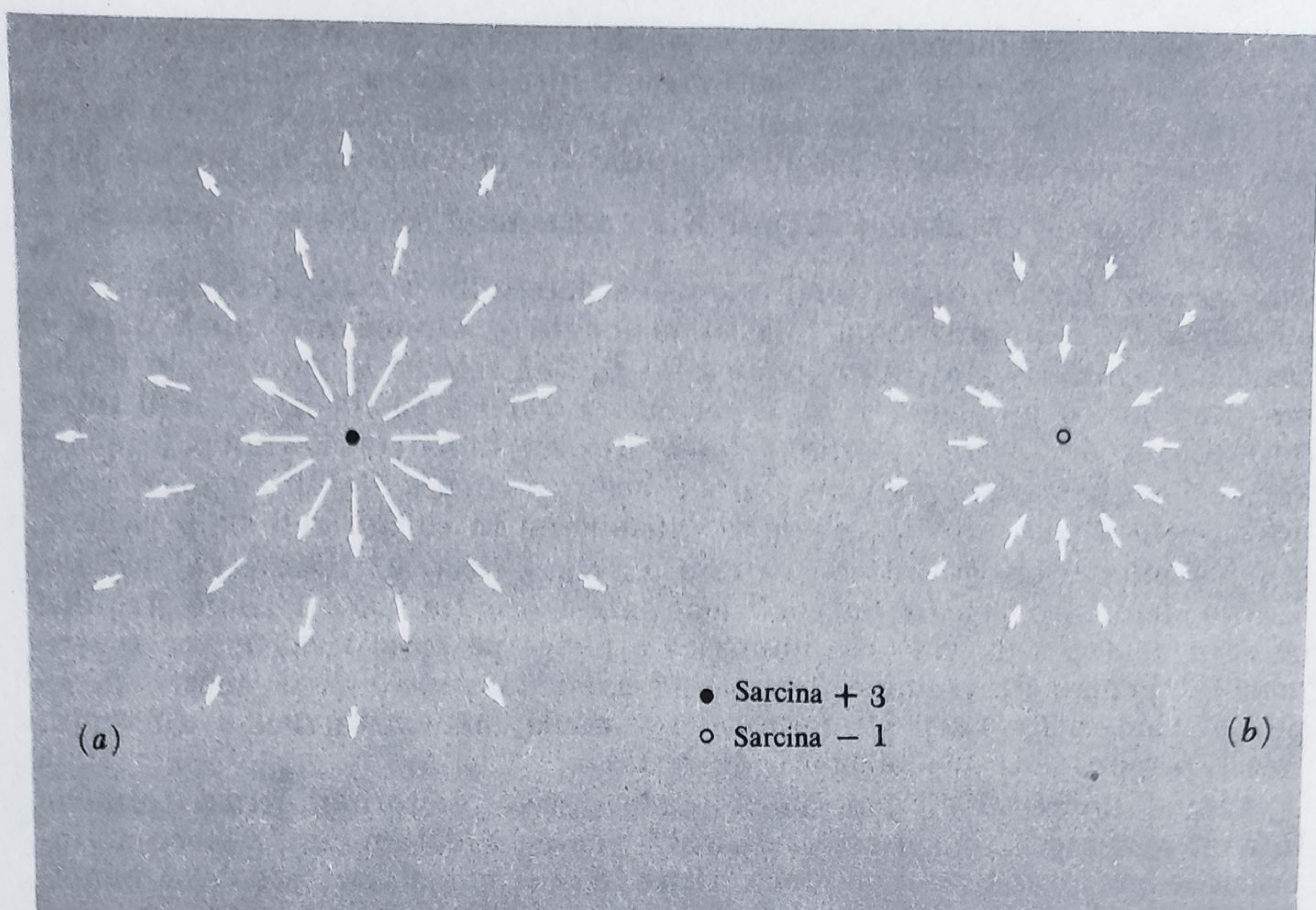


Fig. 1.9. (a) câmpul sarcinii  $q_1 = +3$ , (b) câmpul sarcinii  $q_2 = -1$ . Ambele desene sînt aproximative avînd doar valoare ilustrativă.

Folosim această reprezentare pentru a putea combina câmpul a două sarcini diferite, separate prin distanța  $a$ , ca în figura 1.10. În figura 1.10 poate fi reprezentat câmpul ce conține sarcinile, doar în plan. Pentru a obține reprezentarea în spațiul tridimensional trebuie rotit desenul în jurul axei de simetrie. Pe figura 1.10 există un punct în care  $E$  este zero. La ce distanță, față de cea mai apropiată sarcină, se află acesta? Să observăm, de asemenea, că la marginea figurii câmpul este îndreptat mai mult în afară. Se vede că la distanță mare, față de sarcini, el se aseamănă foarte mult cu câmpul unei sarcini punctiforme pozitive. Trebuia să ne așteptăm la asta întrucît îndepărtarea sarcinilor nu are prea mare influență în cazul punctelor aflate la distanțe mari și dacă unim cele două surse, obținem o sarcină punctiformă egală cu  $+2$  unități.

Un alt mod de reprezentare a vectorului câmp se face cu ajutorul *liniilor de câmp*. Acestea sînt simple curbe a căror tangente, în orice punct, coincid cu direcția câmpului în acel punct. Aceste curbe sînt netede și continue cu excepția unor singularități asemenea sarcinilor punctiforme sau ca punctul din figura 1.10 în care câmpul este nul. După liniile de câmp nu se poate determina direct mărimea câmpului, deși, așa cum vom vedea, liniile de câmp converg pe măsura apropierii de regiunea unde câmpul este intens și diverg în regiunea unde câmpul este slab. În figura 1.11 sînt trasate cîteva linii de câmp pentru aceeași distribuție de sarcini, ca în figura 1.10, o sarcină pozitivă de 3 unități și o sarcină negativă egală cu o unitate. Din nou, din cauza condițiilor grafice, ne limităm doar la o reprezentare în plan.



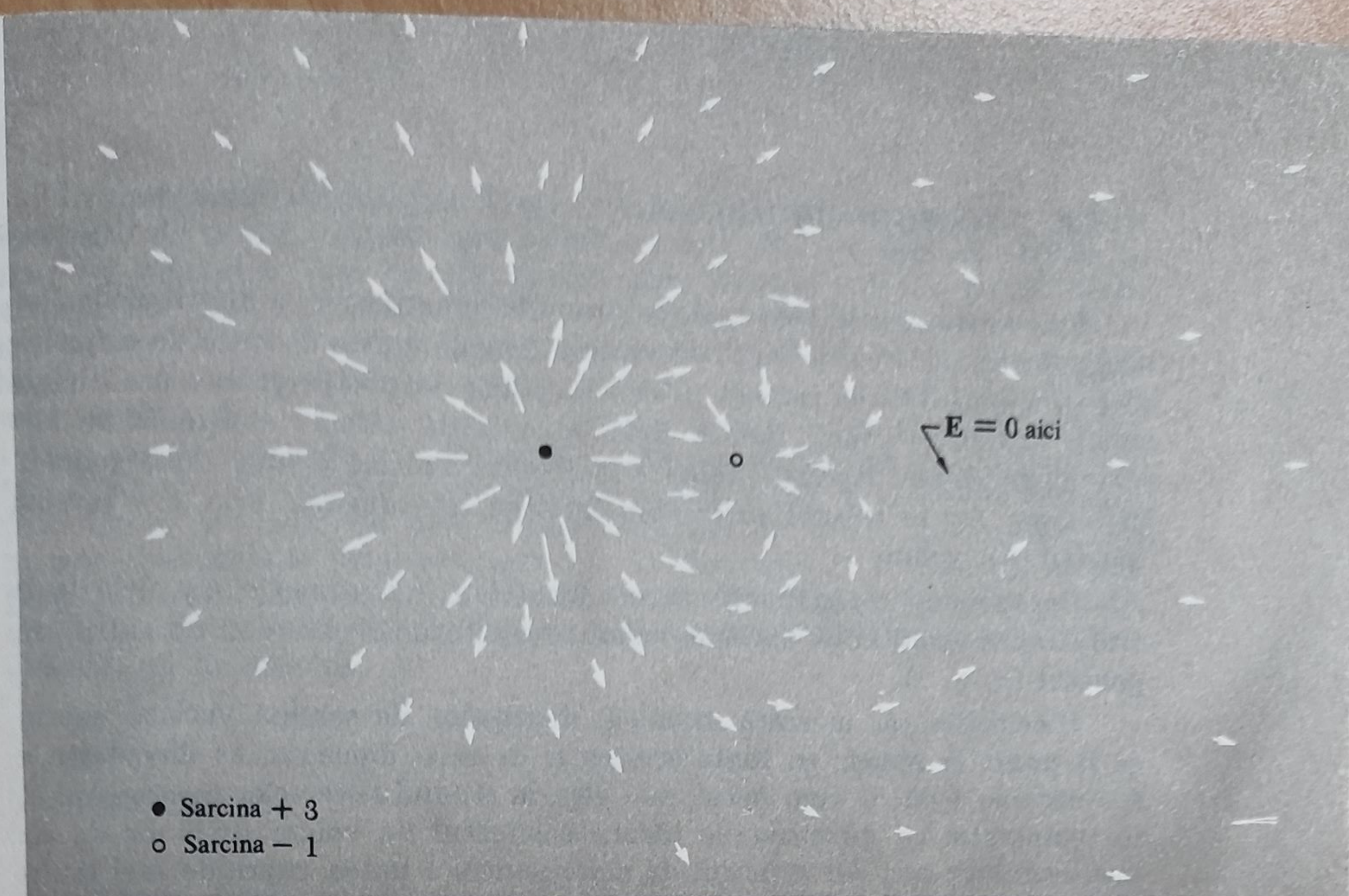
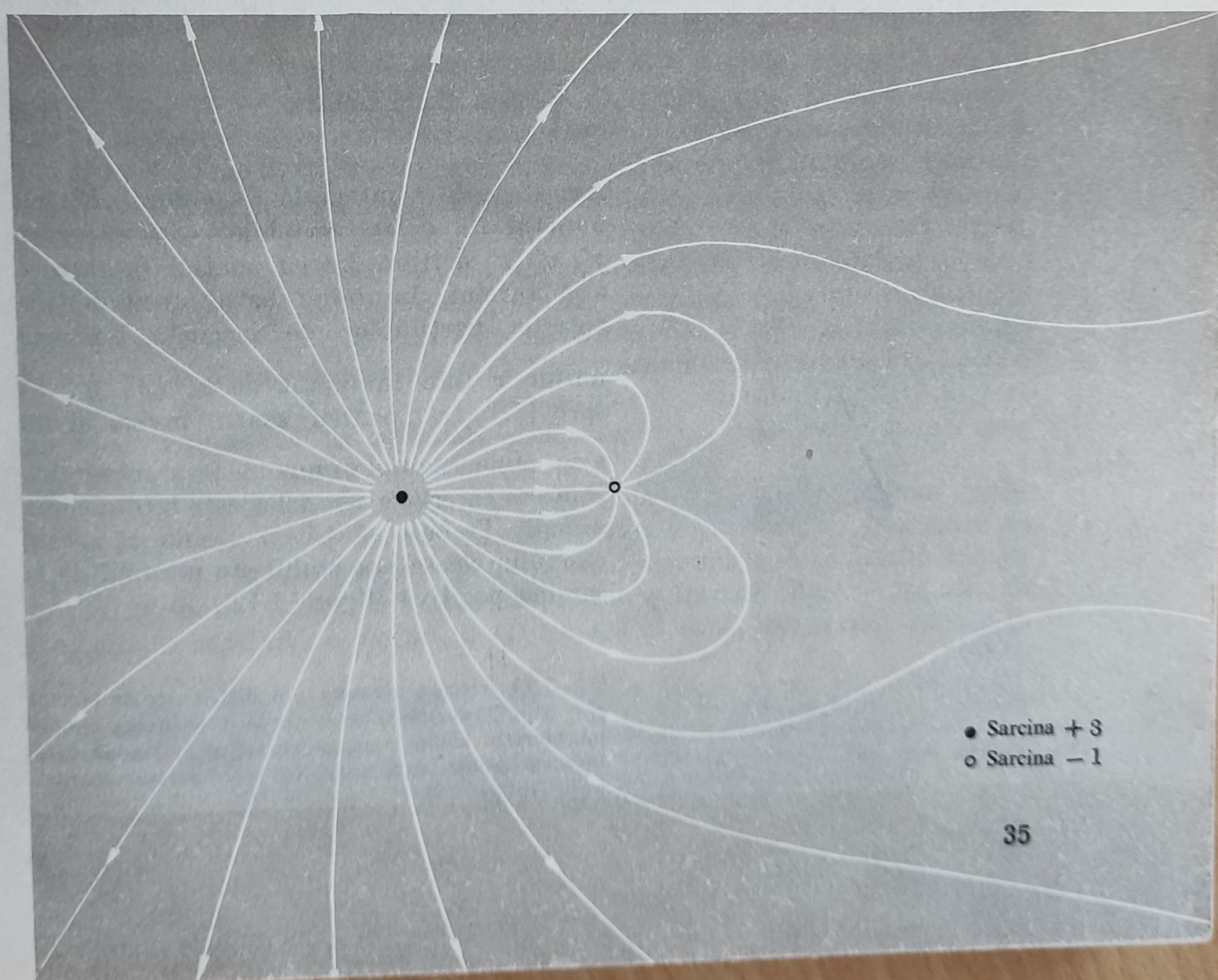


Fig. 1.10. Câmpul în vecinătatea a două sarcini,  $q_1 = +3$ ,  $q_2 = -1$ , este suprapunerea câmpurilor din figura 1.9, a și b.

Fig. 1.11. Cîteva linii de câmp ale câmpului electric din jurul a două sarcini,  $q_1 = +3$ ,  $q_2 = -1$ .





## 1.8. DISTRIBUȚII DE SARCINĂ

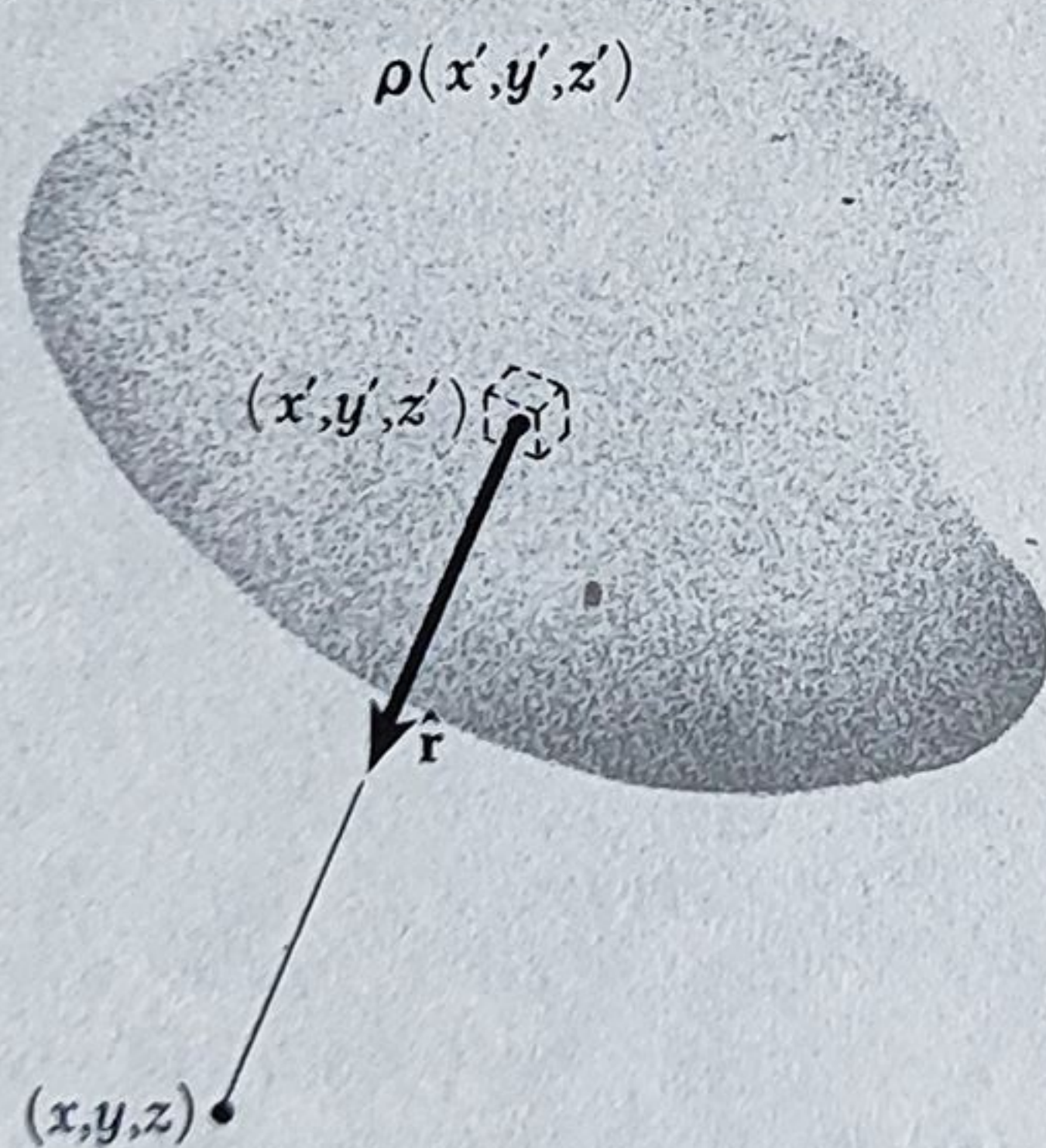
Este momentul să trecem de la sarcinile punctiforme la distribuțiile continue de sarcină. O distribuție de sarcină în volum este descrisă de o funcție scalară a densității de sarcină  $\rho$ , care depinde de poziție și care are dimensiunile [sarcină]/[volum]. Adică, densitatea  $\rho$  dă sarcina conținută în elementul de volum. Același simbol este deseori utilizat pentru masa unități de volum, dar în această carte vom înțelege întotdeauna prin  $\rho$  — sarcina unității de volum.

Dacă scriem pe  $\rho$  ca funcție de coordonatele  $x, y, z$ , atunci  $\rho(x, y, z) dx dy dz$  este sarcina conținută într-un volum infinitezimal  $dx dy dz$ , aflat în punctul  $(x, y, z)$ .

Bineînțeles că, la scară atomică, densitatea de sarcină variază enorm de la punct la punct; cu toate acestea și în acest domeniu, se dovedește a fi o noțiune utilă. O vom folosi, mai ales, la studiul sistemelor macroscopice, în comparație cu dimensiunile cărora elementul de volum  $dv = dx dy dz$  este destul de mic, dar suficient de mare pentru a putea cuprinde mai mulți atomi sau sarcini elementare. După cum am mai remarcat, problema se pune similar la definirea densității masice a substanței.

Dacă sursa câmpului electric este mai curînd o distribuție continuă de sarcini decît de sarcini punctuale, atunci în ecuația (13) trebuie doar înlocuită suma, cu integrala corespunzătoare. Integrala dă valoarea câmpului electric în punctul  $(x, y, z)$ , care este produs de sarcinile aflate în alte puncte  $(x', y', z')$ :

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') \hat{\mathbf{r}} dx' dy' dz'}{r^2} \quad (15)$$



Aceasta este o integrală de volum. Fixînd punctul  $(x, y, z)$ , variabilele de integrare  $x', y', z'$  mătură întreg spațiul în care se află sarcini, însumînd astfel contribuțiile tuturor porțiunilor de sarcină. Vectorul unitar  $\hat{\mathbf{r}}$  este îndreptat de la  $(x', y', z')$  spre  $(x, y, z)$ ; pentru sensul invers al lui  $\hat{\mathbf{r}}$  se pune semnul minus în fața integralei. Punerea corectă a semnelor este întotdeauna dificilă. Trebuie să ținem seama că sensul câmpului electric se stabilește pornind de la sarcina pozitivă (figura 1.12).

Fig. 1.12. Fiecare element din distribuția de sarcină  $\rho(x', y', z')$  aduce o contribuție în intensitatea câmpului electric  $\mathbf{E}$  din punctul  $(x, y, z)$ . Câmpul total în acest punct, este suma tuturor acestor contribuții (relația 15).



În apropierea sarcinii punctuale reale câmpul electric crește pe măsura apropierii de punct, tinzând spre infinit ca  $1/r^2$ . Nu are sens să vorbim de câmp în punctul în care se află sarcina punctiformă. Întrucît sursele fizice ale câmpului nu sînt concentrații infinite de sarcină într-un volum egal cu zero ci structuri finite, vom ignora pur și simplu, singularitățile matematice implicate de limbajul folosit pentru noțiunea de sarcină punctiformă și nu ne interesăm de ceea ce se petrece în interiorul surselor elementare. Este, totuși, util de remarcat că o distribuție continuă de sarcină nu are singularități și permite determinarea câmpului în puncte aflate în interiorul distribuției. Acesta este motivul pentru care integrala de volum din ecuația (15) nu este divergentă în jurul punctului  $r = 0$ , elementul de volum fiind proporțional cu  $r^2 dr$ . Cu alte cuvinte, atîta timp cît  $\rho$  rămîne o mărime finită, câmpul va fi, de asemenea, finit peste tot chiar în interiorul sau la marginea distribuției de sarcină.

### 1.9. FLUX

Relația dintre câmpul electric și sursele sale, relație care ne este foarte utilă, poate fi exprimată extrem de simplu. Pentru aceasta se definește mărimea numită *flux*.

Considerăm o suprafață închisă de o formă oarecare și un câmp electric în acest spațiu. În figura 1.13 este reprezentată o asemenea suprafață și cîteva linii de câmp. Vom împărți această suprafață în porțiuni atît de mici, încît suprafața fiecărui element este practic plană, iar vectorul câmp nu variază pe această suprafață elementară. Cu alte cuvinte, suprafața nu trebuie să fie prea neregulată și nu trebuie să treacă chiar printr-o singularitate\* a câmpului, ca de exemplu o sarcină punctiformă. Elementul de suprafață are o mărime bine determinată, exprimată în  $\text{cm}^2$  și definește o direcție unică — cea a normalei la suprafața elementului, îndreptată spre exterior. (Întrucît suprafața este închisă, se poate deosebi partea interioară de cea exterioară. Aici nu există nici o ambiguitate.) Să reprezentăm această mărime și direcție printr-un vector; atunci, pentru fiecare element de suprafață  $j$ , există un vector  $\mathbf{a}_j$ , care determină mărimea și orientarea elementului de suprafață. Toate etapele urmărite sînt reprezentate în figura 1.13, *b* și *c*. Vectorii  $\mathbf{a}_j$  nu depind de forma elementului de suprafață; modul în care am făcut împărțirea în suprafețe elementare nu joacă nici un rol, atîta timp cît elementele sînt suficient de mici.

Fie  $\mathbf{E}_j$  vectorul câmp electric pe suprafața elementară. Produsul scalar  $\mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j$  este un număr. Acest număr îl numim *fluxul* prin elementul de suprafață. Pentru a înțelege originea acestei denumiri, să alegem o funcție vectorială care reprezintă viteza de mișcare într-un fluid — un rîu, de exemplu, în care viteza variază de la un loc la altul, dar este constantă în

\* Printr-o singularitate a câmpului înțelegem, de obicei, nu numai o sursă punctiformă în care câmpul tinde spre infinit, dar orice loc în care mărimea sau direcția câmpului suferă o discontinuitate ca, de exemplu, un strat infinitezimal subțire cu sarcină concentrată. Acest din urmă tip de singularitate, nu introduce dificultăți, dacă oricare parte finită a suprafeței alese nu coincide cu suprafața de discontinuitate.



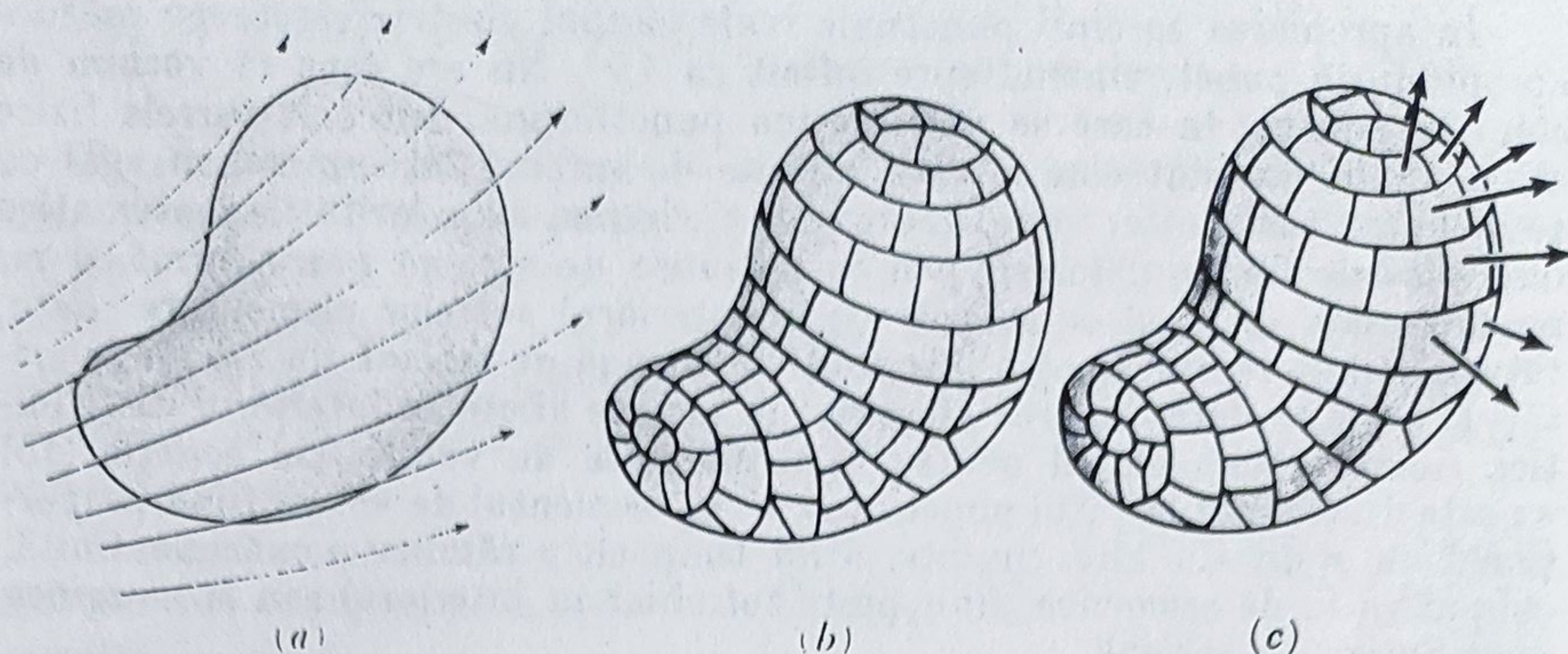


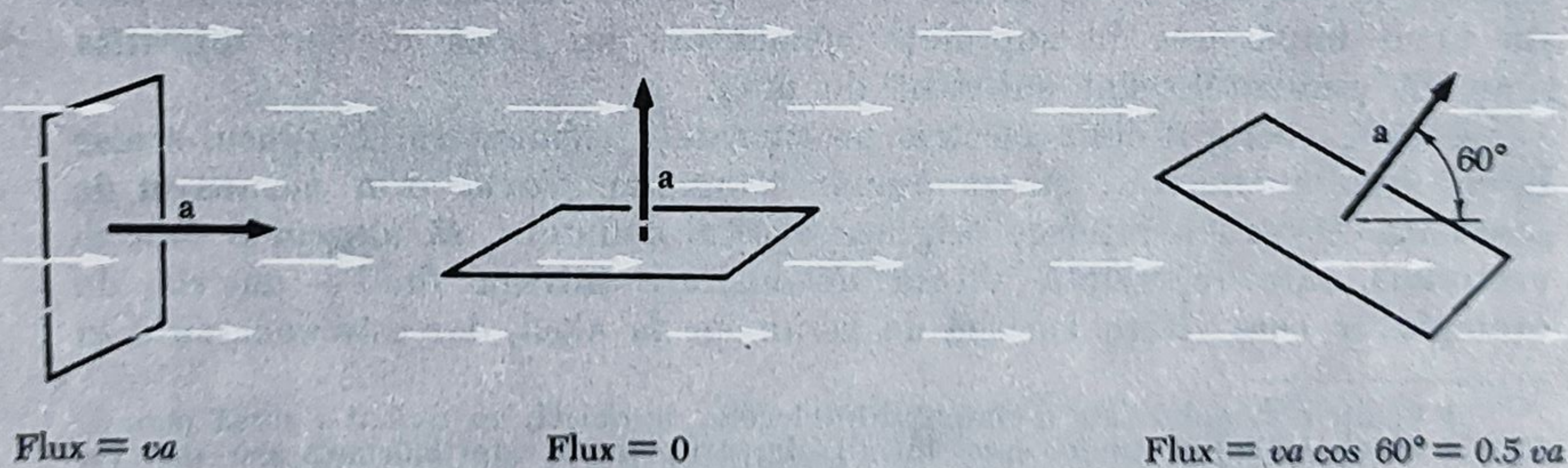
Fig. 1.13. (a) O suprafață închisă aflată într-un câmp vectorial este împărțită (b) în elemente de suprafață mici. (c) Fiecare suprafață elementară este reprezentată printr-un vector îndreptat spre exterior.

timp, în orice poziție. Să notăm acest vector cu  $\mathbf{v}$ , măsurat în m/s. Atunci dacă  $\mathbf{a}$  este vectorul elementului de suprafață orientat din apă, exprimat în  $\text{m}^2$ ,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$  este fluxul apei prin elementul de suprafață ales, exprimat în  $\text{m}^3/\text{s}$  (fig. 1.14). Trebuie să subliniem că definiția dată fluxului este aplicabilă oricărei funcții vectoriale, indiferent de variabila fizică pe care o reprezintă.

Să adunăm, acum, fluxul prin toate suprafețele elementare pentru a obține fluxul prin întreaga suprafață — o mărime scalară, pe care o vom nota cu  $\Phi$ :

$$\Phi = \sum_{\text{Toți } j} \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j \quad (16)$$

Fig. 1.14. Fluxul printr-un cadru de arie  $\mathbf{a}$  este  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$ , unde  $\mathbf{v}$  este viteza fluidului. Fluxul este volumul de fluid ce trece prin suprafață în unitatea de timp.





Micșorînd elementele de suprafață și mărind numărul lor la infinit, trecem de la suma (16) la integrala de suprafață:

$$\Phi = \int_{\text{pe întreaga suprafață}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (17)$$

Integrale de suprafață pentru o funcție vectorială oarecare  $\mathbf{F}$ , pe suprafața  $S$ , înseamnă următoarele: se împarte  $S$  în elemente mici, reprezentate printr-un vector, îndreptat spre interiorul suprafeței, a cărui mărime este egală cu aria elementului de suprafață; pe fiecare element, se ia produsul scalar al vectorului suprafeței elementare și a valorii locale a vectorului  $\mathbf{F}$ , se însumează toate aceste produse și limita acestei sume cînd suprafețele elementare sînt micșorate din ce în ce mai mult, este integrala de suprafață. Nu trebuie să ne sperie perspectiva unui asemenea calcul pentru o suprafață neregulată ca cea din figura 1.13. Proprietatea surprinzătoare, pe care ne pregătim să o demonstrăm, ne va scuti de aceasta!

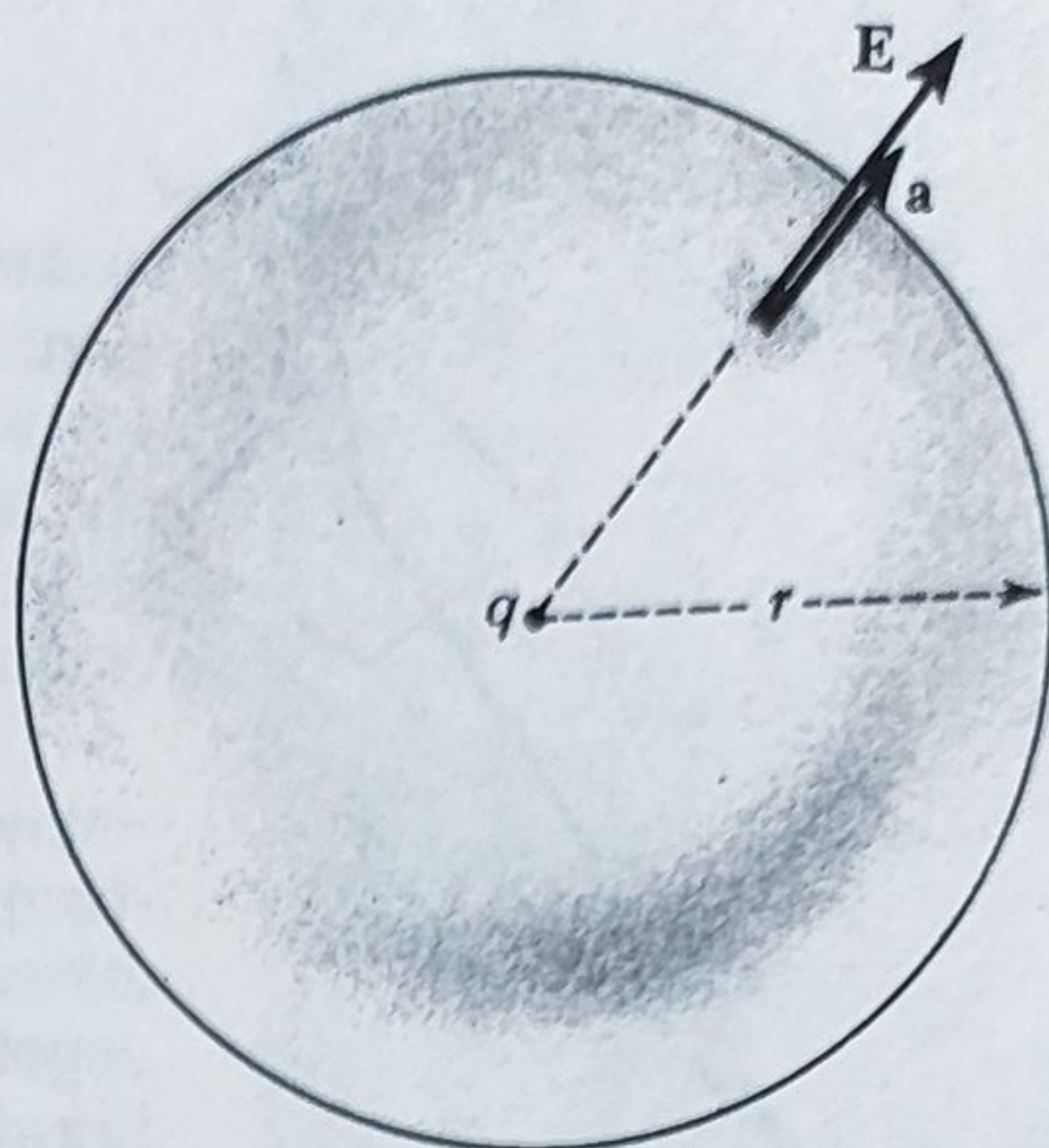


Fig. 1.15. Cu ce este egal fluxul exterior prin sferă, în câmpul  $\mathbf{E}$  al sarcinii punctiforme  $q$ .

## 1.10. LEGEA LUI GAUSS

Să luăm cazul cel mai simplu: să presupunem că câmpul este produs de o sarcină punctiformă pozitivă  $q$  izolată și că suprafața este o sferă de rază  $r$  cu centrul în punctul în care se găsește sarcina (fig. 1.15). Care este fluxul  $\Phi$  prin această suprafață? Răspunsul este simplu deoarece mărimea lui  $\mathbf{E}$ , în fiecare punct al suprafeței, este  $q/4\pi\epsilon_0 r^2$  și direcția coincide cu normala exterioară în acest punct. Astfel:

$$\Phi = E \times \text{suprafața totală} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (18)$$

Fluxul nu depinde de dimensiunile sferei. Să ne imaginăm, acum, o a doua suprafață, nesferică, care s-o cuprindă pe prima (fig. 1.16). Afirmăm că fluxul total prin această suprafață este egal cu fluxul prin sferă. Pentru a dovedi aceasta, să luăm un con, cu vârful în  $q$ , care taie o suprafață mică  $a$  pe sferă și un element  $A$  pe suprafața exterioară, aflat la distanța  $R$  de sarcina punctiformă. Suprafața  $A$  este mai mare decât  $a$  din două motive: în primul rînd, datorită raportului pătratelor distanțelor  $(R/r)^2$  și în al doilea rînd, datorită înclinării care introduce factorul  $1/\cos \theta$ . Unghiul  $\theta$



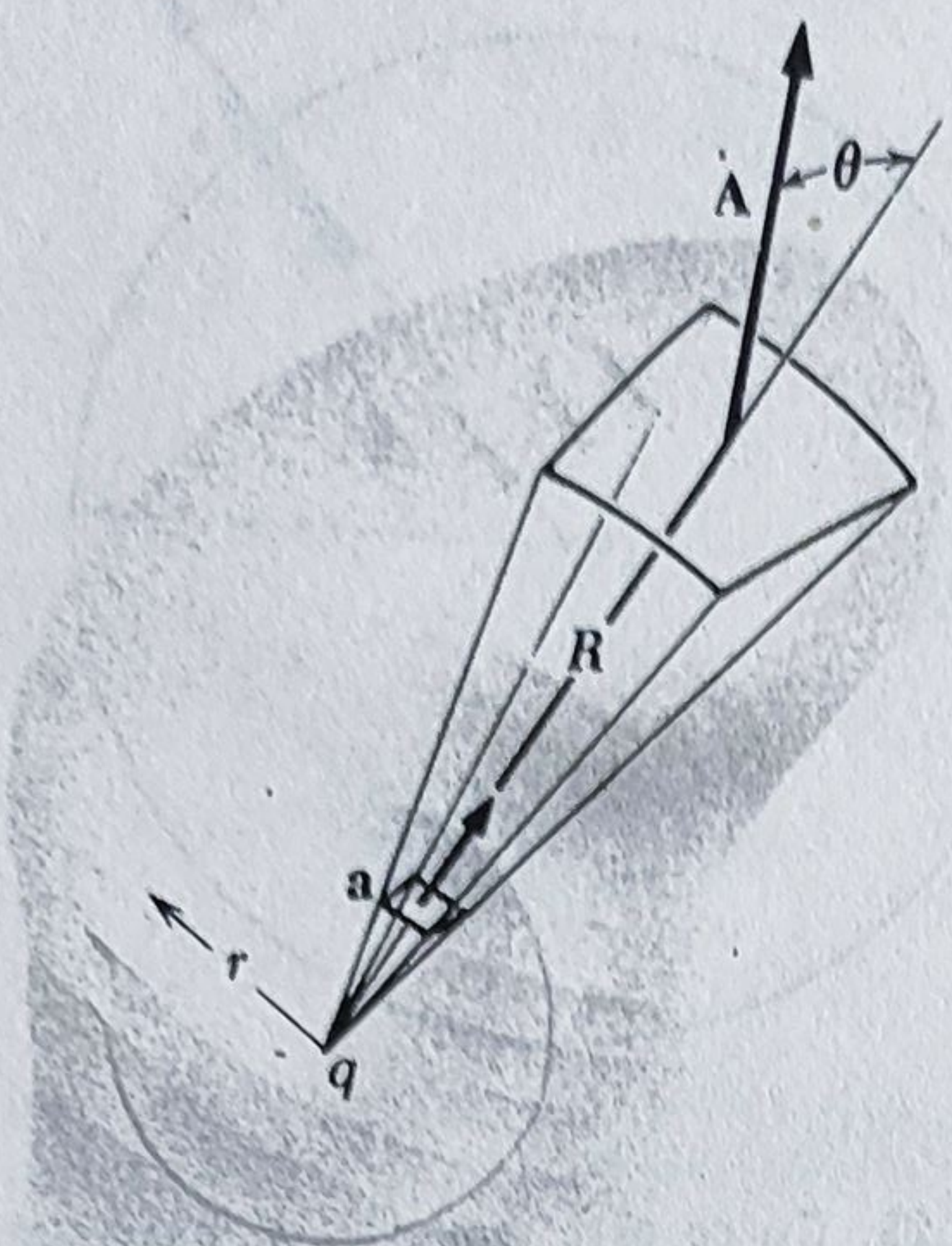


Fig. 1.16. Se demonstrează că fluxul prin orice suprafață închisă în jurul sarcinii  $q$  este același cu fluxul prin sferă.

suprafețe. Înseamnă că fluxul total prin suprafața nou aleasă va fi egal tot cu  $q/\epsilon_0$ . Dar formele și dimensiunile suprafeței au fost alese *arbitrar*\*. Prin urmare: fluxul câmpului electric printr-o suprafață *oarecare* care cuprinde o sarcină punctiformă  $q$  este  $q/\epsilon_0$ . Se poate arăta, de asemenea, că fluxul total printr-o suprafață închisă este nul dacă sarcina se află *în afara* suprafeței. Această demonstrație o lăsăm în seama cititorului, ca o variantă a problemei (fig. 1.17).

Există o cale datorită căreia rezultatul devine evident. Să presupunem că în  $q$  se află o sursă care emite particule în toate direcțiile, cu viteză constantă — de exemplu, nuclee atomice sau fotoni. Evident, fluxul de particule printr-o secțiune egală cu unitatea de suprafață, va scădea invers proporțional cu pătratul distanței de la secțiune pînă la  $q$ . Prin urmare, putem face o analogie între intensitatea câmpului electric  $E$  și intensitatea fluxului de particule, exprimat în nuclee pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp. Este suficient de clar, că fluxul de nuclee printr-o suprafață oarecare care îl cuprinde pe  $q$ , nu depinde de dimensiunile și forma acestei

este unghiul dintre direcția normalei exterioare și direcția razei (v. fig. 1.16). Câmpul electric din vecinătatea normalei este mai mic decît câmpul pe sferă cu factorul  $\left(\frac{r}{R}\right)^2$  și îndreptat tot radial. Dacă  $E_{(R)}$  este câmpul în porțiunea exterioară a suprafeței și  $E_{(r)}$  câmpul în dreptul sferei, atunci:

Fluxul prin porțiunea suprafeței exterioare =  $E_{(R)} \cdot A = E_{(R)} A \cos \theta$ .

Fluxul prin porțiunea suprafeței interioare =  $E_{(r)} \cdot a = E_{(r)} a$  (19)

$$E_{(R)} A \cos \theta = \\ = \left[ E_{(r)} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \left[ a \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{1}{\cos \theta} \right] \cos \theta = E_{(r)} a.$$

Aceasta dovedește că fluxul prin cele două suprafețe elementare este același.

Fiecare element de pe suprafața exterioară corespunde unei porțiuni a suprafeței sferice, astfel încît fluxul total trebuie să fie același prin ambele

\* Pentru a fi siguri, am ales a doua suprafață astfel încît să cuprindă sfera, dar nu e absolut necesar. În afară de aceasta, sfera poate fi aleasă oricît de mică.



Fig. 1.17. Pentru a arăta că în (a) fluxul prin suprafața  $S$  este nul (a), se poate folosi figura (b).

suprafețe, întrucît este egal doar cu numărul total de particule emis în unitatea de timp. În mod corespunzător, fluxul lui  $\mathbf{E}$  printr-o suprafață închisă nu trebuie să depindă de dimensiunile și forma ei. Aceasta se explică prin faptul că intensitatea este invers proporțională cu pătratul distanței.

Acum se poate folosi principiul superpoziției. Orice câmp electric este suma câmpurilor electrice produse de fiecare sarcină în parte. Această proprietate a fost exprimată în legea lui Coulomb (ecuația 13). Este clar că fluxul este o mărime aditivă, în sensul că dacă există un număr de surse  $q_1, q_2, \dots, q_N$  care produc, corespunzător, câmpurile  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_N$ , fluxul total  $\Phi$ , printr-o suprafață oarecare  $S$  aflată în câmpul existent, poate fi scris ca

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_S [\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_N] \cdot d\mathbf{a} \quad (20)$$

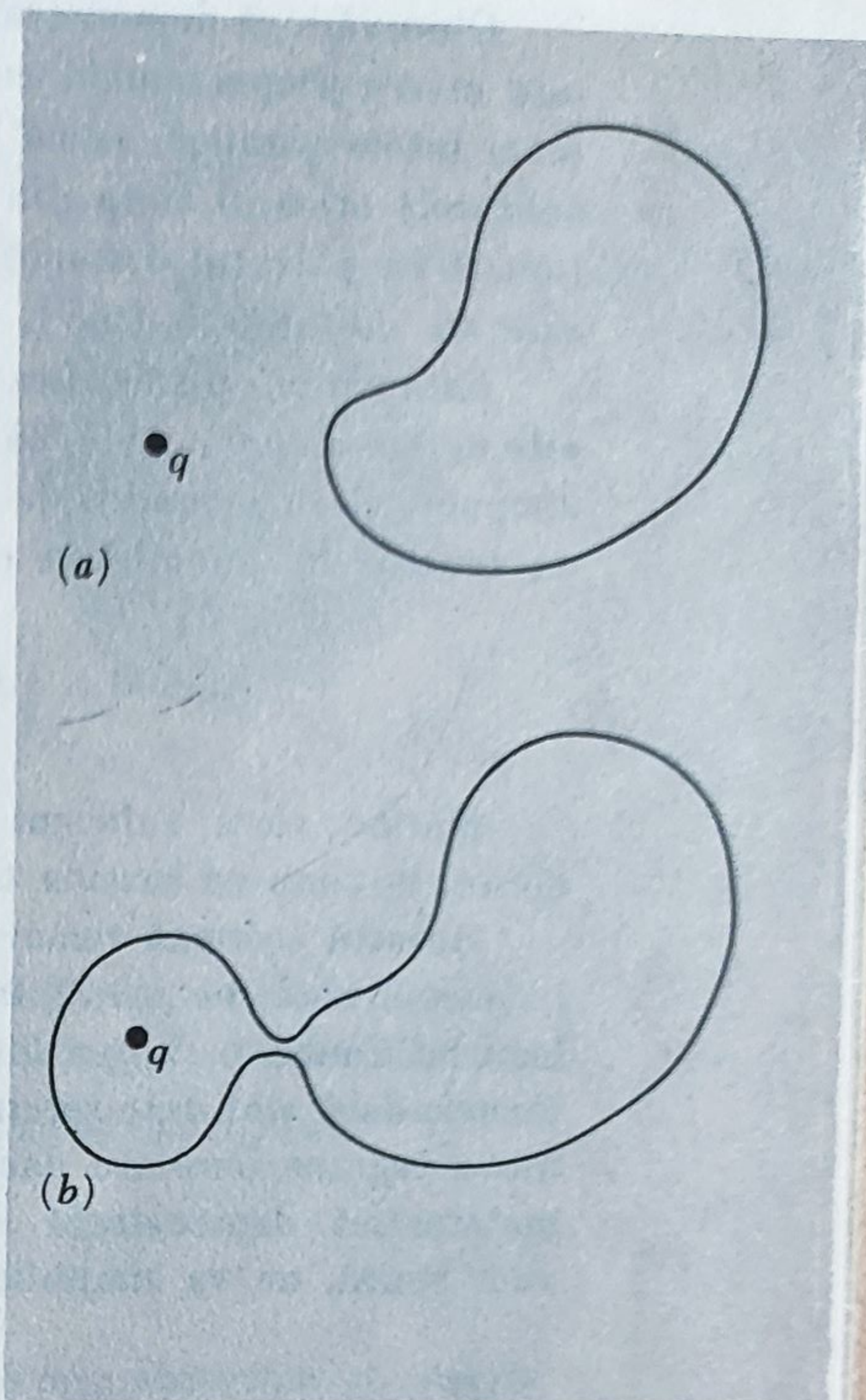
Am stabilit că  $\int_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{a}$  este egală cu  $q_n/\epsilon_0$ , dacă sarcina  $q_n$  se află în interiorul suprafeței  $S$  și egală cu zero cînd este în afara suprafeței: astfel, în integrala de suprafață din ecuația (20), contribuția fiecărei sarcini  $q$  aflată în interiorul suprafeței este exact  $q/\epsilon_0$  și contribuția tuturor sarcinilor aflate în afara ei este nulă. Am ajuns la legea lui Gauss:

Fluxul câmpului electric  $\mathbf{E}$  printr-o suprafață închisă oarecare, adică integrala de suprafață  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ , este egal cu  $\frac{1}{\epsilon_0}$  înmulțit cu sarcina totală din interiorul suprafeței:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dv \quad (21)$$

Numim afirmația din chenar *lege*, întrucît ea este echivalentă cu legea lui Coulomb și poate fi, la fel de bine, considerată ca o lege fundamentală a interacțiunilor electrostatice, după ce sarcina și câmpul au fost definite. Legea lui Gauss și legea lui Coulomb nu sînt două legi fizice independente, ci reprezintă una și aceeași lege exprimată în moduri diferite\*.

\* Există o diferență, neesențială aici, dar importantă la studiul câmpurilor sarcinilor în mișcare. Legea lui Gauss este valabilă pentru o clasă mai largă de câmpuri decît cel electrostatic. În particular un câmp fără simetrie sferică, invers proporțional cu  $r^2$ , poate satisface legea lui Gauss. Cu alte cuvinte, numai legea lui Gauss nu implică simetria sferică a câmpului unei surse punctiforme care în legea lui Coulomb se subînțelege.





Observăm că demonstrația noastră este bazată pe faptul că interacțiunea este invers proporțională cu pătratul distanței și de asemenea, pe aditivitatea interacțiunilor, adică pe principiul superpoziției. Astfel, teorema este aplicabilă oricărui câmp din fizică, în care interacțiunea este invers proporțională cu pătratul distanței, ca de exemplu câmpului gravitațional, despre care am discutat în vol. I, cap. 9.

Este simplu de verificat că legea lui Gauss nu este valabilă dacă forța este invers proporțională, să spunem, cu cubul distanței. În acest caz, fluxul câmpului electric produs de o sarcină punctiformă  $q$ , printr-o sferă de rază  $R$  cu centrul în punctul în care se află sarcina, va fi

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0 R}. \quad (22)$$

Mărind sfera suficient de mult, putem micșora fluxul prin ea oricât dorim, în timp ce sarcina totală din interior rămâne constantă.

Această teoremă remarcabilă ne lărgeste posibilitățile în două moduri: în primul rând, ne relevă legătura dintre câmp și sursele sale, în mod opus legii lui Coulomb. Legea lui Coulomb ne spune cum să determinăm câmpul electric dacă sînt date sarcinile; cu legea lui Gauss putem determina sarcina într-o regiune oarecare dacă se cunoaște câmpul. În al doilea rând, relația matematică demonstrată este un util instrument analitic care, așa cum vom vedea, ne va simplifica rezolvarea problemelor complicate.

### 1.11. CÂMPUL UNEI DISTRIBUȚII SFERICE DE PURTĂTORI DE SARCINĂ

Putem folosi legea lui Gauss pentru a găsi câmpul electric al unei distribuții sferice simetrice de sarcină, adică, a unei distribuții în care densitatea de sarcină depinde numai de distanța pînă la un punct central. În figura 1.18 este reprezentată o secțiune transversală printr-o asemenea distribuție. În această distribuție, densitatea de sarcină este mare în centru, apoi descrește și pe măsura depărtării de centru, crește din nou și la distanțe mai mari ca  $r_0$  este zero. Care este câmpul electric într-un punct oarecare  $P_1$  aflat în afara distribuției, sau în punctul  $P_2$ , din interiorul ei (figura 1.19)? Dacă am porni numai de la legea lui Coulomb, am însuma vectorii câmp electric, dați de fiecare element de volum al distribuției de sarcină, în punctul  $P_1$ . Să încercăm o altă cale care folosește și simetria sistemului și legea lui Gauss.

Datorită simetriei sferice, câmpul electric în orice punct este dispus radial — nu există o altă direcție. Ca urmare, mărimea câmpului  $E$  trebuie să fie aceeași în toate punctele de pe suprafața sferică  $S_1$  de rază  $r_1$ , întrucît toate punctele sînt echivalente. Să notăm mărimea acestui câmp cu  $E_1$ .



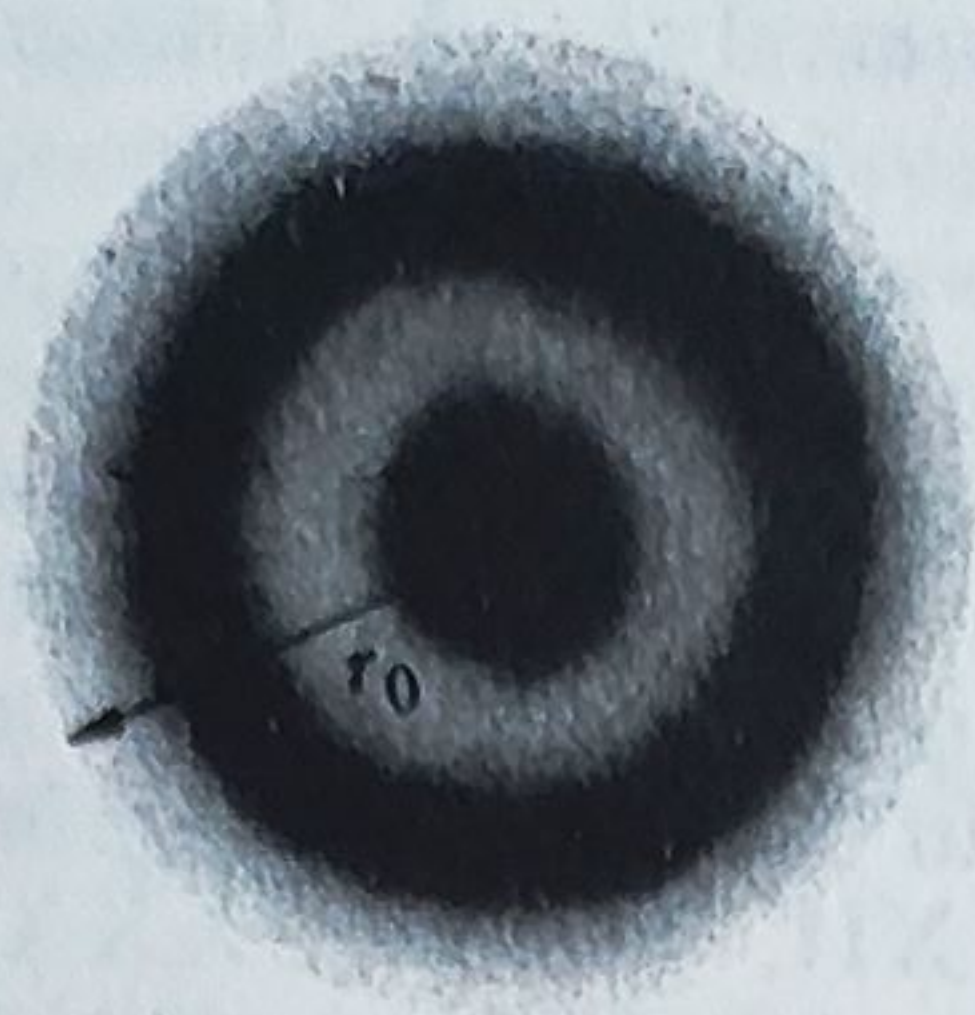


Fig. 1.18. O distribuție de sarcină cu simetrie sferică.

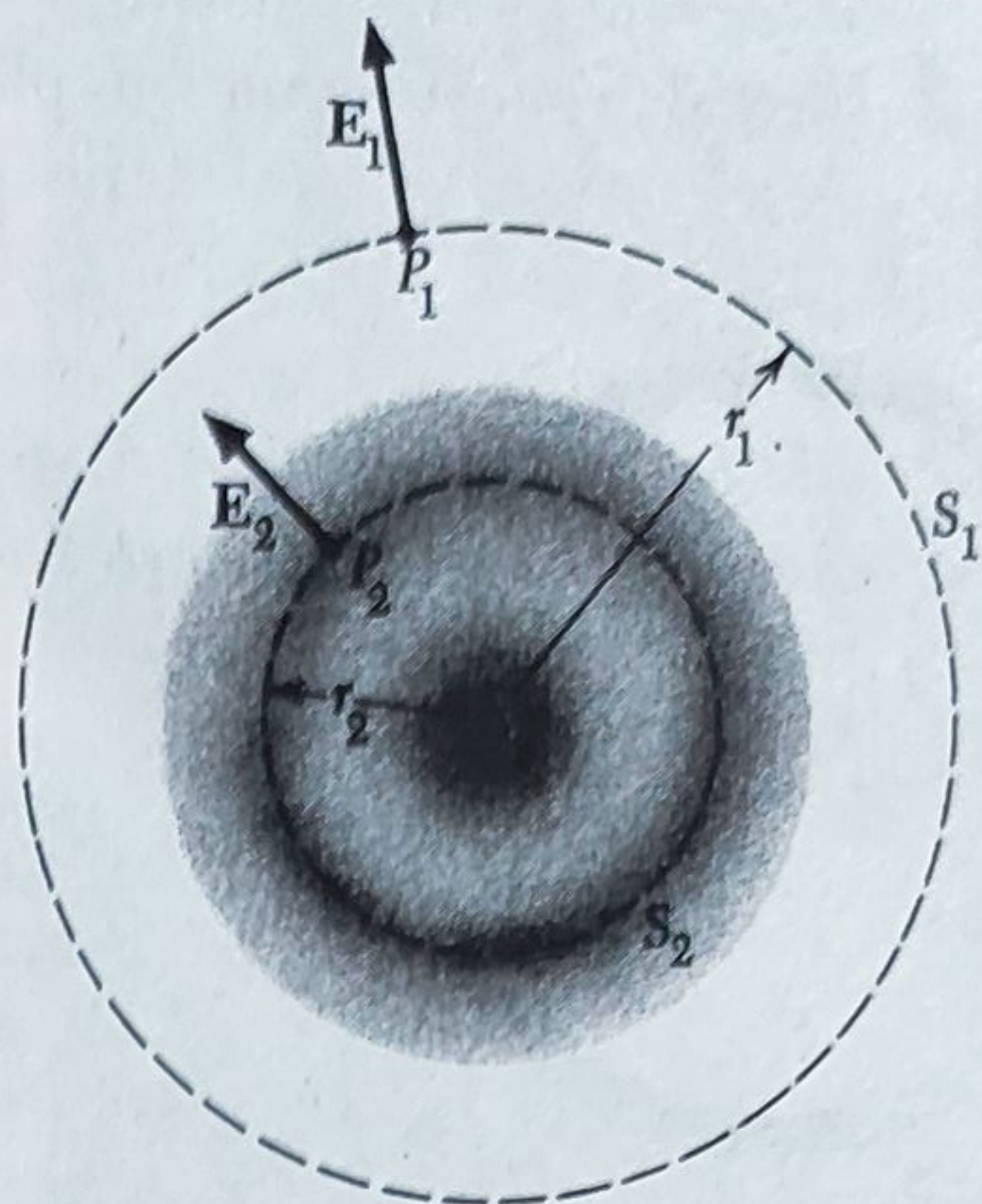


Fig. 1.19. Câmpul electric al unei distribuții sferice de sarcină.

Fluxul prin această suprafață  $S_1$  este egal cu  $4\pi r_1^2 E_1$  și, conform legii lui Gauss, trebuie să fie egal cu de  $1/\epsilon_0$  ori sarcina cuprinsă în interiorul suprafeței. Înseamnă că  $4\pi r_1^2 E_1 = \frac{1}{\epsilon_0}$  (sarcina din interiorul lui  $S_1$ ) sau

$$E_1 = \frac{\text{sarcina din } S_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}. \quad (23)$$

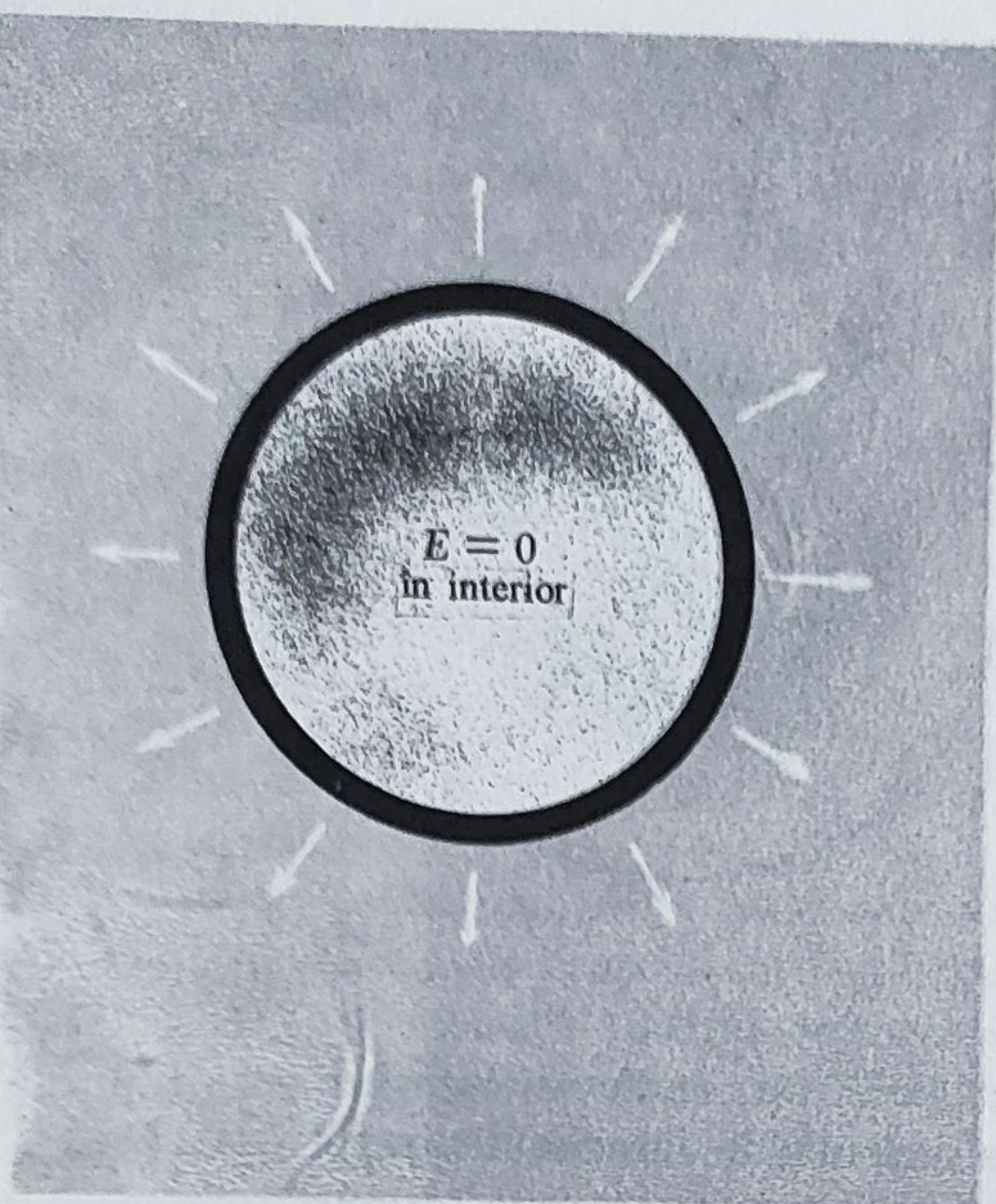
Comparînd-o cu câmpul unei sarcini punctiforme, observăm că *câmpul în toate punctele de pe suprafața  $S_1$  este același, ca și cum toată sarcina din interiorul suprafeței  $S_1$  ar fi concentrată în centru*. Același lucru se aplică unei sfere aflată în interiorul distribuției de sarcină. Câmpul, în orice punct de pe suprafața  $S_2$  este același, ca și cum toată sarcina din interiorul lui  $S_2$  s-ar afla în centru și toată sarcina din exteriorul lui  $S_2$  n-ar exista. Evident, câmpul în interiorul sferei delimitate de un strat sferic de sarcină este nul (fig. 1.20).

Folosind aceeași demonstrație și în cazul câmpului gravitațional, ajungem la concluzia că Pămîntul, presupunînd că distribuția masei lui are simetrie sferică, atrage toate corpurile exterioare ca și cum întreaga sa masă ar fi concentrată în centru. Această afirmație ne este mai familiară. Ea a fost demonstrată în vol. I folosind potențialul gravitațional și o integrare. Celor care sînt înclinați să creadă că acest principiu exprimă o proprietate evidentă a centrului de masă, trebuie să le reamintim că teorema nu este valabilă, în general, pentru alte forme. Un cub perfect, cu densitate omogenă nu atrage corpurile exterioare ca și cum masa ar fi concentrată în centrul ei geometric.

Pentru Newton această teoremă nu era evidentă. El ar fi avut nevoie de ea ca fundament pentru a demonstra că forțe de aceeași natură explică mișcarea orbitală a Lunii cît și căderea corpurilor pe Pămînt.



Fig. 1.20. Câmpul este nul în interiorul unei pături sferice încărcate.



Întârzierea publicării cu aproape 20 de ani a teoriei gravitației se explică, în parte, și prin dificultățile pe care Newton le-a întâmpinat în demonstrarea acestei teoreme. Demonstrația la care a ajuns și pe care a publicat-o în 1686 în *Principia* (Cartea I, paragraful XII, Teorema XXX) este de o uimitoare ingeniozitate realizând-o cu ajutorul unei integrări de volum complicate fără a-i fi cunoscute bazele calculului integral. Demonstrația este mult mai lungă și mai încălțită decât cea folosită de noi pentru legea lui Gauss. Și toate acestea pentru că, cu toată ingeniozitatea matematică și originalitatea sa, lui Newton i-a lipsit teorema lui Gauss — o relație care nouă ni se pare evidentă, dacă nu chiar banală.

### 1.12. CÂMPUL UNEI SARCINI LINIAR DISTRIBUITE

Un conductor liniar încărcat lung, de grosime neglijabilă, poate fi caracterizat prin sarcina electrică pe unitatea de lungime. Să notăm cu  $\lambda$  *densitatea liniară de sarcină*, măsurată în coulombi pe metru. Care este câmpul electric al unei asemenea distribuții liniare, de lungime infinită și cu densitatea de sarcină  $\lambda$  constantă? Vom rezolva problema pe două căi: întâi, vom porni de la legea lui Coulomb și vom folosi integrarea.

Pentru a calcula câmpul în punctul  $P$  din figura 1.21, trebuie să adunăm contribuțiile tuturor elementelor distribuției liniare de sarcină de lungime  $dx$ . Sarcina  $dq$  a unui asemenea element este  $dq = \lambda dx$ . Orientind axa  $x$  pe direcția distribuției liniare de sarcină, putem duce axa  $y$  prin punctul  $P$ , aflat la distanța  $r$  metri de la cel mai apropiat punct de pe conductor. Din considerente de simetrie, câmpul electric în punctul  $P$ , trebuie să fie îndreptat pe direcția axei  $y$ , astfel încât  $E_x$  și  $E_z$  sînt nule. Contribuția sarcinii  $dq$  la componenta pe  $y$  a câmpului electric în punctul  $P$  este

$$dE_y = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta \quad (24)$$

unde  $\theta$  este unghiul dintre vectorul câmp electric, produs de sarcina  $dq$ , și direcția axei  $y$ . Componenta totală a câmpului pe axa  $y$  va fi

$$E_y = \int dE_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} dx. \quad (25)$$



Este convenabil să fie folosit ca variabilă de integrare unghiul  $\theta$ . Întrucît  $R = r/\cos \theta$  și  $dx = R d\theta/\cos \theta$ , integrala devine:

$$E_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda \cos \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (26)$$

Se vede că intensitatea cîmpului unei distribuții liniare infinite de sarcină și cu densitate uniformă, este invers proporțional cu distanța de la conductor. Direcția este, bineînțeles, radială îndreptată dinspre conductor înafară — dacă conductorul poartă sarcini pozitive și spre conductor — dacă sarcinile sînt negative.

Legea lui Gauss duce exact la același rezultat. Să închidem un segment din distribuția liniară de sarcină într-un cilindru circular de lungime  $L$  și rază  $r$  ca în figura 1.22 și să calculăm fluxul prin această suprafață. Așa cum am mai văzut, considerentele de simetrie ne garantează că fluxul prin capetele acestei „cutii de conserve” este nul. Fluxul prin suprafața cilindrică este egal cu suprafața  $2\pi rL$  înmulțită cu cîmpul  $E_r$  de pe suprafață. Pe de altă parte, sarcina din interiorul cilindrului este tocmai  $\lambda L$ , astfel încît legea lui Gauss ne dă  $2\pi rLE_r = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$ , sau

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (27)$$

în concordanță cu ecuația (26).

### 1.13. CÎMPUL SARCINII DISTRIBUITE PE UN PLAN INFINIT

Sarcina electrică distribuită uniform într-un strat subțire este numită distribuție superficială de sarcină. Să considerăm o suprafață plană infinită cu o densitate superficială de sarcină  $\sigma$  constantă. Cîmpul electric pe ambele fețe ale suprafeței, indiferent de mărime, trebuie să fie neapărat perpendicular la suprafață; o altă direcție în sistem nu este posibilă. De asemenea,

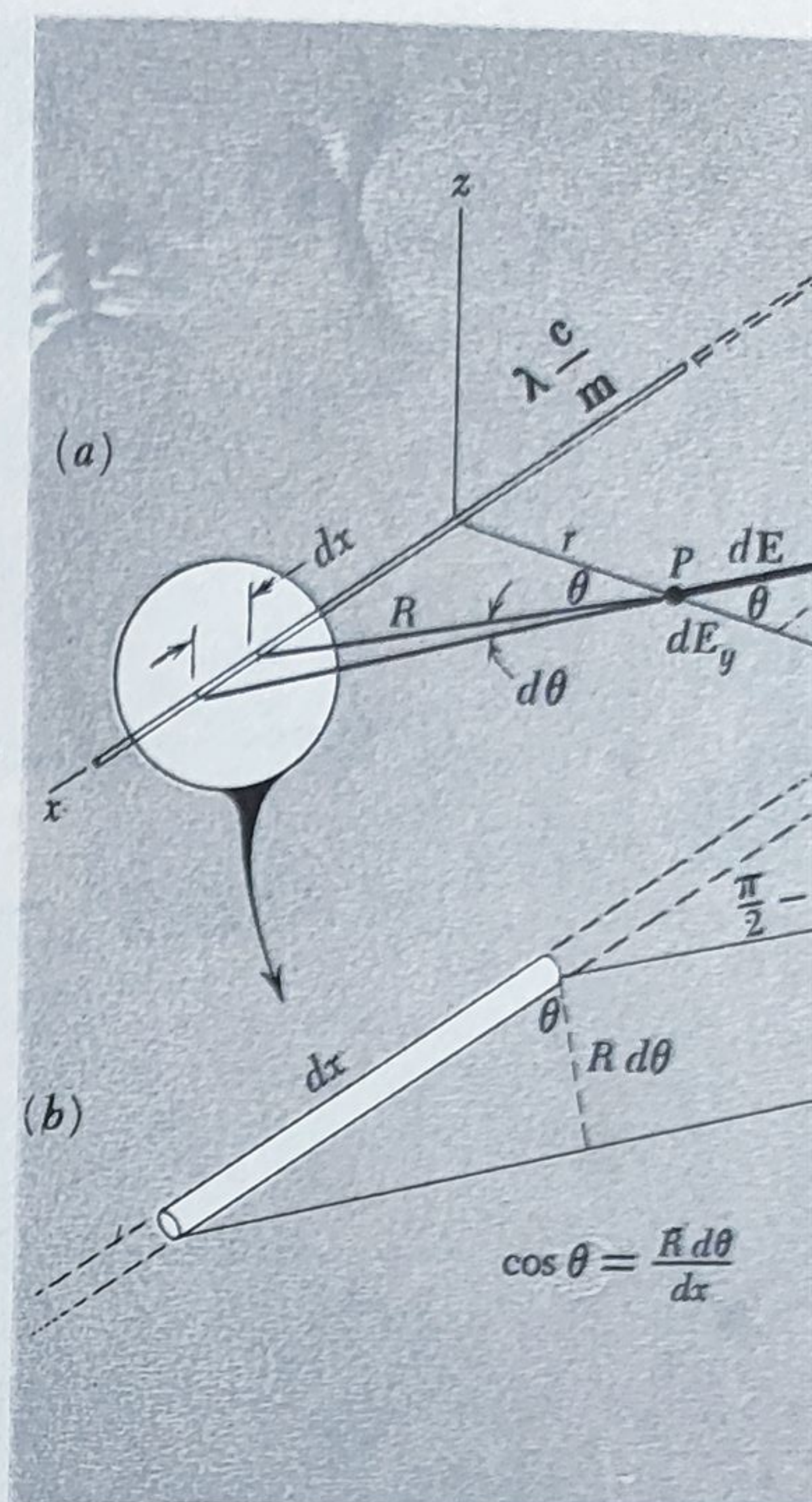


Fig. 1.21. (a) Cîmpul în  $P$  este suma vectorială a contribuțiilor fiecărui element din distribuția liniară de sarcină. (b). Detaliu din figura (a).

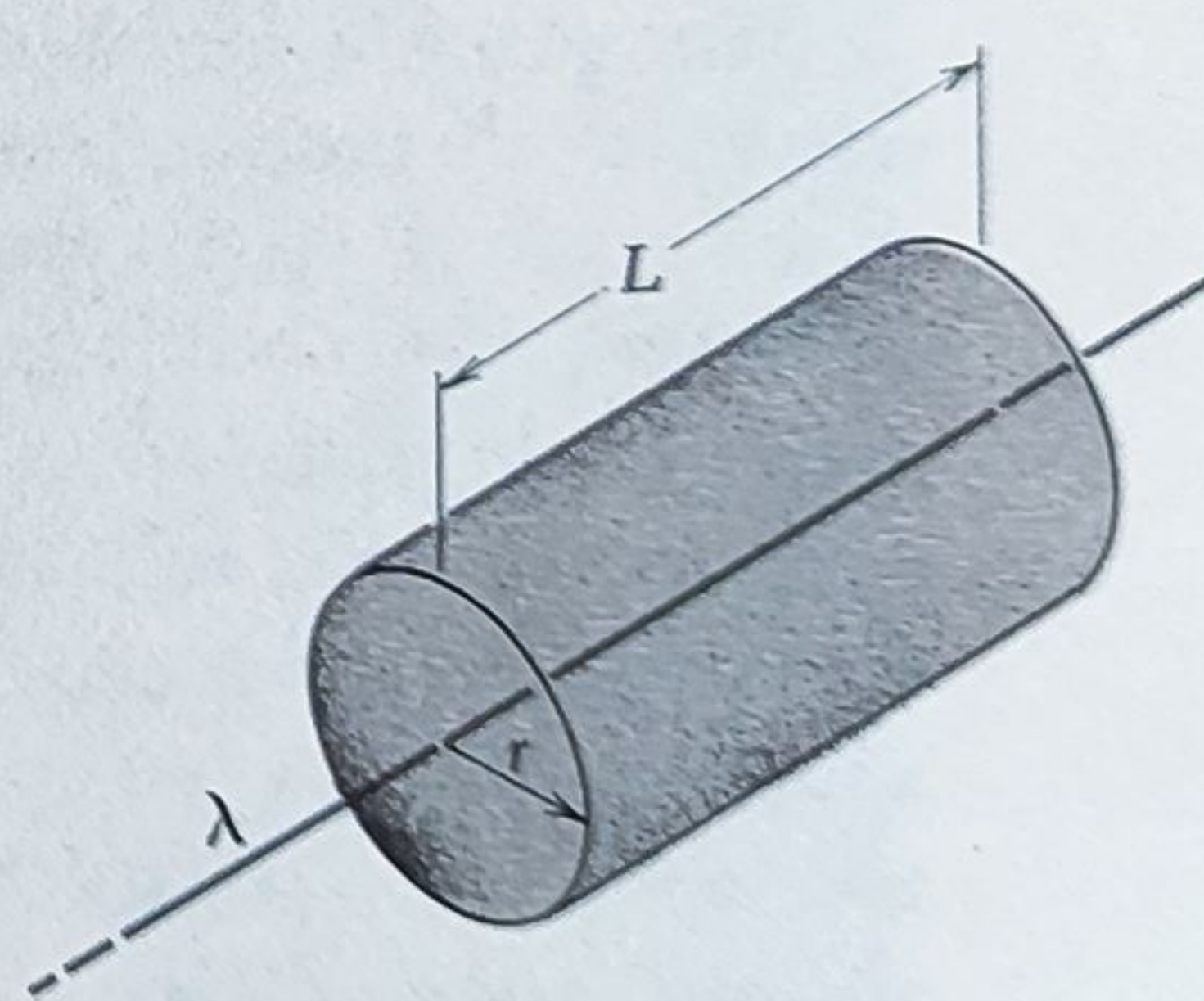
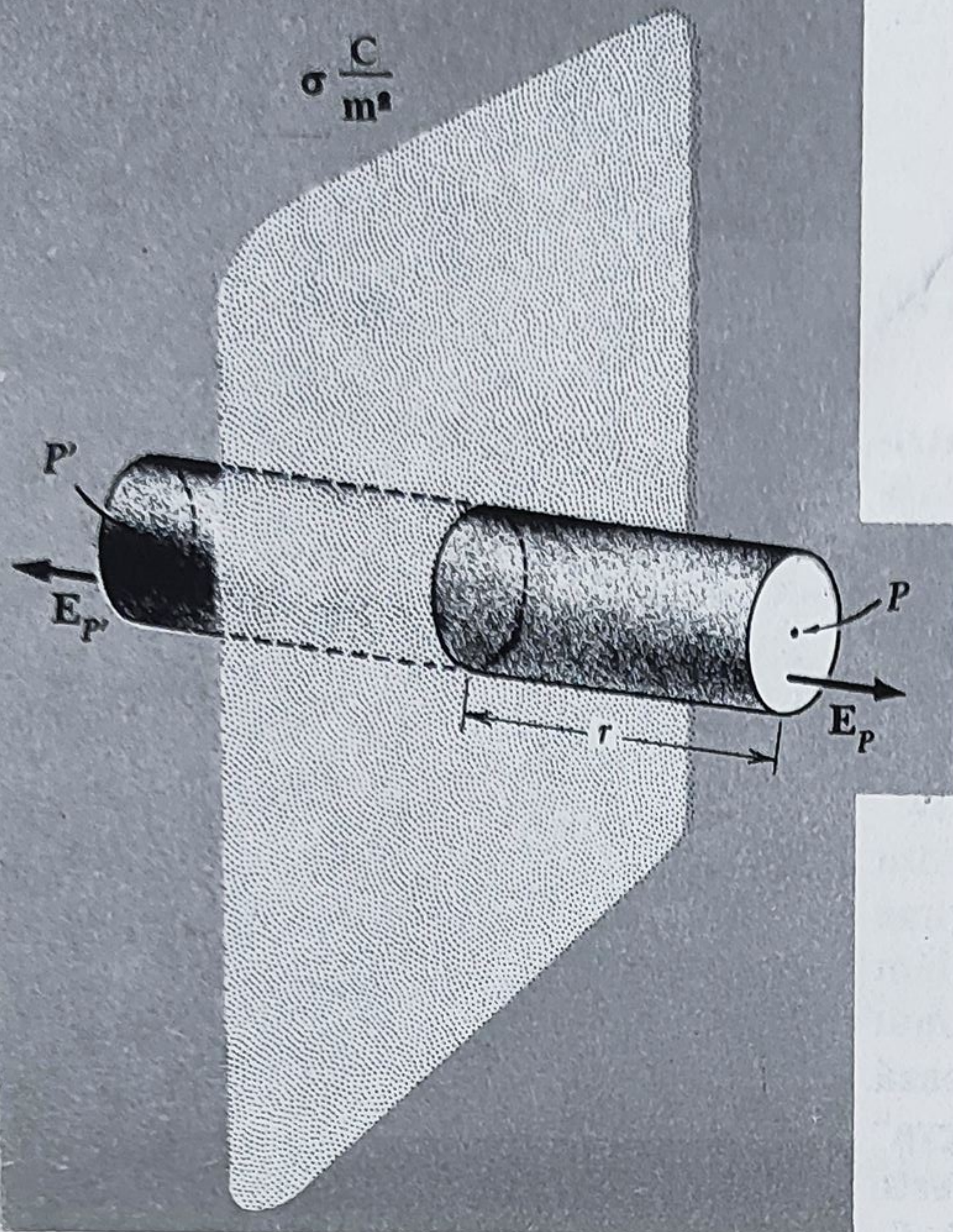


Fig. 1.22. Determinarea cîmpului unei distribuții liniare de sarcină folosind legea lui Gauss.



Fig. 1.23. Determinarea câmpului unei distribuții superficiale de sarcină infinite folosind teorema lui Gauss.



din considerente de simetrie, câmpul în două puncte  $P$  și  $P'$ , aflate la distanțe egale de cele două fețe, trebuie să aibă aceeași mărime și sensuri opuse. Odată stabilite aceste lucruri, pe baza legii lui Gauss putem determina imediat intensitatea câmpului, în modul următor: desenăm un cilindru ca în figura 1.23, cu aria secțiunii  $A$  și cu punctele  $P$  și  $P'$  aflate la cele două capete. Fluxul exterior se găsește numai la capete, astfel încît, dacă  $E_P$  este mărimea câmpului în punctul  $P$  și  $E_{P'}$  mărimea în punctul  $P'$ , fluxul exterior este  $AE_P + AE_{P'} = 2AE_P$ . Sarcina conținută este  $\sigma A$ . Prin urmare,

$$2AE_P = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A, \text{ sau}$$

$$E_P = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (28)$$

Se vede că intensitatea câmpului este independentă de  $r$  — distanța la suprafață. Ecuația (28) poate fi dedusă

și pe o cale mai complicată, calculînd suma vectorială a tuturor contribuțiilor elementelor din distribuția superficială de sarcină la câmpul din punctul  $P$ .

Am găsit că câmpul unei distribuții liniare de sarcină infinit de lungi, variază invers proporțional cu distanța la conductor, în timp ce câmpul unui strat superficial infinit are aceeași intensitate independentă de distanță. Toate acestea nu sînt decît simple consecințe ale faptului că câmpul unei sarcini punctiforme variază invers proporțional cu pătratul distanței. Dacă acest lucru nu este încă suficient de evident, se poate explica în alt mod: într-o aproximație grosolană, partea, din distribuția liniară de sarcină, care aduce contribuția esențială în câmpul din  $P$  (fig. 1.21), este partea cea mai apropiată — aflată la distanța  $r$ . Dacă însumăm toate aceste părți, neglijînd restul, obținem o sarcină concentrată de mărime  $q \approx \lambda r$ , care produce un câmp proporțional cu  $q/4\pi\epsilon_0 r^2$  sau cu  $\lambda/4\pi\epsilon_0 r$ . În cazul stratului superficial, sarcina „efectivă”, în sensul amintit, crește proporțional cu  $r^2$  pe măsura depărtării de suprafață, compensînd scăderea câmpului cu  $\frac{1}{r^2}$ , pentru fiecare element de sarcină.



## PROBLEME

(a) O chestiune fundamentală: raportul dintre mărimea forței gravitaționale și a celei electrice ce acționează între două particule elementare.

(b) O rememorare: unitățile de masă și sarcină sînt definite în moduri diferite.

### Legea lui Coulomb

1.1. (a) Să se compare respingerea electrică dintre doi electroni, aflați la distanța  $r$  unul de altul, cu atracția gravitațională a acelorași particule.

Ce valoare trebuie să aibă masa electronului pentru ca aceste forțe să se compenseze reciproc? (Valorile mărimilor fundamentale ca sarcina și masa electronului și constanta gravitațională,  $G$ , sînt date în tabelele de la sfîrșitul volumului.)

(b) În legea gravitației universale (vol. I, 84)  $G$  este o constantă care se determină experimental, în timp ce kilogramul, unitate de masă, se definește independent. Pentru definirea unității de sarcină, se folosește legea lui Coulomb. Presupunînd că unitatea de masă s-ar defini în același mod, cu ce va fi egală masa în asemenea unități?

1.2. Care este forța electrică totală exercitată asupra unității de sarcină pozitivă, aflată în centrul unui pătrat de latură  $b$ , dacă în cele patru colțuri ale pătratului se află sarcinile  $2$ ,  $2q$ ,  $-4q$  și  $2q$ ?

1.3. De două baloane identice umplute cu heliu este atîrnat un corp de masă  $5\text{ g}$ . Baloanele plutesc în echilibru ca în figură. Fiecare balon poartă sarcina  $Q$ . Să se găsească valoarea lui  $Q$ .

R:  $5,53 \cdot 10^{-7}\text{ C}$ .

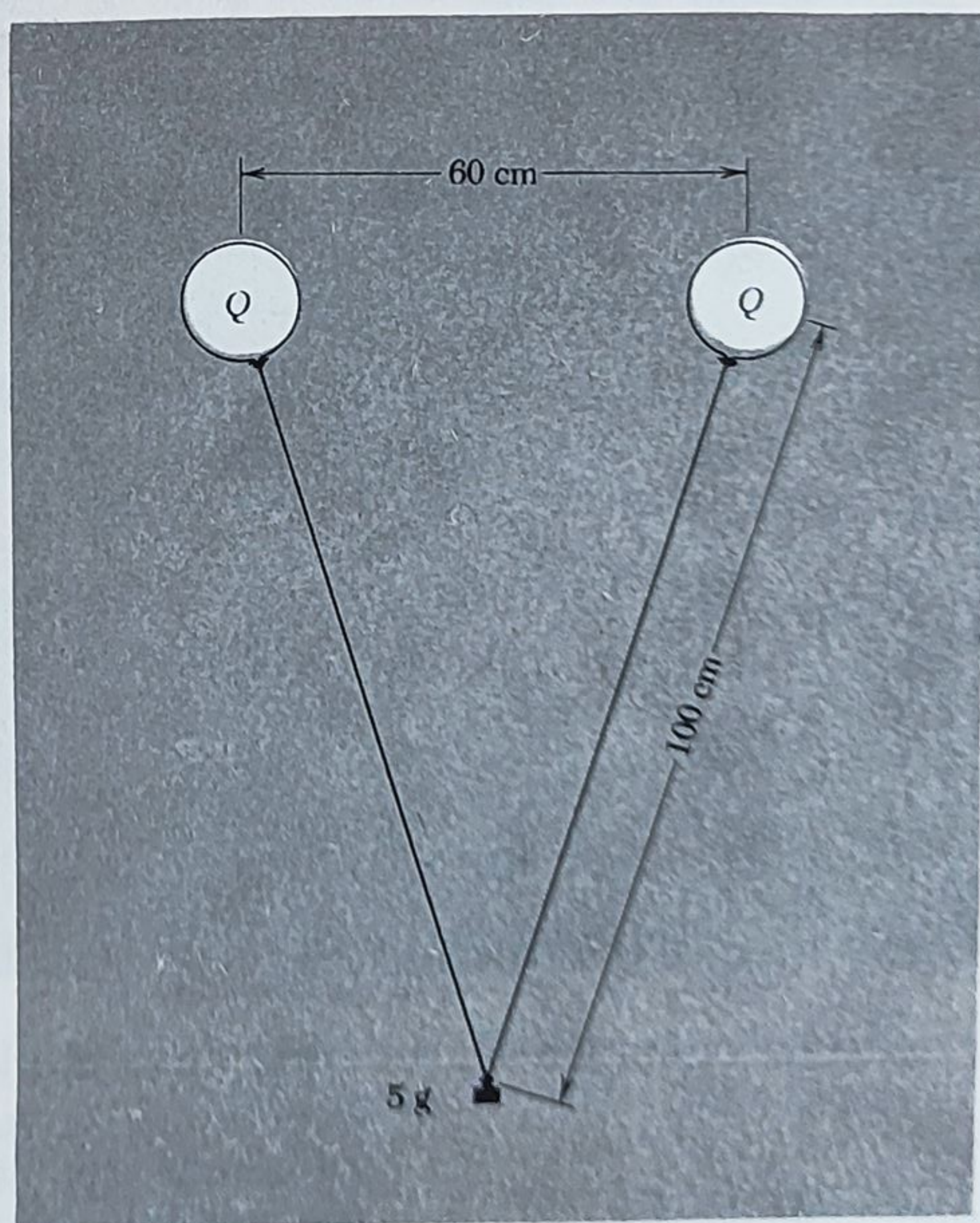
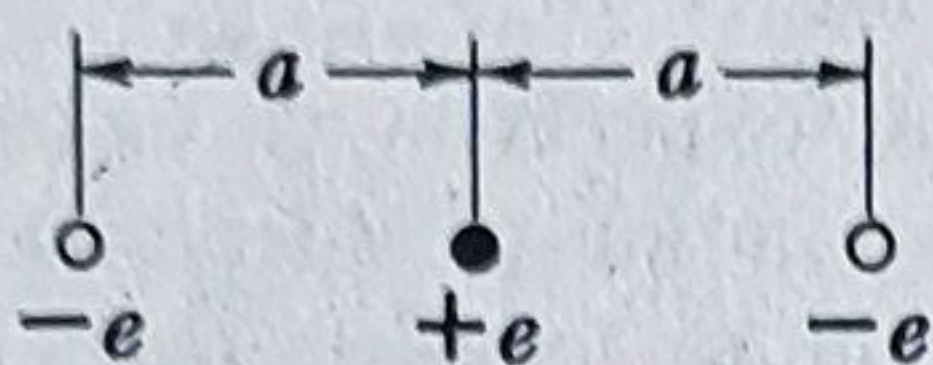


Fig. la problema 1.3.



1.4. În vîrfurile unui triunghi echilateral cu latura  $r$  se află sarcinile  $(-e)$ , iar în centrul de greutate al triunghiului se află sarcina  $Q > 0$ . Care trebuie să fie valoarea lui  $Q$ , pentru ca forța ce acționează asupra oricăreia din sarcinile negative să fie egală cu zero? Este evident, din motive de simetrie, că forța ce acționează asupra lui  $Q$  este întotdeauna zero. Se află sistemul în echilibru stabil?

Energia potențială a unui sistem de sarcini punctiforme.



1.5. Trei sarcini sînt amplasate ca în figură.

a) Să se calculeze forța electrostatică ce acționează asupra fiecărei sarcini.

b) Să se calculeze energia potențială totală a configurației de sarcini.

1.6. O particulă  $\alpha$  trece cu viteză mare prin centrul geometric al moleculei de hidrogen, mișcîndu-se pe direcția perpendiculară pe axa ce unește cele două nuclee. Distanța dintre nuclee este  $b$ . Pe ce porțiune din drum forța exercitată asupra particulei  $\alpha$  este maximă? Presupunem că deplasarea nucleelor în timpul trecerii particulei  $\alpha$  este neglijabilă (această presupunere este valabilă deoarece viteza particulei este mare). Vom neglija, de asemenea, cîmpul electric al electronilor în moleculă. (Această aproximație nu este prea corectă întrucît în regiunea centrală a moleculei de  $H_2$  are loc o concentrare considerabilă de sarcină negativă.)

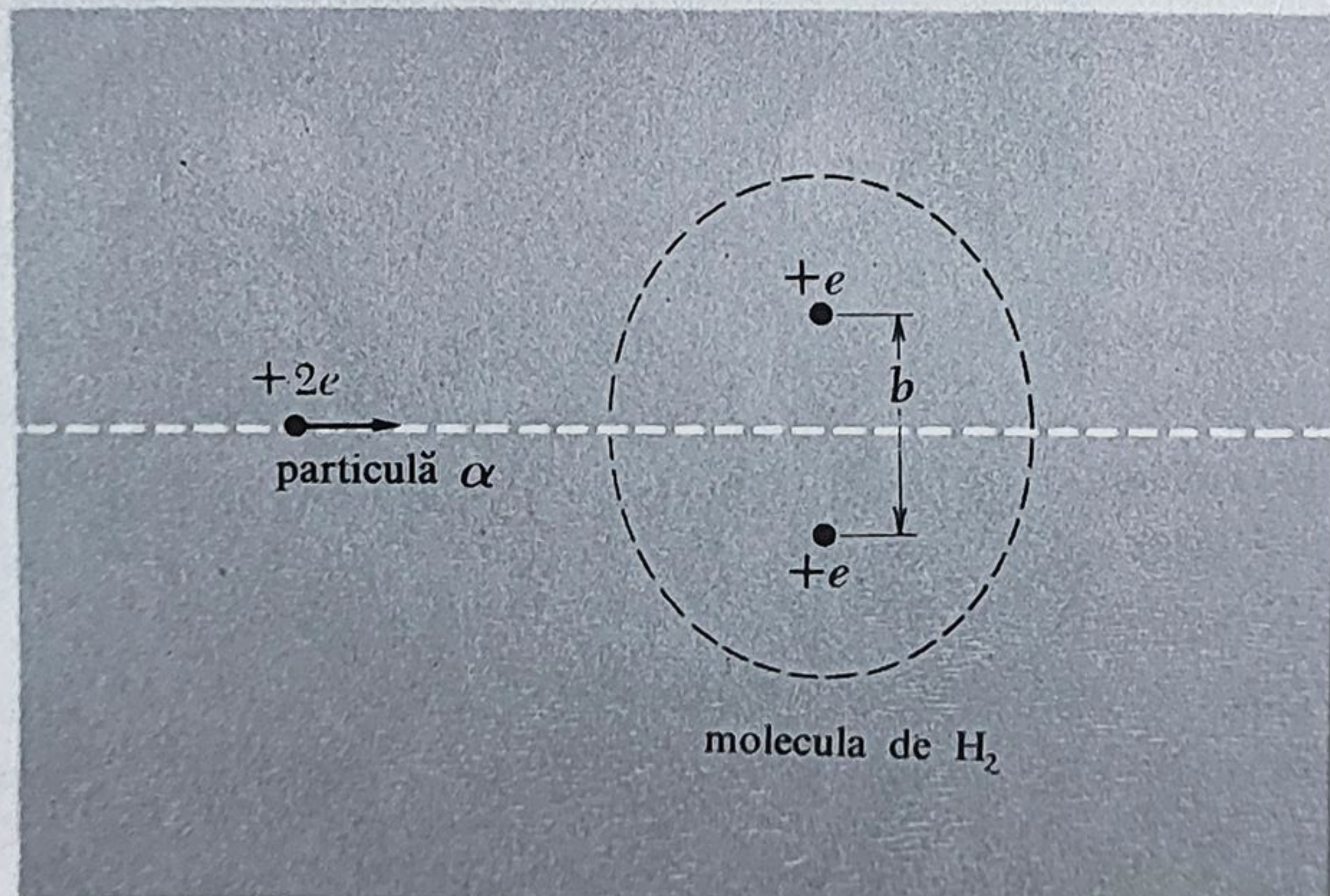


Fig. 1a problema 1.6.

1.7. Să se distribuie geometric un proton și doi electroni în așa fel, încît energia potențială a sistemului să fie egală cu zero. Cîte asemenea poziții sînt posibile pentru trei particule aflate în linie dreaptă?



1.8. Să se calculeze energia potențială ce revine unui ion, pentru un cristal ionic unidimensional infinit, adică pentru un șir de sarcini echidistante, de mărime  $e$ , alternând semnele. (Indicație: în rezolvare se poate folosi dezvoltarea în serie a lui  $\ln(1+x)$ .)

*Energia potențială a unei distribuții de sarcină.*

1.9. O incintă sferică de rază  $a$  se umple uniform cu sarcină de densitate  $\rho$ . Să se afle energia potențială  $U$  a acestei sfere încărcate, adică, lucrul mecanic cheltuit pentru alcătuirea ei. Calculați energia, alcătuind sfera strat cu strat și folosind faptul că câmpul, în exteriorul unei distribuții sferice de sarcină, este același cu cel produs dacă întreaga sarcină ar fi concentrată în centrul sferei. Presupunem că raza sferei astfel alcătuite a devenit  $r$ . Care este, în acest stadiu, sarcina totală  $q$ ?

Vom adăuga, acum, un strat de grosime infinitesimală  $dr$ ; ce lucru mecanic  $dU$  s-a consumat pentru a aduce sarcina cuprinsă în acest strat, de la infinit până la raza  $r$ ? Vom integra, acum, de la  $r = 0$  până la  $r = a$ . Să se exprime rezultatul în funcție de sarcina totală  $Q$  din sferă.

$$R: U = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} (Q^2/a).$$

*Modelul unui electron.*

1.10. La începutul secolului nostru, ipoteza că masa de repaus a electronului ar putea avea o origină pur electrică a devenit deosebit de atractivă, mai ales după ce teoria specială a relativității a demonstrat echivalența dintre masă și energie. Să ne imaginăm electronul sub forma unei sfere încărcate, cu o densitate de volum constantă și o rază maximă  $r_0$ . Folosind rezultatul problemei 1.9, să egalăm energia potențială a acestui sistem cu  $mc^2$  și să vedem ce obținem pentru raza  $r_0$ . Una din deficiențele modelului este evidentă: nu se prevede nimic pentru a putea păstra sarcina laolaltă!

*Energia potențială electrică în nucleu.*

1.11. Într-o primă aproximație structura electrică a nucleelor atomilor grei poate fi concepută sub forma unor sfere de materie cu densitatea de sarcină de volum constantă și egală cu  $1,3 \cdot 10^{25} \text{C/m}^3$ . Care este variația energiei electrice, exprimată în jouli (J) și în megaelectronvolți (MeV), dacă un nucleu de uraniu, cu sarcina totală egală cu 92  $e$ , fisionează în două nuclee de sarcină și rază egale și care apoi se depărtează la distanță mare una de alta?

*Câmpul a două sarcini punctiforme.*

1.12. Două sarcini punctiforme se află pe axa  $x$ , o sarcină egală cu  $+e$  în punctul  $x = +2 \text{ cm}$ , și o sarcină egală cu  $-4e$  în punctul  $x = -2 \text{ cm}$ .

a) Să se calculeze mărimea și direcția câmpului electric în punctul  $(0,3; 0)$  de pe axa  $y$ , aflând, întâi, componentele câmpului în acest punct.

b) Să se localizeze punctul în care câmpul este nul. Sînt mai multe asemenea puncte?



Un corp încărcat aflat într-un câmp.

1.13. O picătură de apă, cu diametrul de  $10^{-2}$  cm, poartă o sarcină negativă, astfel încît câmpul electric creat de această sarcină la suprafața sa este de  $6 \cdot 10^5$  V/m. Care trebuie să fie intensitatea unui câmp vertical pentru a împiedica căderea picăturii?

Cîmpul electric în atmosferă.

1.14. Există date cu privire la faptul că cîmpul electric la suprafața Pămîntului nici chiar în medie nu este zero. Să presupunem că prin mai multe măsurători, efectuate pe glob în același timp, se stabilește că intensitatea medie a cîmpului, vector orientat în jos, este egală cu 30 V/m.

Care este sarcina excedentară pe suprafață exprimată în sarcini electronice ( $e$ ) pe centimetru pătrat?

Cîmpul electric în atomul de hidrogen.

1.15. Atomul neutru de hidrogen în stare normală se comportă, în anumite privințe, ca o distribuție de sarcină electrică care constă dintr-o sarcină punctiformă de mărime  $+e$  înconjurată de o distribuție de sarcină negativă a cărei densitate este dată de  $-\rho(r) = Ce^{-2r/a_0}$ ,  $a_0$  este „raza Bohr“ egală cu  $0,53 \cdot 10^{-8}$  cm și  $C$  este o constantă, a cărei mărime se alege astfel încît sarcina negativă totală să fie exact  $e$ . Care este sarcina electrică totală în interiorul unei sfere de rază  $a_0$ ? Care este intensitatea cîmpului electric la această distanță de nucleu?

Problema este simplă dacă ne amintim principiul simetriei și al superpoziției.

1.16. O bară subțire elastică neconductoare este îndoită sub forma unui arc de cerc de rază 50 cm. Capetele se află la 2 cm unul de altul. Pe toată lungimea barei este uniform distribuită o sarcină pozitivă de  $10^{-9}$  C. Care este mărimea și direcția cîmpului electric în centrul cercului?

Legea lui Gauss.

1.17. a) O sarcină punctiformă  $q$  se află în centrul unui cub de latură  $d$ . Care este valoarea integralei  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$  pe o față a cubului?

b) Sarcina este deplasată în unul din colțurile cubului. Care este acum valoarea fluxului lui  $\mathbf{E}$  prin fiecare din fețele cubului?

Fețe plane cu sarcină superficială.

1.18. Două fețe plane infinite cu sarcină superficială de densitate  $\sigma = 2 \cdot 10^{-5}$  C/m<sup>2</sup> și  $\sigma = -4/3 \cdot 10^{-5}$  C/m<sup>2</sup>, sînt așezate paralel la distanța de 2 cm una de alta. Să se studieze cîmpul electric al acestui sistem. Să presupunem, apoi, că cele două plane se intersectează sub un unghi drept. Arătați cum va fi cîmpul în fiecare din cele patru regiuni în care a fost împărțit spațiul.



**1.19.** Pe o suprafață plană infinită distribuția superficială de sarcină  $\sigma$  este uniformă. În dreapta ei și paralel cu ea se află un strat infinit de sarcină de grosime  $d$  și densitate de sarcină de volum  $\rho$  uniformă. Toate sarcinile sînt fixe. Să se determine  $E$ .

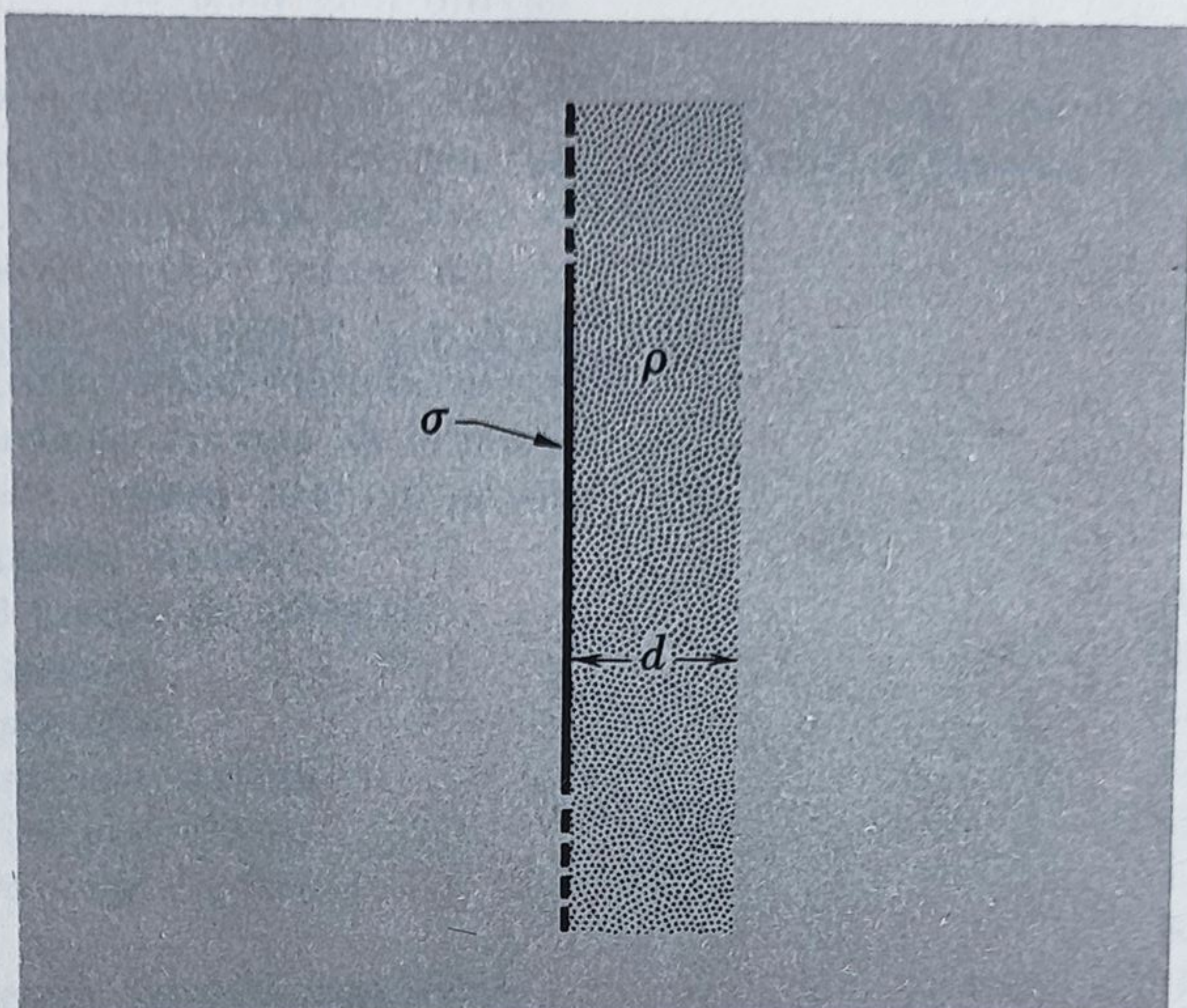


Fig. 1a problema 1.19.

**1.20.** Unul din faptele remarcabile exprimate în legea lui Coulomb este acela că sarcinile de același semn se resping cu aceeași forță cu care sarcinile de semn contrar se atrag. Pentru a arăta că această afirmație nu este o chestiune obținută de definiție și pentru a aprofunda unele aplicații ale ei, să ne imaginăm o lume care diferă de a noastră în această privință. În această lume unitatea de sarcină este definită prin forța care acționează între sarcinile de același semn. Două sarcini pozitive egale, aflate la 1 m una de alta, se resping cu o forță egală cu 1 newton; același lucru este valabil și pentru sarcinile negative. Legea variației invers proporționale cu pătratul distanței și principiul superpoziției sînt valabile. Dar o unitate de sarcină pozitivă și o unitate de sarcină negativă se atrag cu o forță de  $k$  newtoni,  $k > 1$ . Să se arate că în această lume, se poate întîlni o situație în care trei sarcini concentrate se pot atrage. Dar în lumea noastră, este posibil? Este necesară în lumea imaginată generalizarea noțiunii de sarcină? Ce se poate spune despre noțiunea de cîmp electric? Cîte măsurători diferite ar trebui făcute, folosind sarcini de probă într-un punct din spațiu, pentru a putea determina forța ce acționează asupra unui corp oarecare încărcat, așezat într-un mod oarecare în acest punct? Pentru  $k < 1$ , să se găsească o situație posibilă în lumea imaginată dar complet diferită de tot ce apare în lumea noastră.



*Distribuția cilindrică de sarcină.*

**1.21.** Teorema pe care am demonstrat-o pentru câmpul unei distribuții sferice simetrice, și anume că câmpul în exterior este același cu câmpul creat dacă întreaga sarcină s-ar afla în centru și câmpul în interior este zero, poate fi demonstrată analog în cazul unei distribuții cilindrice simetrice, extinsă la infinit pe direcția axei — de exemplu, un tub lung încărcat.

*Câmpul unei sfere cu densitate de sarcină uniformă.*

**1.22.** Să considerăm o distribuție sferică de sarcină cu densitatea constantă  $\rho_0$  de la  $r = 0$  până la  $r = a$  și egală cu zero pentru  $r > a$ . Să se determine câmpul electric pentru toate valorile lui  $r$  și pentru cele mai mici decât  $a$  și pentru cele mai mari decât  $a$ . Apare oare o discontinuitate a câmpului, trecând prin suprafața distribuției de sarcină, pentru  $r = a$ ? Apare oare aceeași discontinuitate pentru  $r = 0$ ?



## Capitolul 2

# Potențialul electric

2.1. Integrala de linie a câmpului electric	54
2.2. Diferența de potențial și funcția de potențial	56
2.3. Gradientul unei funcții scalare	57
2.4. Obținerea câmpului din potențial	59
2.5. Potențialul unei distribuții de sarcină	60
<i>Potențialul a două sarcini punctiforme</i>	60
<i>Potențialul unui conductor lung (încărcat)</i>	61
2.6. Disc uniform încărcat	62
2.7. Forța ce acționează asupra sarcinii superficiale	68
2.8. Energia unui câmp electric	71
2.9. Divergența unei funcții vectoriale	73
2.10. Teorema lui Gauss și forma diferențială a legii lui Gauss	75
2.11. Divergența în coordonate carteziane	75
2.12. Laplaceanul	79
2.13. Ecuația lui Laplace	81
2.14. Deosebirea dintre fizică și matematică	82
2.15. Rotorul unei funcții vectoriale	83
2.16. Teorema lui Stokes	86
2.17. Rotorul în coordonate carteziane	86
2.18. Semnificația fizică a rotorului	89
Probleme	95



## 2.1. INTEGRALA DE LINIE A CÂMPULUI ELECTRIC

Presupunem că câmpul unei distribuții oarecare staționare de sarcini electrice este  $\mathbf{E}$ . Notăm cu  $P_1$  și  $P_2$  două puncte oarecare în câmp. Integrala de linie a lui  $\mathbf{E}$  între cele două puncte pe un drum oarecare, ce unește  $P_1$  cu  $P_2$ , este egală cu  $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  (fig. 2.1). Asta înseamnă că: împărțim drumul în segmente mici, fiecare segment fiind reprezentat printr-un vector ce unește capetele sale; luăm produsul scalar dintre vectorul segmentului și câmpul  $\mathbf{E}$  în acest loc; adunăm aceste produse pe tot drumul. Integrala, ca de obicei, este limita acestei sume când lungimea segmentelor devine din ce în ce mai mică și numărul lor tinde spre infinit.

Să luăm un exemplu. Presupunem că avem un câmp electric  $\mathbf{E}$  ale cărei componente sînt  $E_x = Ky$  și  $E_y = Kx$ , unde  $K$  este o constantă. Aceasta este una din formele posibile ale unui câmp electrostatic. (Vom învăța curînd, cum poate fi acesta cu ușurință recunoscut.) În figura 2.2,  $a$  sînt reprezentate cîteva linii de câmp. Care este valoarea integralei de linie  $\mathbf{E}$ , între punctele  $A$  și  $C$ , pe drumul  $ABC$ , de exemplu? Vectorul ce reprezintă un segment elementar este:

$$d\mathbf{s} = \hat{x} dx + \hat{y} dy \quad (1)$$

iar vectorul  $\mathbf{E}$ , în acest caz, este

$$\mathbf{E} = K(\hat{x}y + \hat{y}x) \quad (2)$$

Pentru o porțiune elementară oarecare, produsul scalar este

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = K(y dx + x dy) \quad (3)$$

Pe porțiunea de la  $A$  la  $B$ ,  $y = 2x$  și  $dy = 2dx$ . Prin urmare,

$$\begin{aligned} \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= K \int_A^B (y dx + x dy) = K \int_0^1 (2x dx + \\ &+ 2x dx) = 4K \int_0^1 x dx = 2K \end{aligned} \quad (4)$$

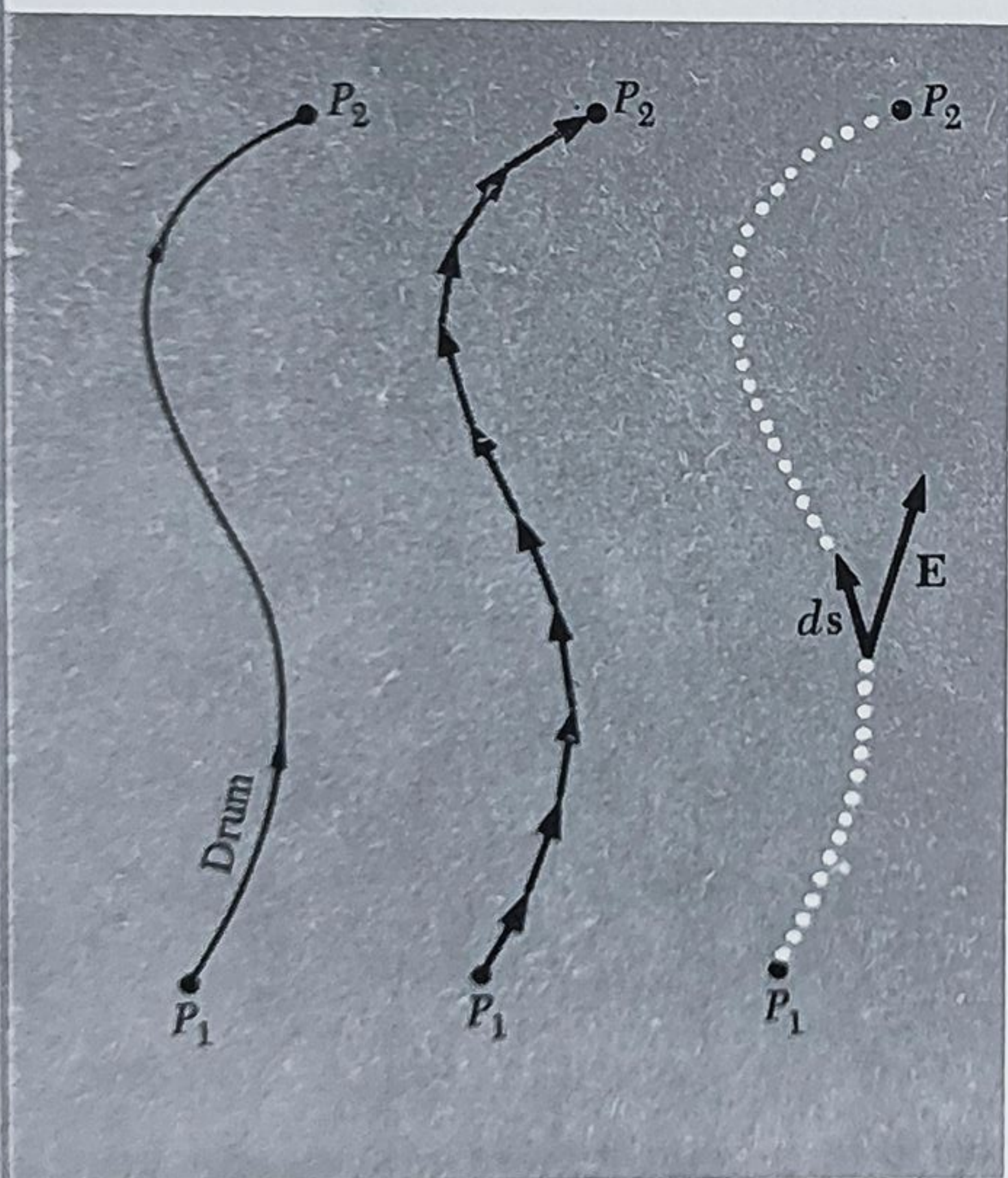


Fig. 2.1. Se indică împărțirea în segmente elementare  $d\mathbf{s}$ .



Pe porțiunea de la  $B$  la  $C$ ,  $y = 2$  și  $dy = 0$ .

$$\begin{aligned} \int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= K \int_B^C (y dx + x dy) = \\ &= K \int_1^2 2 dx = 2K \end{aligned} \quad (5)$$

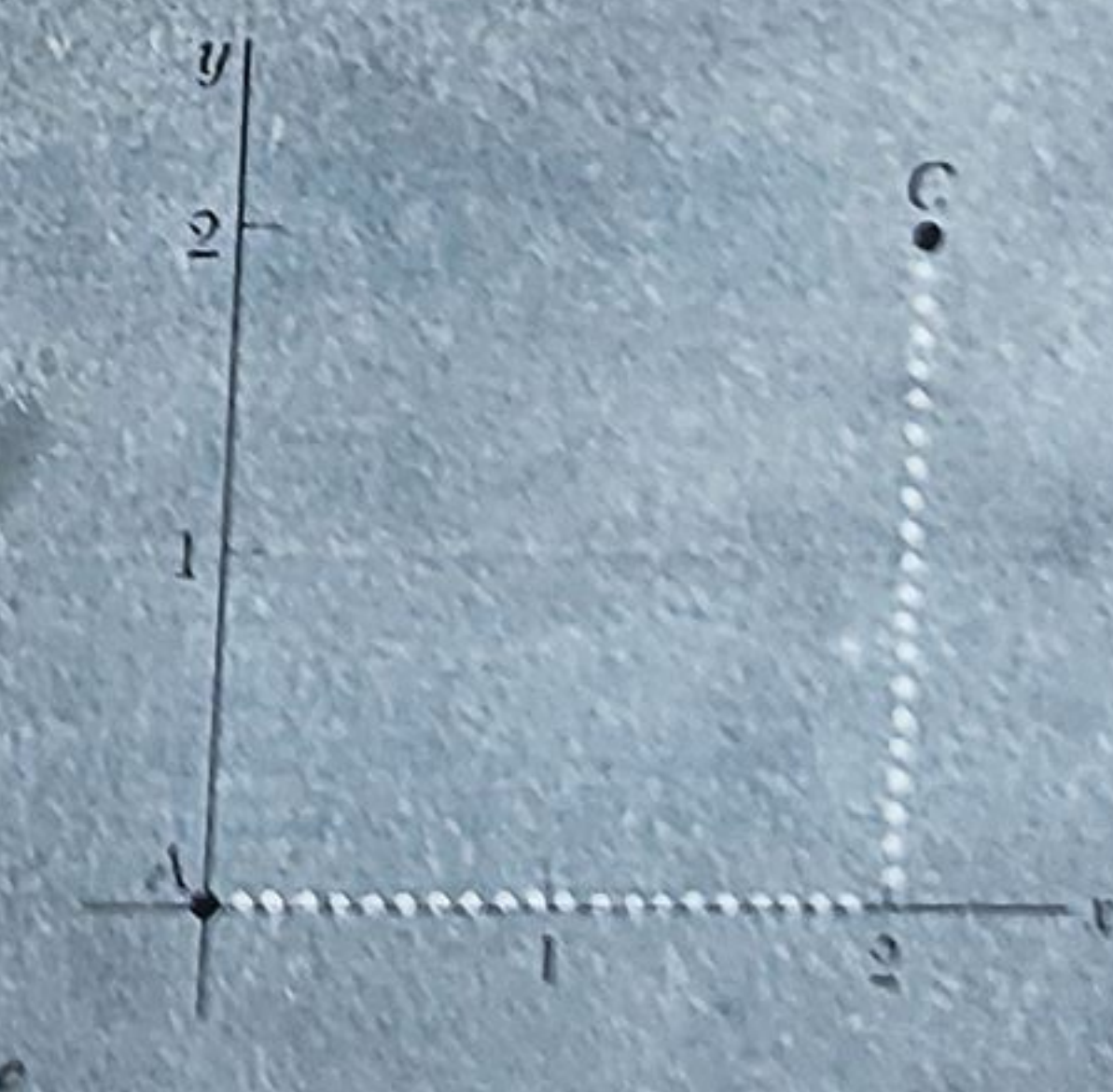
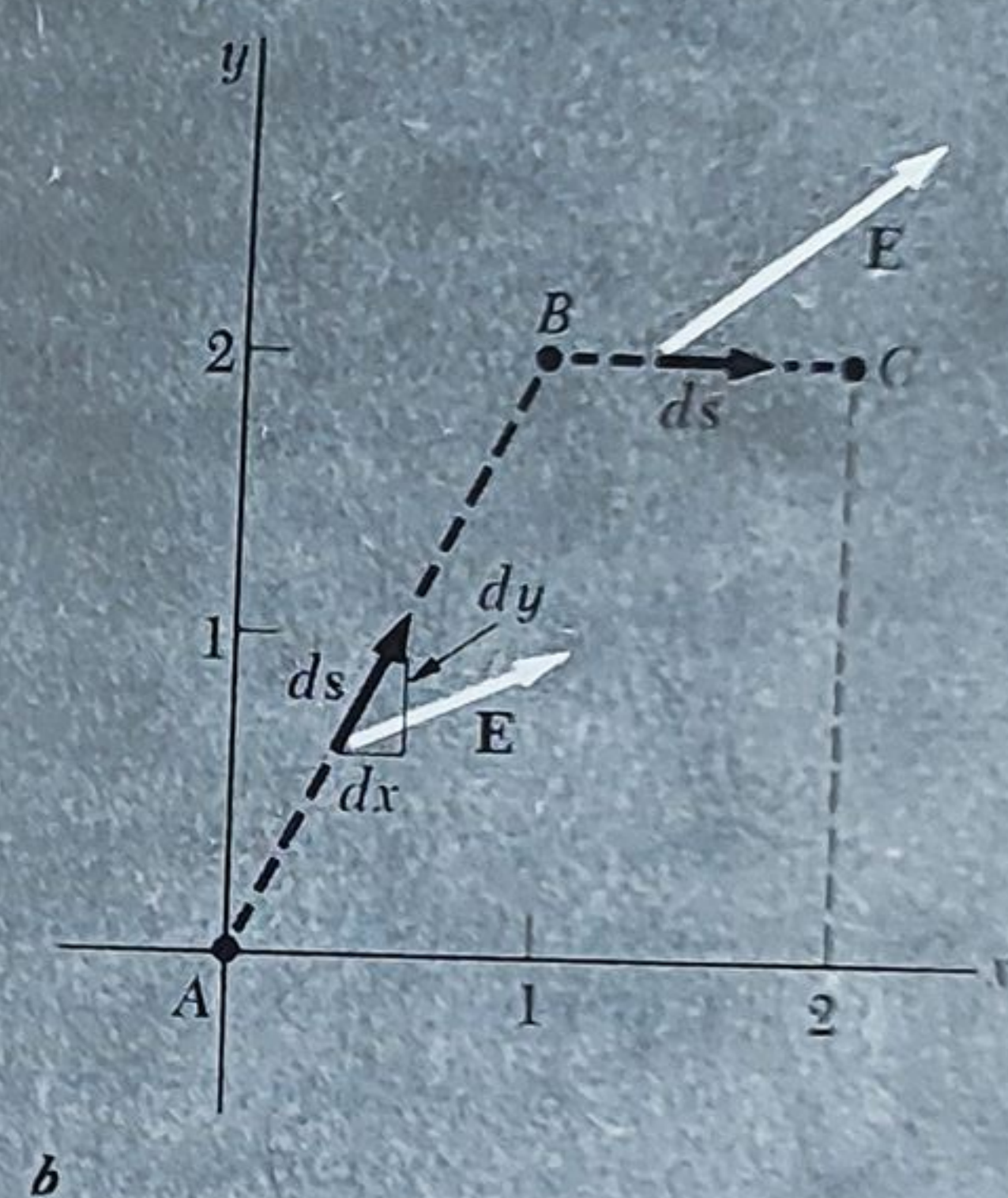
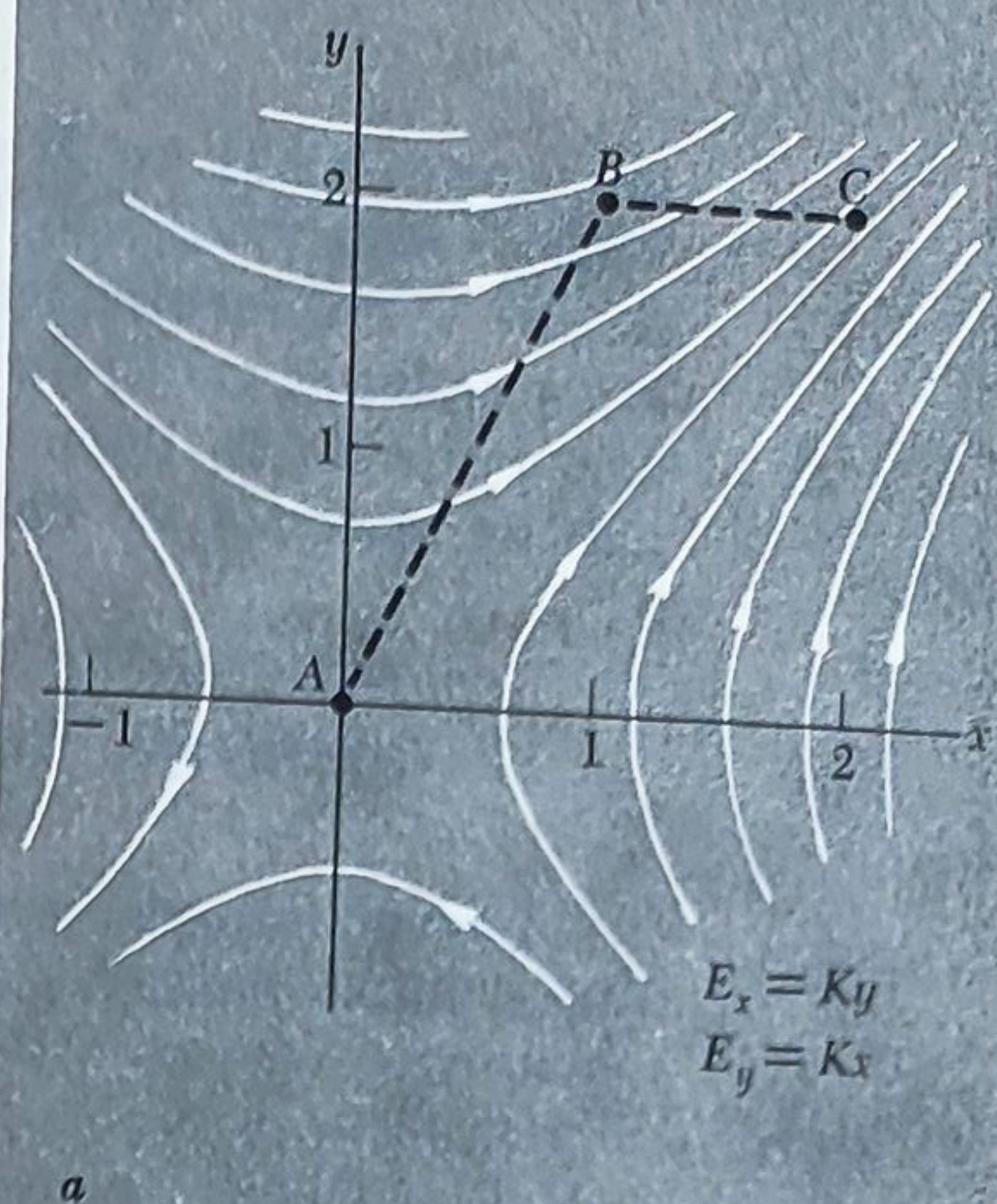
Prin urmare, integrala de linie pe drumul  $ABC$  este  $2K + 2K$  adică  $4K$ .

Cîmpul electric al unei sarcini punctiforme este radial și mărimea lui depinde doar de raza  $r$ . Dacă  $P_1$  și  $P_2$  sînt două puncte oarecare în cîmpul unei sarcini punctiforme, este destul de evident că integrala de linie a lui  $\mathbf{E}$  este aceeași indiferent de forma drumului ce unește aceste puncte. Aceasta rezultă direct din demonstrația folosită în § 1.5 și ilustrată în figura 1.5, pentru obținerea lucrului mecanic efectuat la deplasarea unei sarcini într-un cîmp central de forțe. De fapt, singura diferență între integrala de linie a forței  $\mathbf{F}$  exercitate asupra sarcinii de probă  $q$  și integrala de linie a lui  $\mathbf{E}$  — cîmpul în care se mișcă sarcina de probă — este factorul  $q$ . Orice cîmp electrostatic reprezintă, pur și simplu, o suprapunere a cîmpurilor produse de anumite sarcini, așa cum reiese din ecuațiile 1.14 și 1.15. Prin urmare, în orice asemenea cîmp, integrala de linie a lui  $\mathbf{E}$  — cîmpul total creat de toate sursele — nu trebuie să depindă de drum:

$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  are aceeași valoare pentru oricare din drumurile ce unesc punctele  $P_1$  cu  $P_2$  dintr-un cîmp electrostatic.

Ca exemplu, să calculăm integrala de linie de la  $A$  la  $C$  (fig. 2.2,  $c$ ), pe drumul dintre punctele  $(2, 0)$ , cîmpul  $\mathbf{E}$  fiind același ca în cazul precedent. Pe prima porțiune, pe axa  $x$  între origine și  $x = 2$ , cîmpul este perpendicular pe deplasare astfel încît produsul  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  este zero. Pe a doua porțiune  $E_y = Kx = 2K$  și lungimea acestui

Fig. 2.2. (a) Un drum particular  $ABC$  în cîmpul electric.  $E_x = Ky$ ,  $E_y = Kx$ . Sînt reprezentate cîteva linii de cîmp. (b) Calculul integralei de linie  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  pe acest drum (v. ec. 3-5). (c) Un alt drum între aceleași puncte.





drum este egală cu 2 unități. Astfel, obținem pentru integrala de linie, aceeași valoare ca mai înainte,  $4K$ . De fapt, știind că integrala de linie trebuie să fie independentă de drum, nu are sens s-o calculăm pentru un drum de forma  $ABC$ . În practică nu va trebui să calculăm prea des valoarea unei integrale de linie. Scopul urmărit în exemplu este clarificarea noțiunii de integrală de linie.

## 2.2. DIFERENȚA DE POTENȚIAL ȘI FUNCȚIA DE POTENȚIAL

Întrucît integrala de linie în câmpul electrostatic este independentă de drum, putem defini o mărime scalară  $\varphi_{21}$ , în modul următor:

$$\varphi_{21} = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (7)$$

Atunci,  $\varphi_{21}$  este *lucrul mecanic pe unitatea de sarcină* pentru a deplasa o sarcină pozitivă în câmpul  $\mathbf{E}$ , din punctul  $P_1$  în punctul  $P_2$ . Înseamnă că  $\varphi_{21}$  este o funcție scalară univocă de cele două poziții  $P_1$  și  $P_2$ , pe care o denumim *diferența de potențial* electric dintre cele două puncte.

În sistemul de unități internațional (SI) diferența de potențial se măsoară în volți\*.

Pentru a deplasa o sarcină de 1 coulomb între două puncte cu diferența de potențial egală cu 1 volt se efectuează un lucru mecanic de 1 joule ( $10^7$  ergi).

Să presupunem că-l fixăm pe  $P_1$ . Atunci  $\varphi_{21}$  depinde doar de  $P_2$ , adică este funcție de coordonatele de poziție  $x, y, z$ . Ținînd cont de modul cum l-am determinat pe  $P_1$ , putem scrie funcția simplu, fără indici  $\varphi(x, y, z)$ . Spunem că funcția  $\varphi$  este *potențialul* asociat câmpului vectorial  $\mathbf{E}$ . Este o funcție scalară de poziție sau un câmp scalar (ceea ce este același lucru). Valoarea ei într-un punct este un număr (exprimat în unități de lucru mecanic pe unitatea de sarcină) și nu i se asociază nici o direcție. Dacă câmpul vectorial  $\mathbf{E}$  este dat, funcția de potențial este determinată pînă la o constantă aditivă ce apare datorită alegerii arbitrare a lui  $P_1$ .

Ca exemplu, să găsim potențialul asociat câmpului electric descris în figura 2.2. Este convenabil să amplasăm punctul  $P_1$  în origine, notată în figura 2.2 cu  $A$ . Pentru a calcula

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (8)$$

din acest punct de referință și pînă la un punct oarecare  $(x, y)$  este mai ușor de ales segmentul punctat din figura 2.2,  $c$ :

$$\varphi(x, y) = - \int_{(0,0)}^{(x,y)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{(0,0)}^{(x,y)} E_x dx - \int_{(0,0)}^{(x,y)} E_y dy. \quad (9)$$

\* Ca și coulombul, amperul și ohmul, voltul era folosit ca unitate „practică” de măsură cu mult înainte de a fi pus la punct sistemul internațional complet al unităților electrice de măsură.



Așa cum s-a mai amintit, prima integrală este nulă, întrucât în acest câmp, componenta  $E_x$  este zero pe axa  $x$ . A doua integrală se rezolvă pentru  $x$  constant și întrucât  $E_y = Kx$ , integrala devine

$$-Kx \int_0^y dy \quad (10)$$

a cărei valoare este  $-Kxy$ . Prin urmare, pentru acest câmp, potențialul este

$$\varphi = -Kxy \quad (11)$$

Se poate adăuga orice constantă. Ea indică doar faptul că punctul de referință în care potențialul este zero, a fost mutat în altă parte.

Trebuie să fim atenți să nu confundăm *potențialul*  $\varphi$  asociat unui câmp dat  $E$  cu *energia potențială* a unui sistem de sarcini. Energia potențială a unui sistem de sarcini este lucrul mecanic total efectuat pentru a forma sistemul. De exemplu, în ecuația 1.8, am exprimat energia potențială  $U$  a sistemului de sarcini din figura 1.6. Potențialul electric  $\varphi(x, y, z)$  asociat câmpului din figura 1.6 va fi lucrul mecanic pe unitatea de sarcină efectuat pentru a aduce unitatea de sarcină de probă pozitivă de la infinit în punctul  $(x, y, z)$  în câmpul acestui sistem de opt sarcini.

### 2.3. GRADIENTUL UNEI FUNCȚII SCALARE

Fiind dat câmpul electric putem găsi funcția de potențial electric. Dar putem proceda și invers, cunoscând potențialul putem determina câmpul. Din ecuația (7) se vede că câmpul, într-un anumit sens, este *derivata* funcției potențiale. Pentru a preciza această idee, introducem *gradientul* unei funcții scalare de poziție. Fie  $f(x, y, z)$  o funcție oarecare de coordonate, continuă și diferentiabilă. Cu ajutorul derivatelor ei parțiale  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial f/\partial y$  și  $\partial f/\partial z$  putem construi în fiecare punct din spațiu un vector, ale cărui componente  $x, y, z$  să fie egale cu derivatele parțiale respective\*. Acest vector îl numim *gradientul* lui  $f$  — grad  $f$ , sau  $\nabla f$ .

$$\nabla f = \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (12)$$

\* Amintim cititorului că derivata parțială a funcției  $f(x, y, z)$  în raport cu  $x$ ,  $\partial f/\partial x$ , reprezintă viteza de variație a funcției când  $x$  variază, celelalte variabile  $y$  și  $z$  fiind menținute constante. Mai precis

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

De exemplu, dacă  $f = x^2 y z^3$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz^3 \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 z^3 \frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2 y z^2.$$



$\nabla f$  este un vector care determină variația funcției  $f$  în jurul unui punct. Componenta pe  $x$  a acestuia, este derivata parțială a lui  $f$  în raport cu  $x$  care măsoară viteza de variație a lui  $f$  pe direcția lui  $x$ . Direcția vectorului  $\nabla f$  într-un punct oarecare este direcția de mișcare, pornind de la acest punct, pentru creșterea cea mai rapidă a funcției  $f$ . Presupunem că avem de-a face cu o funcție de două variabile  $x$  și  $y$ , astfel încât funcția să poată fi reprezentată în sistemul tridimensional printr-o suprafață. Stînd într-un punct oarecare pe această suprafață, vedem că în unele direcții suprafața este mai ridicată, în altele mai coborîtă. Există o direcție, în care dacă facem un mic pas, ne ridicăm mai sus decît dacă am face un pas de aceeași mărime, în oricare altă direcție. Gradientul funcției este un vector, a cărui direcție coincide cu cea mai mare curbura și a cărui mărime este egală cu panta măsurată în această direcție.

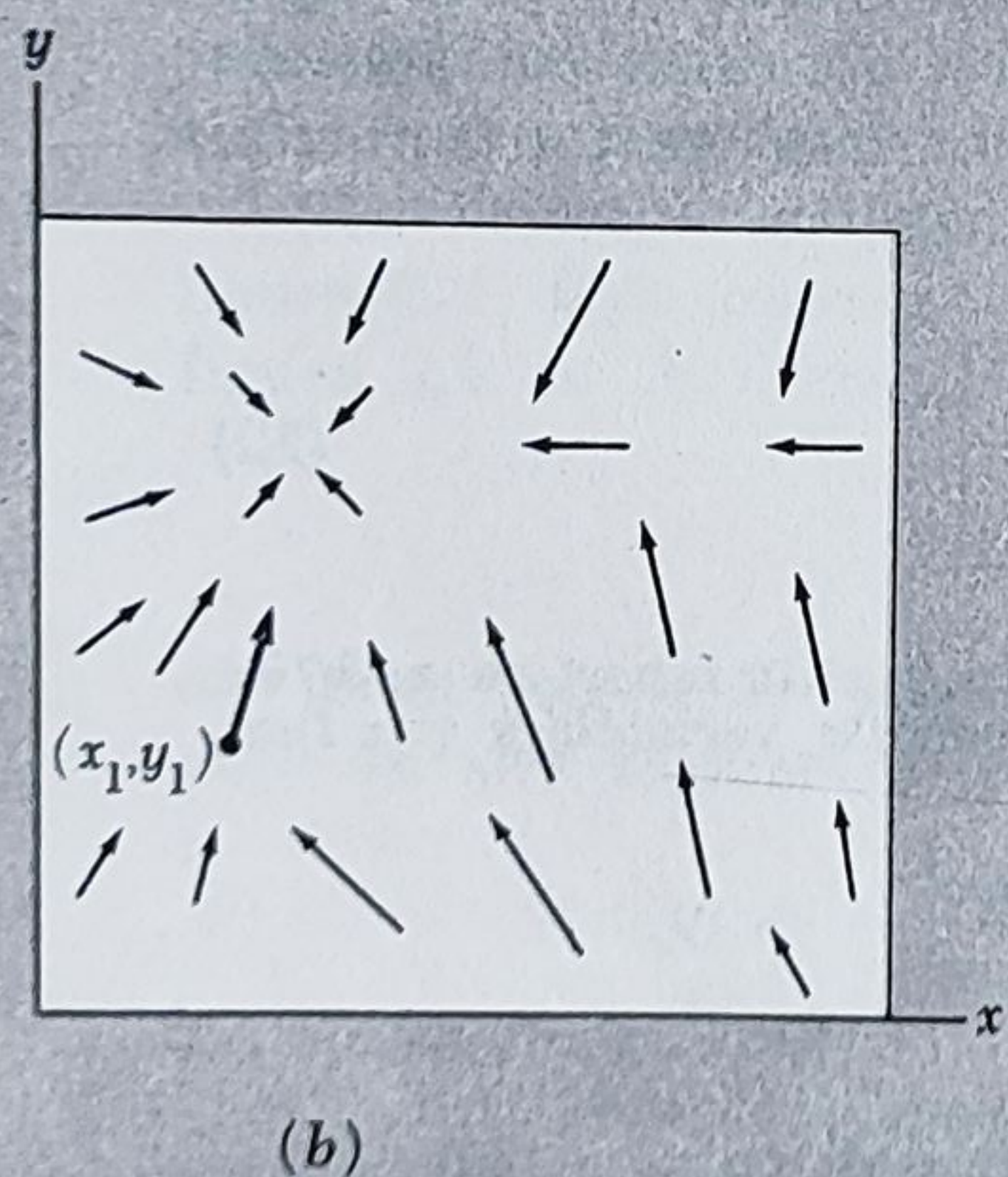
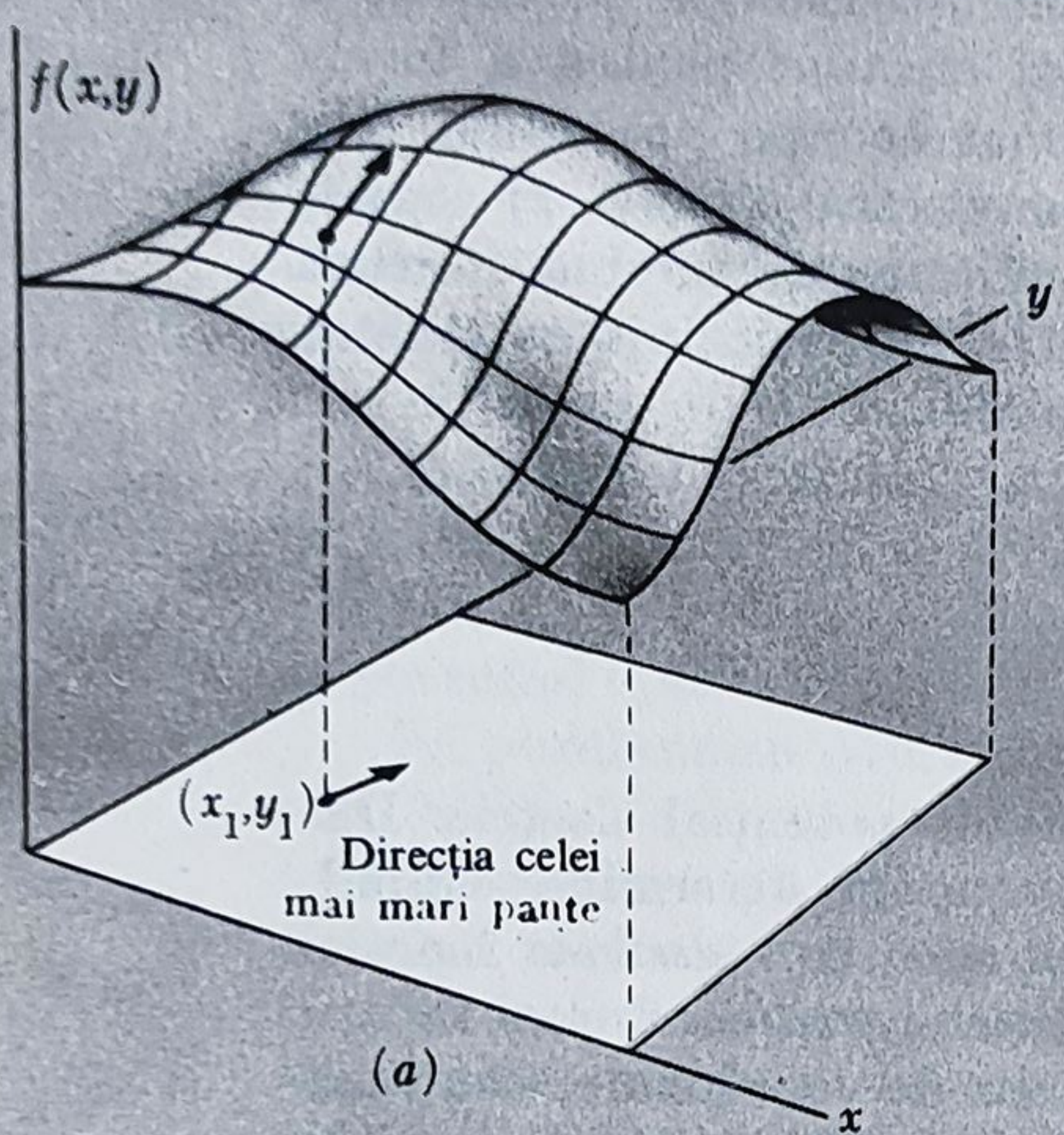
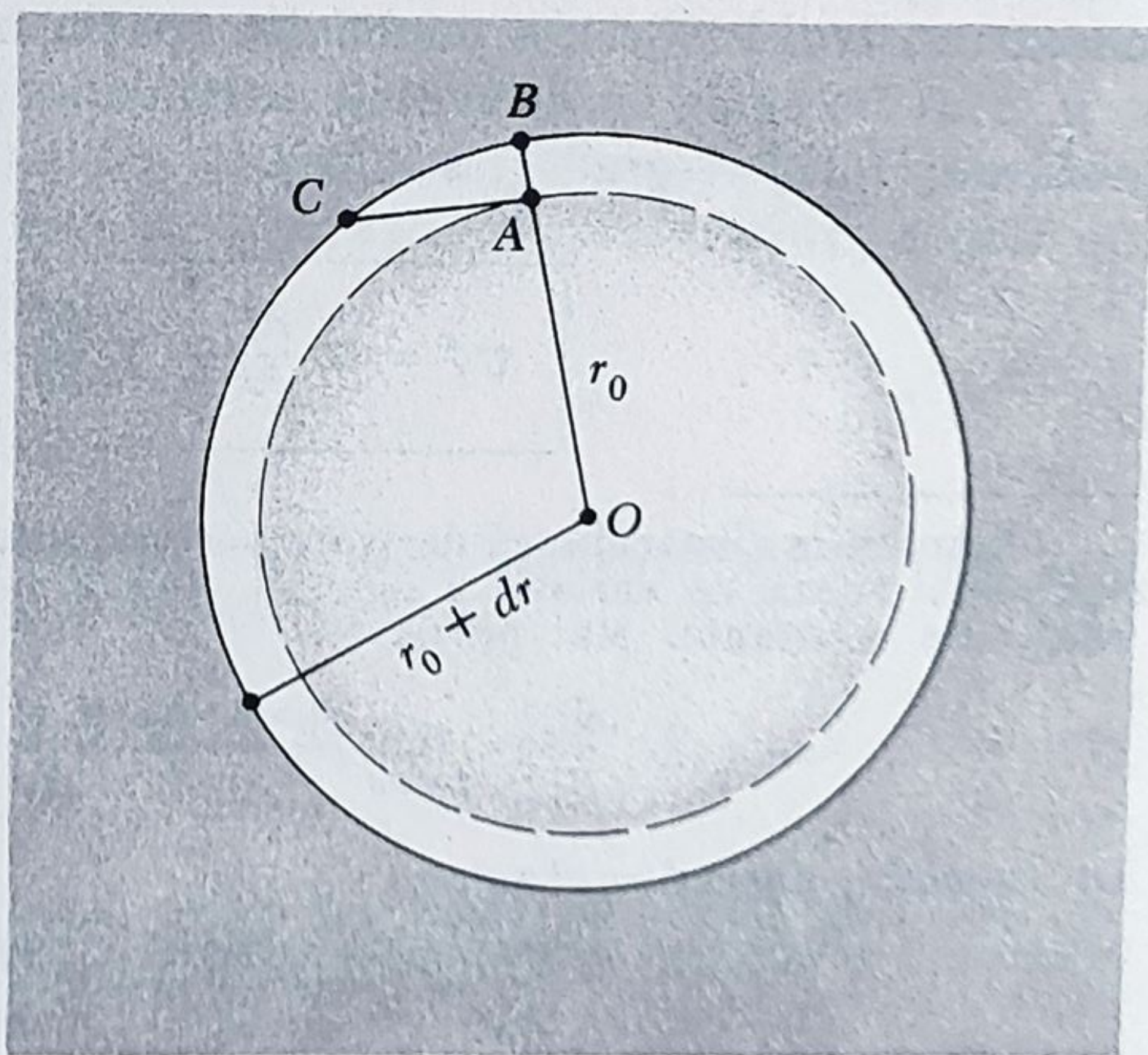


Figura 2.3 ne ajută să ne reprezentăm cele afirmate. Să luăm o funcție oarecare de două coordonate  $x$  și  $y$ , reprezentată prin suprafața  $f(x, y)$  din figura 2.3, *a*. În punctul  $(x_1, y_1)$ , suprafața este mai ridicată în direcția ce face un unghi de aproximativ  $80^\circ$  cu sensul pozitiv al axei  $x$ . Gradientul funcției  $f(x, y)$ ,  $\nabla f$ , este o funcție vectorială de  $x$  și  $y$ . Modul de distribuție a gradientului este indicat în figura 2.3, *b*, printr-un

Fig. 2.3. Funcția scalară  $f(x, y)$  este reprezentată printr-o suprafață (*a*). Săgețile din (*b*) reprezintă funcția vectorială  $\text{grad } f$ .

Fig. 2.4. Dacă  $f$  este funcție numai de  $r$ , drumul cel mai scurt, pentru o variație dată a lui  $f$ , este pe direcția razei.





număr de vectori, în diferitele puncte ale spațiului bidimensional, care include și punctul  $(x_1, y_1)$ . Funcția vectorială  $\nabla f$ , definită în ecuația (12) este, pur și simplu, o extindere a acestei idei la spațiul tridimensional. (Trebuie să fim atenți să nu confundăm figura 2.3,  $a$  cu spațiul real tridimensional  $x, y, z$ ; aici, a treia coordonată este valoarea funcției  $f(x, y)$ ).

Ca exemplu de funcție în spațiul tridimensional, să presupunem că funcția  $f$  depinde doar de  $r$ , unde  $r$  este distanța de la un punct fix oarecare  $O$ . Pe sfera cu centrul în  $O$  și de rază  $r_0$  și  $f = f(r_0)$  este constantă. Pe o sferă puțin mai mare, de rază  $r_0 + dr$ , ea este de asemenea constantă și are valoarea  $f(r_0 + dr)$ . Dacă vrem să trecem de la  $f(r_0)$  la  $f(r_0 + dr)$ , drumul cel mai scurt este pe direcția razei (de la  $A$  la  $B$ ) și nu de la  $A$  la  $C$  (fig. 2.4). „Panta” lui  $f$  este cea mai mare pe direcția razei, astfel încât  $\nabla f$  în orice punct este un vector radial. De fapt  $\nabla f = \hat{r}(df/dr)$ ,  $\hat{r}$  reprezentînd în acest caz, pentru orice punct, un vector unitar pe direcția razei.

## 2.4. OBTINEREA CÎMPULUI DIN POTENȚIAL

Acum este ușor de văzut că relația dintre funcția scalară  $f$  și funcția vectorială  $\nabla f$  este similară, cu excepția semnului minus, cu relația dintre potențialul  $\varphi$  și cîmpul  $\mathbf{E}$ . Să luăm valoarea lui  $\varphi$  în două puncte apropiate  $(x, y, z)$  și  $(x + dx, y + dy, z + dz)$ . Variația lui  $\varphi$ , trecînd de la primul punct în al doilea, este

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \quad (13)$$

Pe de altă parte, pornind de la definirea lui  $\varphi$ , variația mai poate fi exprimată ca

$$d\varphi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (14)$$

Vectorul deplasare infinitezimală  $d\mathbf{s}$  este  $\hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz$ . Astfel, dacă identificăm  $\mathbf{E}$  cu  $-\nabla\varphi$ , ecuațiile (13) și (14) devin identice. Ca urmare, cîmpul electric este egal cu minus gradientul potențialului:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\varphi} \quad (15)$$

Semnul minus arată că cîmpul electric este îndreptat dinspre regiunea cu potențial pozitiv înspre regiunea cu potențial negativ. Direcția vectorului  $\nabla\varphi$  este în direcția creșterii lui  $\varphi$ . Pentru clarificare, să ne întoarcem la exemplul cîmpului din figura 2.2. Din potențialul dat de ecuația (11),  $\varphi = -Kxy$ , putem găsi cîmpul electric de la care am plecat:

$$\mathbf{E} = -\nabla(-Kxy) = -\left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y}\right)(-Kxy) = K(\hat{x}y + \hat{y}x). \quad (16)$$



## 2.5. POTENȚIALUL UNEI DISTRIBUȚII DE SARCINĂ

Cunoaștem potențialul în cazul unei sarcini punctiforme singulare, întrucât am calculat lucrul mecanic necesar pentru a aduce o sarcină în apropierea alteia (cap. I, ec. 3). Potențialul, în oricare punct, în câmpul unei sarcini punctiforme izolate  $q$ , este  $q/4\pi\epsilon_0 r$ , unde  $r$  este distanța de la punctul respectiv pînă la sursa  $q$ , dacă se consideră că potențialul punctelor infinit depărtate de sursă este zero.

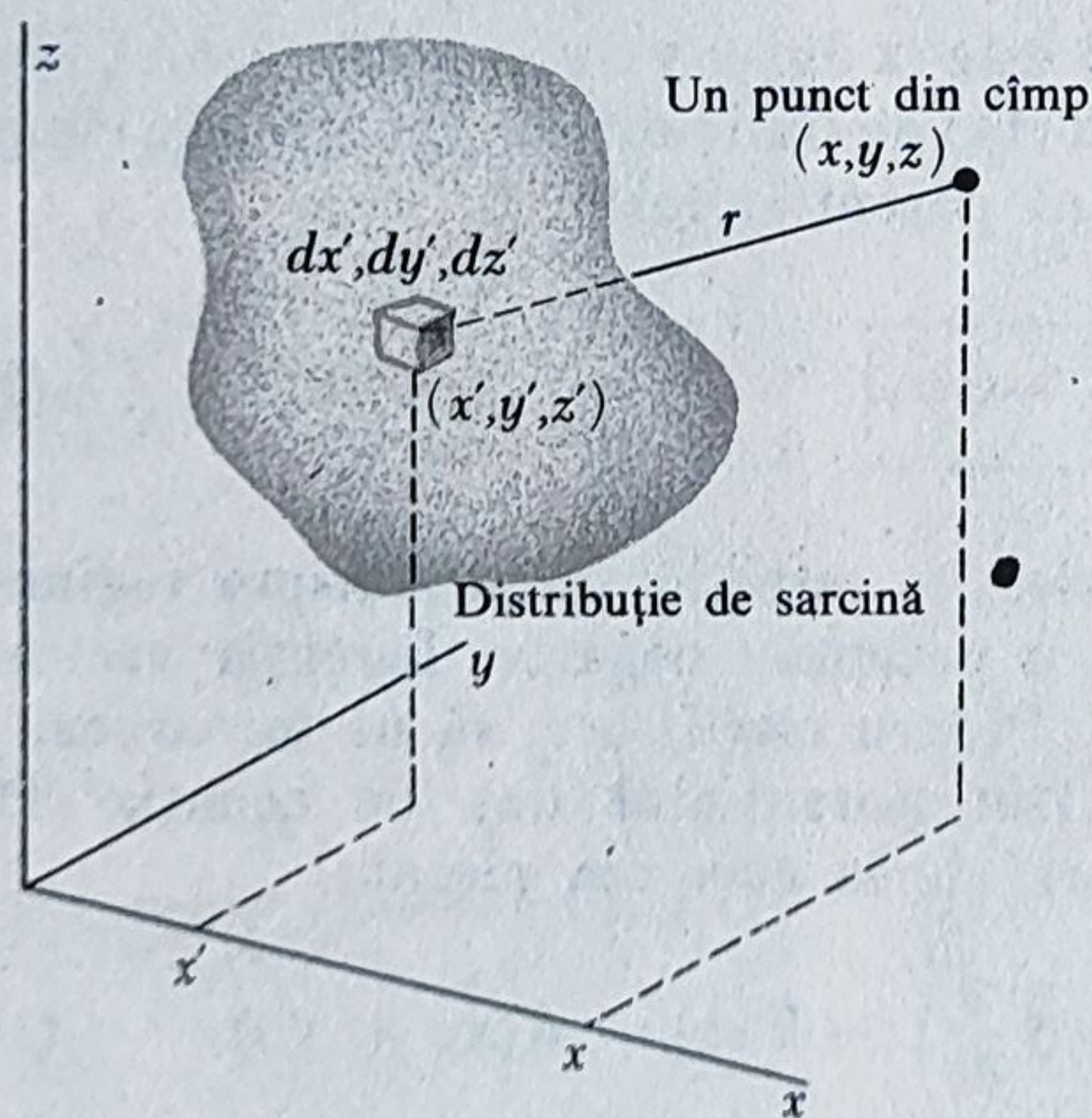
Principiul superpoziției trebuie să fie valabil și în cazul potențialelor, ca și pentru câmpuri. Dacă există cîteva surse, funcția de potențial este, pur și simplu, suma funcțiilor de potențial ale fiecărei surse luate aparte, plecînd de la faptul că stabilim un potențial zero unic. Dacă toate sursele sînt conținute într-o regiune finită, oarecare, este întotdeauna posibil și adeseori cel mai simplu, să considerăm potențialul zero la infinit. Dacă adoptăm această regulă, potențialul oricărei distribuții de sarcină poate fi exprimat prin integrala:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{pe toate sursele}} \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{r} \quad (17)$$

unde  $r$  este distanța de la elementul de volum  $dx' dy' dz'$  la punctul  $(x, y, z)$  în care urmează să se calculeze potențialul (fig. 2.5). Înseamnă că  $r = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$ . Observați diferența dintre această integrală și integrala care dă câmpul electric al distribuției de sarcină (ec. 1.15). Aici, la numitor apare  $r$  și nu  $r^2$  și integrala este un scalar nu un vector. Din funcția scalară de potențial  $\varphi(x, y, z)$  putem oricînd găsi câmpul electric luînd gradientul lui  $\varphi$  cu semnul minus, conform ecuației (15).

### Potențialul a două sarcini punctiforme

Să luăm cel mai simplu exemplu — potențialul a două sarcini punctiforme ca în figura 2.6. O sarcină pozitivă de 12 unități de sarcină se află la 3 cm de o sarcină negativă de  $-6$  unități. Potențialul în oricare punct



din spațiu este suma potențialelor produse de fiecare sarcină în parte. Potențialele, pentru cîteva puncte alese în spațiu, sînt redată în figură. Nu avem o sumă vectorială ci doar adunarea algebrică de mărimi scalare. De exemplu, în punctul aflat în dreapta, la 6 cm depărtare de sarcina pozitivă și 5 cm de sarcina negativă, potențialul are valoarea 240 V. La infinit valoarea potențialului tinde către zero. Pentru a aduce unitatea de sarcină pozitivă

Fig. 2.5. Fiecare element al distribuției de sarcină  $\rho(x', y', z')$  contribuie la potențialul  $\varphi$  din punctul  $(x, y, z)$ . Potențialul în acest punct este suma tuturor acestor contribuții (ec. 17).



Fig. 2.6. Potențialul electric  $\varphi$  în diferitele puncte ale sistemului de două sarcini punctiforme.  $\varphi$  tinde către zero la infinit.  $\varphi$  este dat în volți.

de la infinit într-un punct unde  $\varphi = 240 \text{ V}$  se efectuează un lucru mecanic de  $240 \text{ J}$ . Observați că două puncte din figură au  $\varphi = 0$ . Lucrul mecanic efectuat pentru aducerea oricărei sarcini într-unul din aceste puncte este zero. Se poate vedea că există un număr infinit de asemenea puncte care formează o suprafață ce cuprinde sarcina negativă. De fapt, locul geometric al punctelor ce au o anumită valoare  $\varphi$  este o suprafață, numită *suprafață echipotențială* care poate fi reprezentată, în spațiul bidimensional, printr-o curbă.

#### Potențialul unui conductor lung (încărcat)

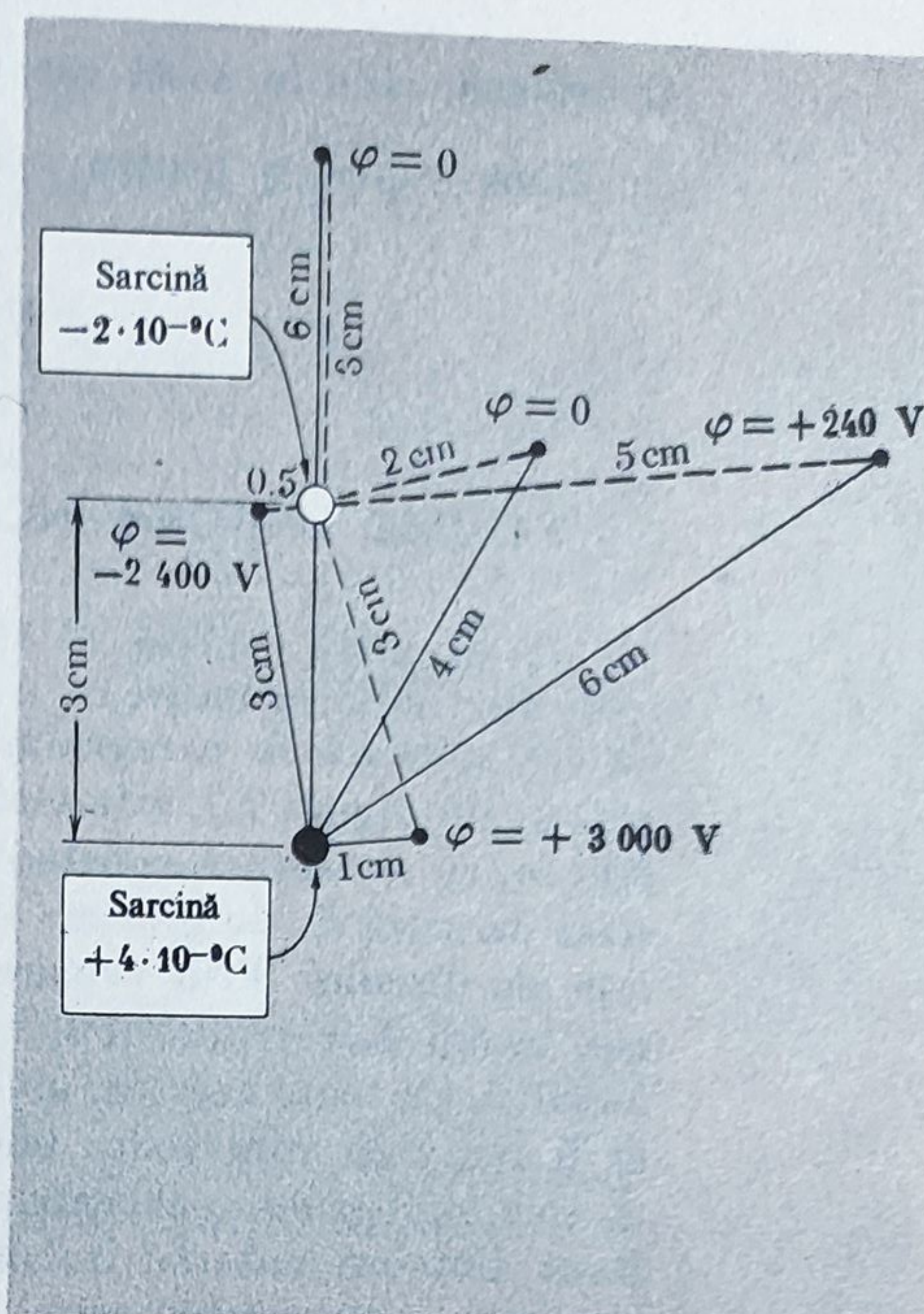
În folosirea ecuației (17) se impune o restricție: ea este valabilă numai în cazurile în care toate sursele sînt distribuite într-o regiune finită din spațiu. Cazul unui conductor lung încărcat, al cărui câmp  $E$  a fost studiat în paragraful 1.12, este unul din exemplele simple care scoate în evidență dificultățile ce apar în cazul unei distribuții infinite de sarcină. Dacă în acest sistem, luăm potențialul punctelor îndepărtate zero și efectuăm integrarea indicată în ecuația (15) asupra distribuției de sarcină, găsim că integrala este divergentă — obținem un rezultat infinit de mare. Acest rezultat era de așteptat întrucît, în acest caz, „infinitul” (adică spațiul aflat foarte departe de regiunea în care dorim să definim funcția potențială) cuprinde nu numai punctele îndepărtate de conductor dar și o bună parte din conductorul propriu zis! În găsirea câmpului electric al conductorului infinit lung nu apar asemenea dificultăți deoarece contribuția elementelor distribuției liniare de sarcină la câmp scade rapid cu distanța. Evident că, într-un sistem de sarcini distribuite la infinit, este mai bine să se localizeze potențialul zero undeva mai aproape. În acest caz, rămîne doar să calculăm diferența de potențial  $\varphi_{21}$ , dintre un punct oarecare  $(x, y, z)$  și punctul de referință ales, folosind relația fundamentală (17).

Pentru a vedea cum se aplică acest lucru în cazul unui conductor infinit lung încărcat, să alegem punctul de referință  $P_1$  la distanța  $r_1$  de conductor. Pentru a deplasa o sarcină din  $P_1$  într-un alt punct  $P_2$  aflat la distanța  $r_2$ , lucrul mecanic efectuat pe unitatea de sarcină este

$$\varphi_{21} = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{\lambda}{r} \right) dr = - \frac{\lambda \ln r_2}{2\pi\epsilon_0} + \frac{\lambda \ln r_1}{2\pi\epsilon_0}. \quad (18)$$

Asta înseamnă că potențialul electric al conductorului încărcat este de forma

$$\varphi = - \frac{\lambda \ln r}{2\pi\epsilon_0} + \text{const.} \quad (19)$$





Constanta, care în acest caz este  $\frac{\lambda \ln r_1}{2\pi\epsilon_0}$ , nu joacă nici un rol atunci când calculăm — grad  $\varphi$  pentru a obține câmpul  $\mathbf{E}$ . În acest caz

$$-\nabla\varphi = -\hat{\mathbf{r}} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\lambda \hat{\mathbf{r}}}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (20)$$

## 2.6. DISC UNIFORM ÎNCĂRCAT

Ca exemplu concret, să studiem potențialul și câmpul electric din jurul unui disc uniform încărcat. Această distribuție de sarcină este asemănătoare cu cea studiată în paragraful 1.10, numai că este limitată. Discul plan de rază  $a$ , din figura 2.7, este încărcat pozitiv sarcina fiind distribuită, pe suprafața sa, cu densitatea constantă  $\sigma$  exprimată în  $\text{C/m}^2$ . (Acesta este un singur strat de sarcină, de grosime infinitezimală și nu două straturi pe cele două fețe ale discului. Prin urmare, sarcina totală a sistemului este  $\pi a^2 \sigma$ ). Vom mai întâlni deseori distribuții superficiale de sarcină, mai ales pe conductori metalici. Cu toate acestea, obiectul descris de noi nu este un conductor. Dacă ar fi așa, cum vom vedea imediat, sarcina n-ar rămâne distribuită uniform, ci s-ar redistribui concentrându-se la marginea discului. Discul ales este făcut dintr-un material izolant, de exemplu — material plastic, pe care sarcina este „pulverizată” astfel încât fiecare centimetru pătrat al discului păstrează aceeași cantitate de sarcină.

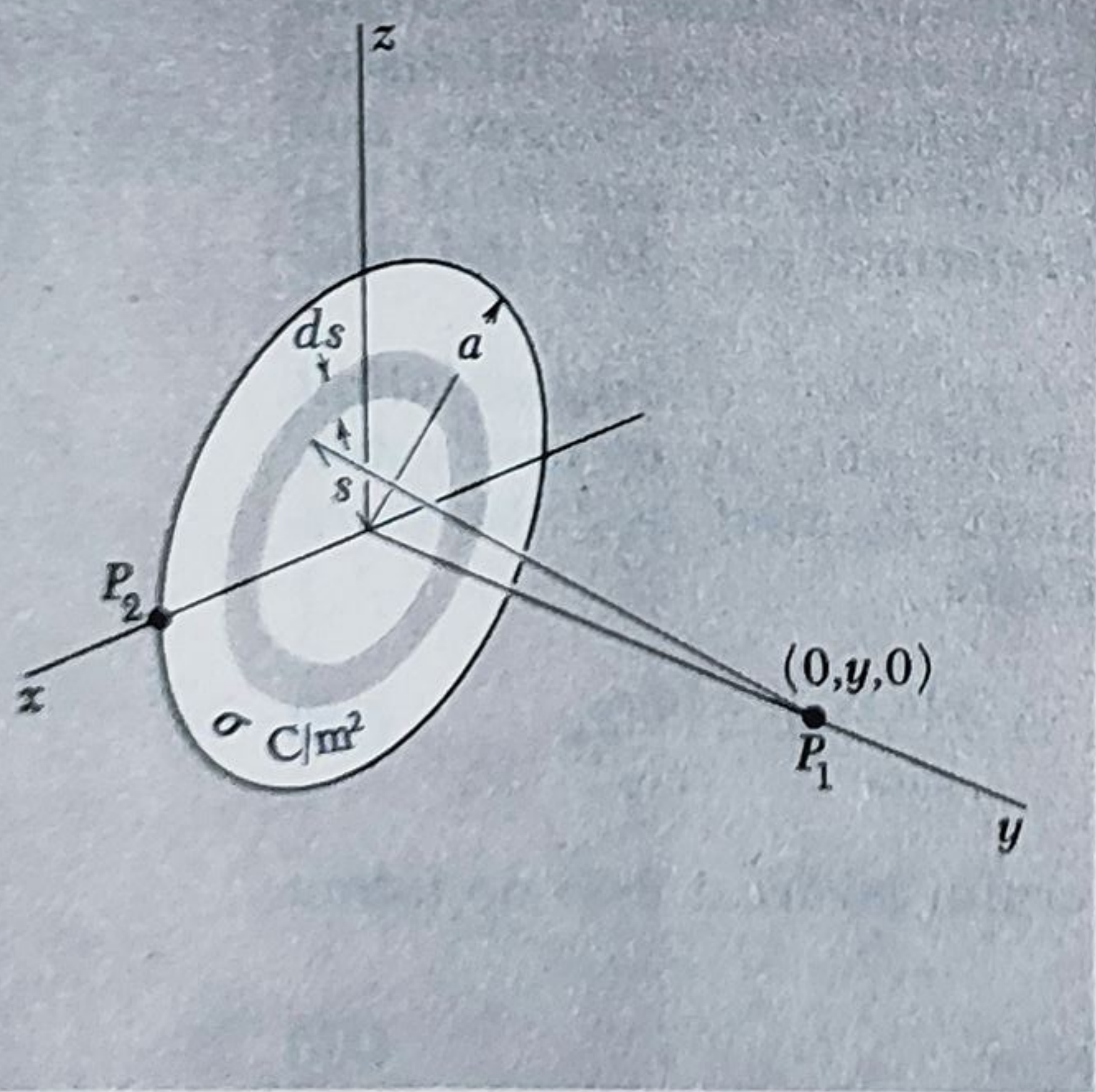
Să începem prin a determina potențialul într-un punct oarecare  $P_1$ , aflat pe axa de simetrie, pe care în cazul nostru am ales-o ca fiind axa  $y$ . Toate elementele de sarcină, cuprinse într-un segment subțire inelar al discului, se găsesc la aceeași distanță de punctul  $P_1$ . Dacă raza unui asemenea segment inelar este  $s$  și lățimea lui  $ds$ , suprafața segmentului este  $2\pi s ds$ .

Prin urmare, sarcina  $dq$  pe care o conține este  $dq = \sigma \cdot 2\pi s ds$ . Toate porțiunile din acest inel se găsesc la aceeași distanță de  $P_1$  egală cu  $r = \sqrt{y^2 + s^2}$ , astfel încât contribuția inelului la potențialul din punctul  $P_1$  este  $dq/4\pi\epsilon_0 r$  sau  $2\pi\sigma s ds/\sqrt{y^2 + s^2}$ . Pentru a găsi potențialul creat de discul întreg trebuie să integrăm asupra tuturor segmentelor inelare:

$$\begin{aligned} \varphi(0, y, 0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{2\pi\sigma s ds}{\sqrt{y^2 + s^2}} = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{y^2 + s^2} \right]_{s=0}^{s=a}. \end{aligned} \quad (21)$$

Integrala este simplă, făcând substituția  $u = y^2 + s^2$  ea devine  $\int u^{-1/2} du$ .

Fig. 2.7. Calculul potențialului în punctul  $P_1$  aflat pe axa unui disc electrizat uniform.





Înlocuind cu limitele, obținem:

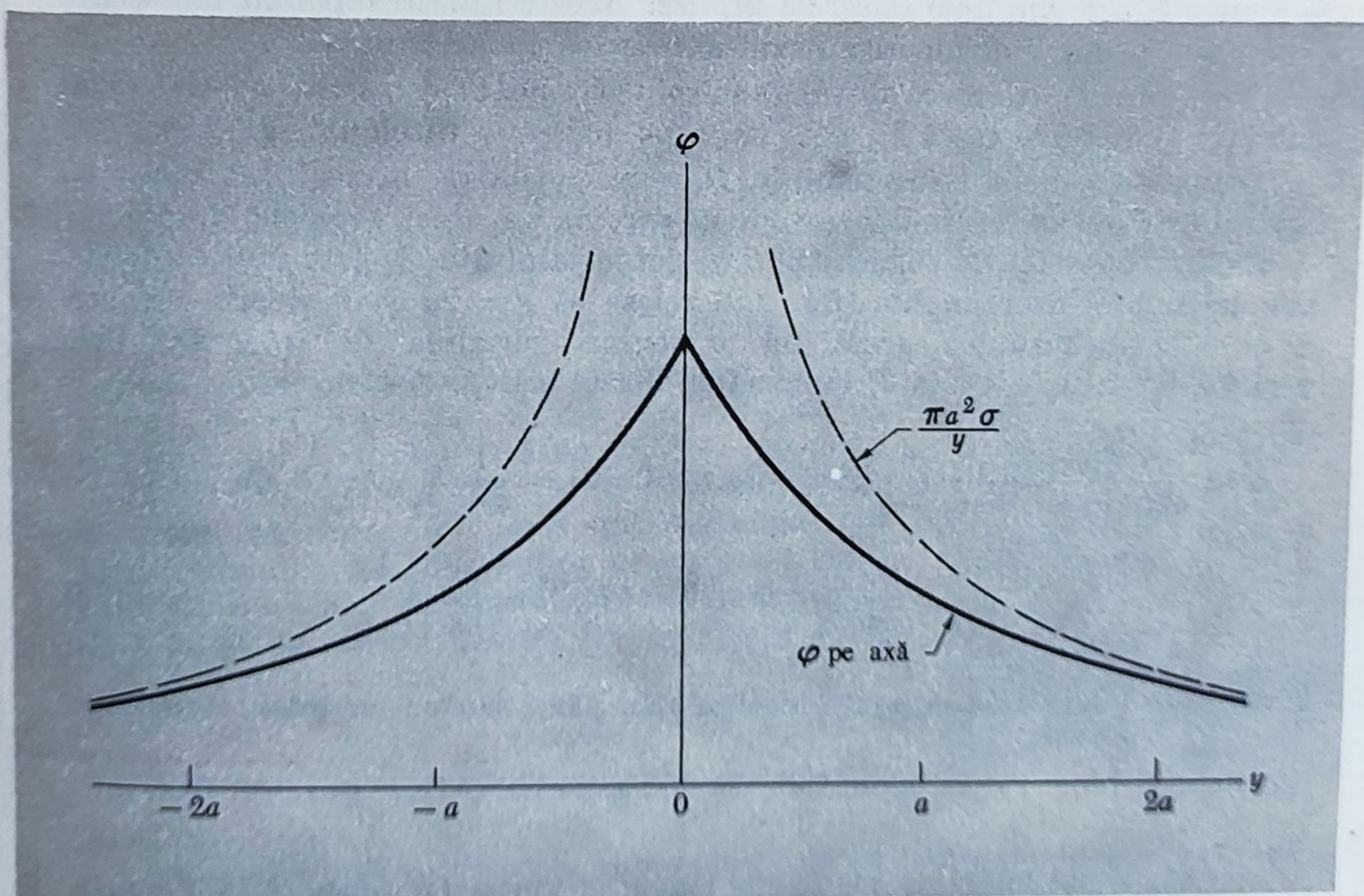
$$\varphi(0, y, 0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} [\sqrt{y^2 + a^2} - y] \text{ pentru } y > 0. \quad (22)$$

Mai trebuie precizat că rezultatul exprimat de ecuația (22) este valabil pentru toate punctele aflate pe axa  $y$  pozitivă. Pe baza simetriei fizice a sistemului (nu există nici o diferență între cele două fețe ale discului) este evident că valoarea potențialului este aceeași și pentru axa  $y$  negativă și pentru cea pozitivă; acest lucru reiese clar din ecuația (21) exprimată numai în funcție de  $y^2$ . Scriind, însă, ecuația (22) am ales semnul cînd am calculat rădăcina pătrată din  $y^2$  și ca urmare această ecuație este valabilă numai pentru axa  $y$  pozitivă. Expresia corectă pentru  $y < 0$  se obține alegînd altfel semnul și este

$$\varphi(0, y, 0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} [\sqrt{y^2 + a^2} + y] \text{ pentru } y < 0. \quad (23)$$

Avînd în vedere acest lucru, nu trebuie să ne surprindă găsirea unei singularități în  $\varphi(0, y, 0)$  pentru  $y = 0$ . Așa cum se vede în figura 2.8, în care potențialul este reprezentat în funcție de  $y$ , panta funcției variază brusc. Potențialul în centrul discului este  $\varphi(0, 0, 0) = 2\pi\sigma a$ . Aceasta este valoarea lucrului mecanic efectuat prin aducerea unității de sarcină pozitive de la infinit în centrul discului, indiferent de drum.

Fig. 2.8. Graficul potențialului pe axă. Curba punctată reprezintă potențialul unei sarcini punctiforme  $q = \pi a^2 \sigma$ .





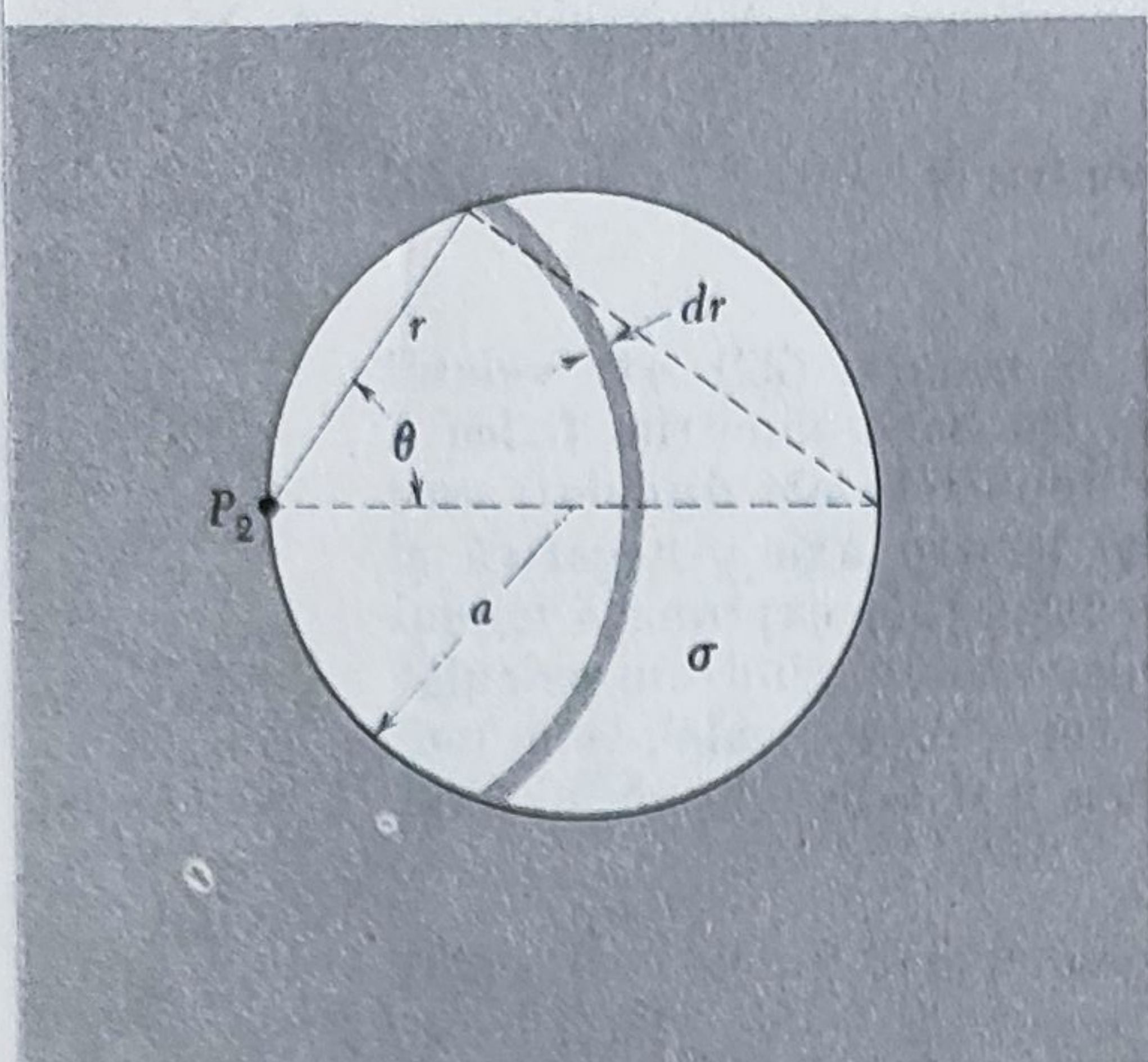


Fig. 2.9. Determinarea potențialului în punctul  $P_2$  de pe marginea discului electrizat uniform.

Este interesantă comportarea funcției  $\varphi(0, y, 0)$  pentru valori foarte mari ale lui  $y$ . Pentru  $y \gg a$ , ecuația (22) poate fi aproximată în modul următor:

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 + a^2} - y &= y \left[ \sqrt{1 + \frac{a^2}{y^2}} - 1 \right] = \\ &= y \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{y^2} \right) \dots - 1 \right] \approx \frac{a^2}{2y} \end{aligned} \quad (24)$$

Prin urmare

$$\varphi(0, y, 0) \approx \frac{\pi a^2 \sigma}{4\pi \epsilon_0 y} \text{ pentru } y \gg a \quad (25)$$

Întrucît  $\pi a^2 \sigma$  este egală cu sarcina totală  $q$  de pe disc, ecuația (25) reprezintă potențialul produs de o sarcină punctiformă avînd această mărime. La o distanță considerabilă față de disc, (în raport cu diametrul), după cum este și de așteptat, nu contează prea mult forma sarcinii. În primă aproximare contează doar sarcina totală. Curba punctată din figura 2.8 reprezintă funcția  $\pi a^2 \sigma / y$ . Se vede că funcția potențială pe axă se apropie destul de repede de asimptotele ei. Găsirea potențialului pentru punctele aflate la o distanță oarecare de axa de simetrie, nu este chiar atît de simplă deoarece se ajunge la calculul unei *integrale eliptice*. Aceste funcții sînt bine cunoscute și tabelate\*, dar aici nu este cazul să intrăm în amănunte.

Vom efectua un calcul destul de simplu care poate fi instructiv. Calculăm potențialul într-un punct  $P_2$  aflat chiar pe marginea discului (fig. 2.9).

Pentru a calcula potențialul în  $P_2$  vom considera un segment inelar cu centrul în  $P_2$ . Din figura 2.9 se vede că sarcina pe acest segment este  $dq = \sigma 2r \theta dr$ . Contribuția segmentului la potențialul din  $P_2$  este  $dq/r = 2\sigma \theta dr$ . Din triunghiul dreptunghic (fig. 2.9) reiese că  $r = 2a \cos \theta$  și prin urmare,  $dr = -2a \sin \theta d\theta$ . În acest fel  $\theta$  devine variabila de integrare. Prin variația lui  $\theta$  de la  $\pi/2$  la 0, cuprindem discul întreg. Astfel:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{\pi/2}^0 2\sigma \theta (-2a \sin \theta d\theta) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_0^{\pi/2} 4\sigma a \theta \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{\sigma a}{\pi \epsilon_0} [\sin \theta - \theta \cos \theta]_0^{\pi/2} = \frac{\sigma a}{\pi \epsilon_0} \end{aligned} \quad (26)$$

(Integrala  $\int \theta \sin \theta d\theta$  se poate efectua prin părți sau putem folosi rezolvarea precedentă)

\* Ele au fost date în vol. I la studiul riguros al pendulului simplu (v. vol. I, cap. 7).



Comparând acest rezultat cu  $\frac{\sigma a}{2\epsilon_0}$  — potențialul din centrul discului, observăm, așa cum era și de așteptat, că potențialul scade de la centrul discului în spre marginea sa. Prin urmare, câmpul electric trebuie să aibă o componentă în planul discului și îndreptată spre exterior. Iată de ce, așa cum am mai amintit, sarcina liberă se va redistribui spre marginea discului. Cu alte cuvinte, discul uniform încărcat nu este o suprafață de potențial constant, așa cum ar trebui să fie orice suprafață conductoare, pe care sarcina este în repaus\*.

Câmpul electric pe axa de simetrie poate fi calculat direct din funcția potențială

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{d}{dy} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{y^2 + a^2} - y] \quad (27)$$

de unde

$$E_y = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + a^2}} \right] \text{ pentru } y > 0 \quad (28)$$

(Nu este prea dificil de calculat  $E_y$  direct din distribuția de sarcină de pe axă.)

Cînd  $y$  tinde spre zero dinspre partea pozitivă, componenta  $E_y$  tinde spre  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ . Pe cealaltă față a discului, din cealaltă direcție a axei  $y$ , câmpul  $E$  are sens invers și componenta  $E_y = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ . Aceasta este valoarea câmpului

unui strat infinit încărcat, de densitate  $\sigma$ , pe care am obținut-o în paragraful 1.10. Aceasta era de așteptat, întrucît pentru punctele din centrul discului, prezența sau absența sarcinii de pe margine, nu are prea mare influență. Cu alte cuvinte, orice strat privit de aproape devine infinit. Într-adevăr, componenta  $E_y$  are valoarea  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  nu numai în centru ci pe toată suprafața discului. Pentru a demonstra aceasta putem folosi legea lui Gauss mai eficient ca în paragraful 1.10, dar trebuie să fim prudenți întrucît câmpul electric total într-un punct oarecare pe disc, nu este perpendicular pe planul discului. Să considerăm o porțiune oarecare de pe disc, de suprafață  $A$ , înconjurată de o cutie cu pereți subțiri, ca în figura 2.10.

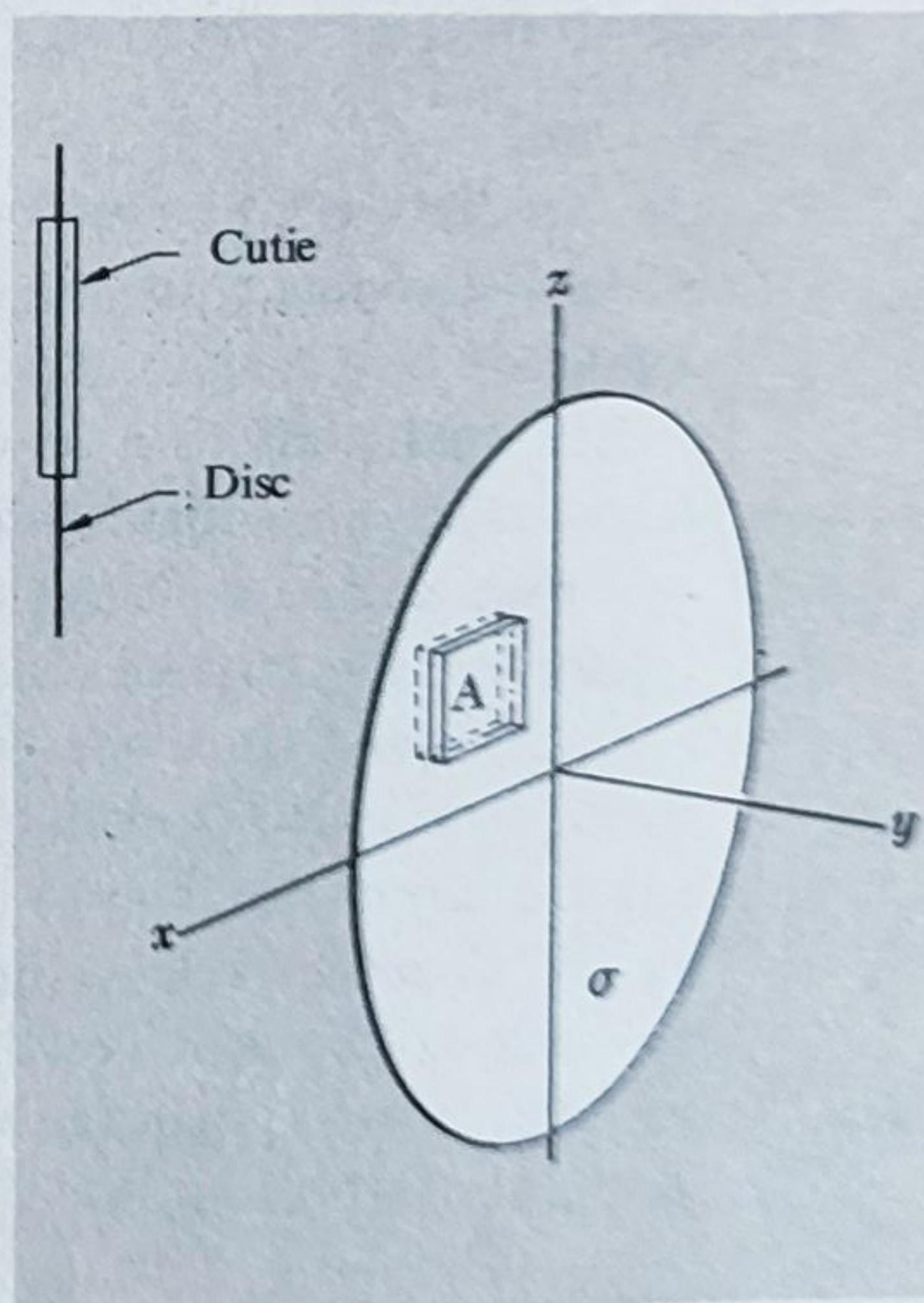


Fig. 2.10. Aplicarea legii lui Gauss la un disc încărcat.

\* În capitolul 3 se va discuta mai amănunțit de ce suprafețele conductoare trebuie să fie echipotențiale.



Fie  $E_{y+}$  componenta pe  $y$  a câmpului produs de sarcina superficială de pe fața anterioară și cu  $E_{y-}$  componenta pe  $y$  a câmpului pe fața posterioară. Fluxul dinspre cutie spre exterior este

$$\Phi = AE_{y+} - AE_{y-} + (\text{fluxul prin fețele laterale ale cutiei}) \quad (29)$$

Al doilea termen se ia cu semnul minus, deoarece vectorul ce reprezintă suprafața posterioară a cutiei este în sensul negativ al axei  $y$ . Fluxul prin fața laterală a cutiei poate fi micșorat oricât de mult, prin comprimarea cutiei\*. Asta nu schimbă sarcina cuprinsă în ea, care rămâne  $\sigma A$ . Conform legii lui Gauss, la limită

$$AE_{y+} - AE_{y-} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (30)$$

sau

$$E_{y+} - E_{y-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (31)$$

Rezultatul ecuației (31) este general valabil pentru *orice* distribuție superficială de sarcină, uniformă sau nu: dacă  $\sigma$  este densitatea locală a sarcinii superficiale există, în acest loc, o variație bruscă sau o discontinuitate a componentei câmpului electric perpendicular pe strat. Mărimea cu care variază este  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . În cazul nostru,  $\sigma$  este constant pe disc. De asemenea, deoarece câmpurile pe cele două fețe ale discului sînt simetrice și alte surse de câmp nu există,  $E_{y+} = -E_{y-}$ , astfel încît  $E_{y+} = |E_{y-}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  pe tot discul.

În figura 2.11 sînt reprezentate cîteva linii de câmp pentru acest sistem și de asemenea, punctat sînt reprezentate intersecțiile planului  $yz$  cu suprafețele de potențial constant. În apropierea centrului discului, acestea au formă de lentilă, iar la distanțe mult mai mari decît  $a$  ele se apropie de forma sferică a suprafețelor echipotențiale din jurul unei sarcini punctiforme.

Figura 2.11 ilustrează o proprietate generală a liniilor de câmp și a suprafețelor echipotențiale. Linia de câmp printr-un punct oarecare și suprafața echipotențială ce trece prin acel punct sînt *perpendiculare una pe alta*, la fel ca pe o hartă în relief a unui teren deluros, cea mai mare pantă se vede sub un unghi drept față de un contur de înălțime constantă. Așa și trebuie să fie, deoarece dacă câmpul într-un punct oarecare ar avea o componentă paralelă la suprafața echipotențială prin acel punct, ar trebui să se efectueze un lucru mecanic pentru a deplasa o sarcină de probă în lungul unei suprafețe de potențial constant.

\* Acest lucru e posibil întrucît câmpul electric radial nu este infinit. Știm că câmpul este finit *aproape* peste tot pe disc, deoarece diferența de potențial între centru și margine este finită. De fapt există un loc unde câmpul radial crește infinit, și anume — chiar marginea discului. Pentru a evita o discontinuitate a lui  $E_{y+}$  și  $\sigma$ , marginile cutiei le alegem la o oarecare distanță de marginea discului.



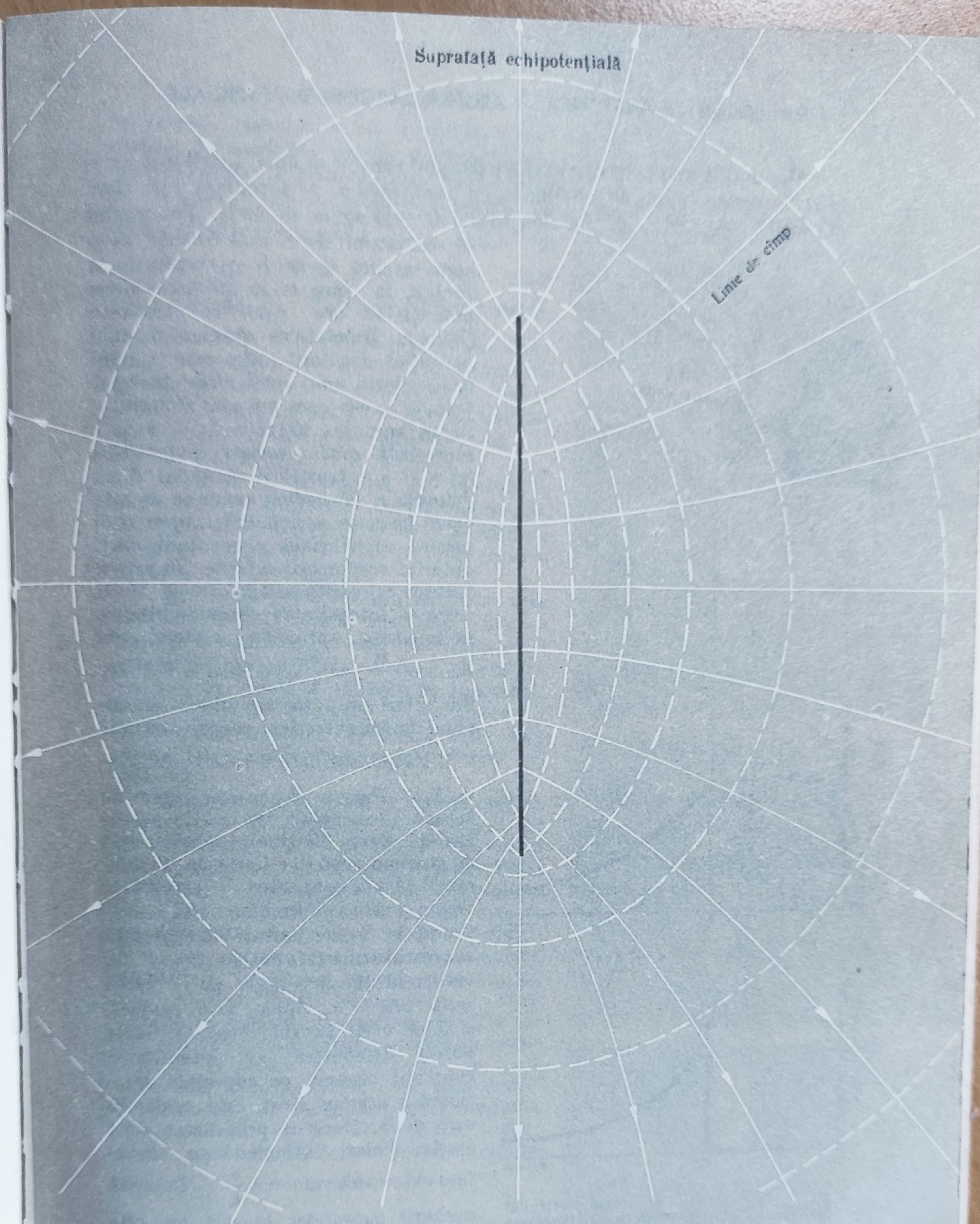


Fig. 2.11. Câmpul electric al unui disc uniform încărcat. Curbele continue sînt linii de câmp. Curbele punctate sînt intersecțiile planului figurii cu suprafețele de potențial constant.



## 2.7. FORȚA CE ACȚIONEAZĂ ASUPRA SARCINII SUPERFICIALE

Mai putem învăța câte ceva din exemplul simplu al unei distribuții simetrice de sarcină, uniform distribuite, cu densitatea  $\sigma$ , pe suprafața unei sfere de rază  $r_0$  (fig. 2.12, a). Sarcina totală  $Q$  este egală cu  $4\pi r_0^2 \sigma$ . Potențialul

în exteriorul sferei este  $Q/4\pi\epsilon_0 r$ , ca și cum sarcina  $Q$  ar fi concentrată în centru, în timp ce în interiorul sferei potențialul are valoarea constantă  $Q/4\pi\epsilon_0 r_0$ . Bineînțeles gradientul unui potențial constant este zero; câmpul în interiorul unui strat sferic încărcat trebuie — așa cum am mai stabilit — să se anuleze. Figurile 2.12, b și c reprezintă grafic variația potențialului  $\varphi$  și a intensității câmpului  $E$  cu distanța  $r$ . Să vedem acum cu ce este egală forța ce acționează asupra unei sarcini superficiale elementare  $\sigma dA$ , datorită respingerii suferite din partea tuturor celorlalte sarcini de pe sferă. Știm că intensitatea câmpului electric în imediata apropiere a sferei este  $E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , iar  $E_{int} = 0$ . Care din valori am putea s-o folosim în calculul forței exercitate asupra sarcinii?

Răspunsul corect este  $\frac{1}{2} (E_{ext} + E_{int})$ . Putem să ne convingem de aceasta, concepind sarcina de pe suprafața sferei distribuită într-un strat de grosime mică dar finită  $\Delta r$ , în interiorul căruia densitatea de sarcină de volum  $\rho$  este uniformă iar sarcina conținută în fiecare unitate de suprafață al acestui strat este  $\sigma$ . Cu alte cuvinte, indiferent de  $\Delta r$ , luăm pe  $\rho$  astfel încît  $\rho \Delta r = \sigma$ . Acum este evident, și dacă vrei, folosind legea lui Gauss puteți demonstra că intensitatea câmpului electric pe suprafața interioară a acestui strat este egală cu zero și la trecerea prin acest strat crește liniar, atingînd pe suprafața exterioară valoarea  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . (Datorită curburii suprafeței funcția nu este chiar liniară, dar întrucît putem întotdeauna considera că  $\Delta r \ll r_0$ , practic,

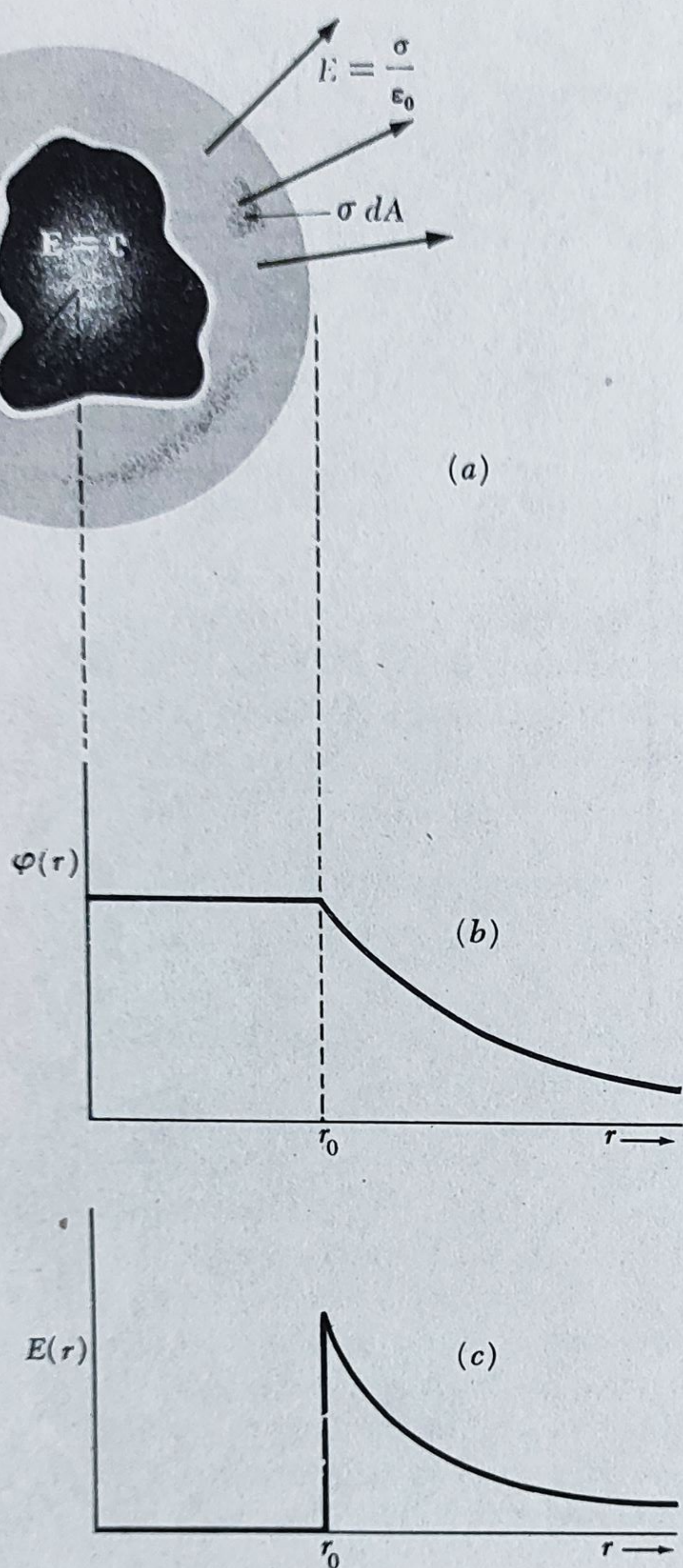


Fig. 2.12. Potențialul și câmpul electric al unei sarcini superficiale sferice. (a) Secțiune în sferă. (b)  $\varphi$  în funcție de  $r$ . (c)  $E$  în funcție de  $r$ .



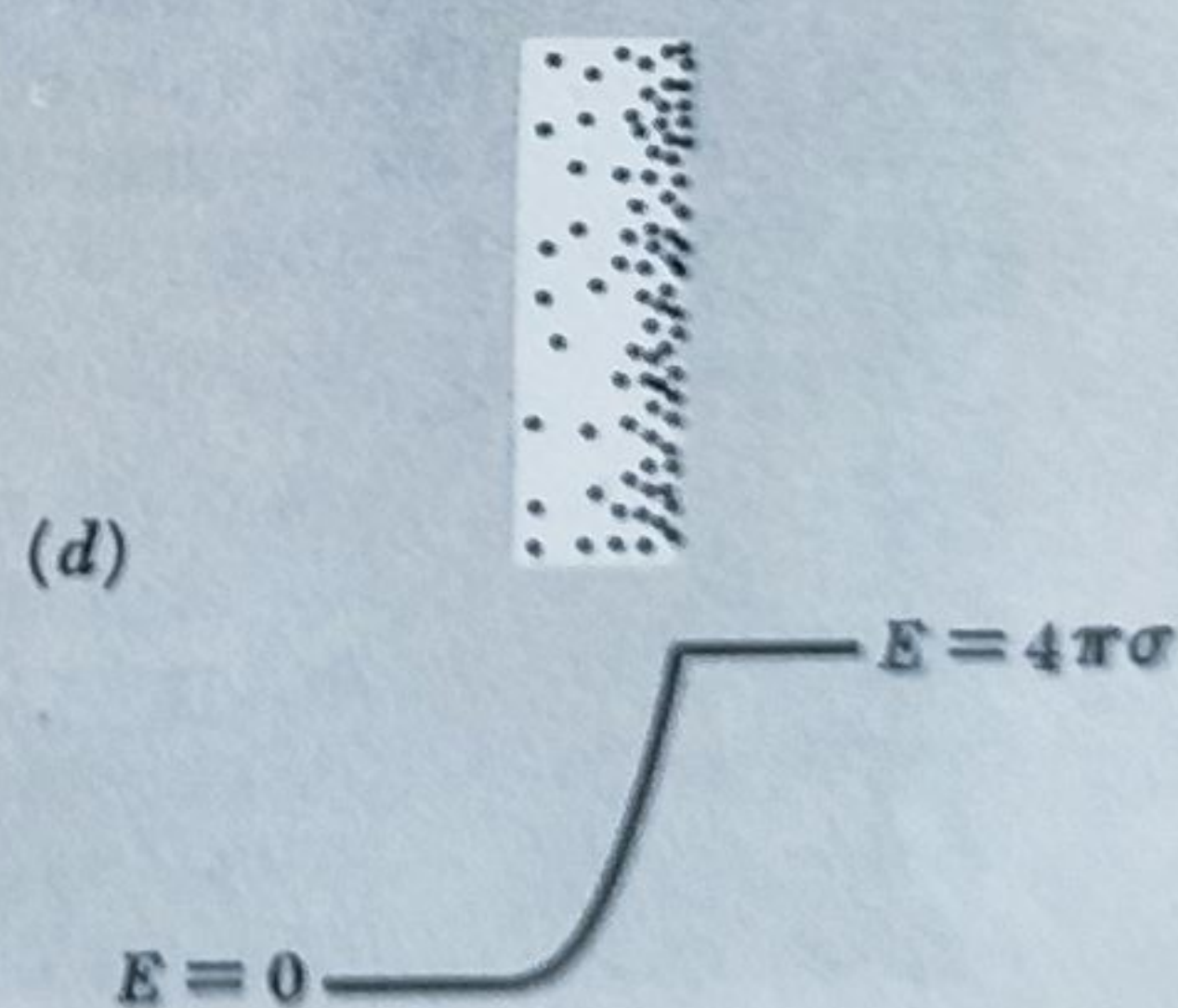
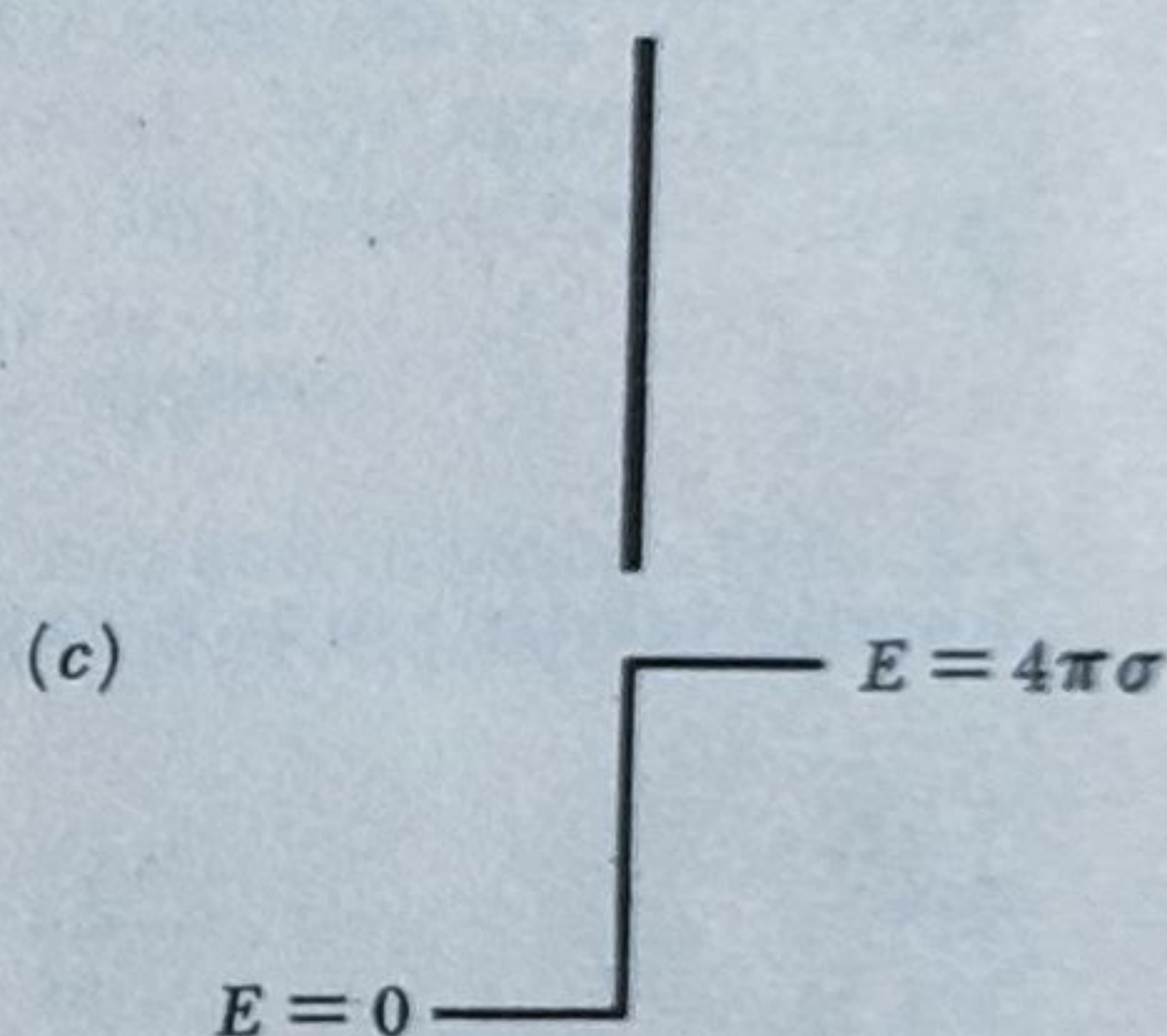
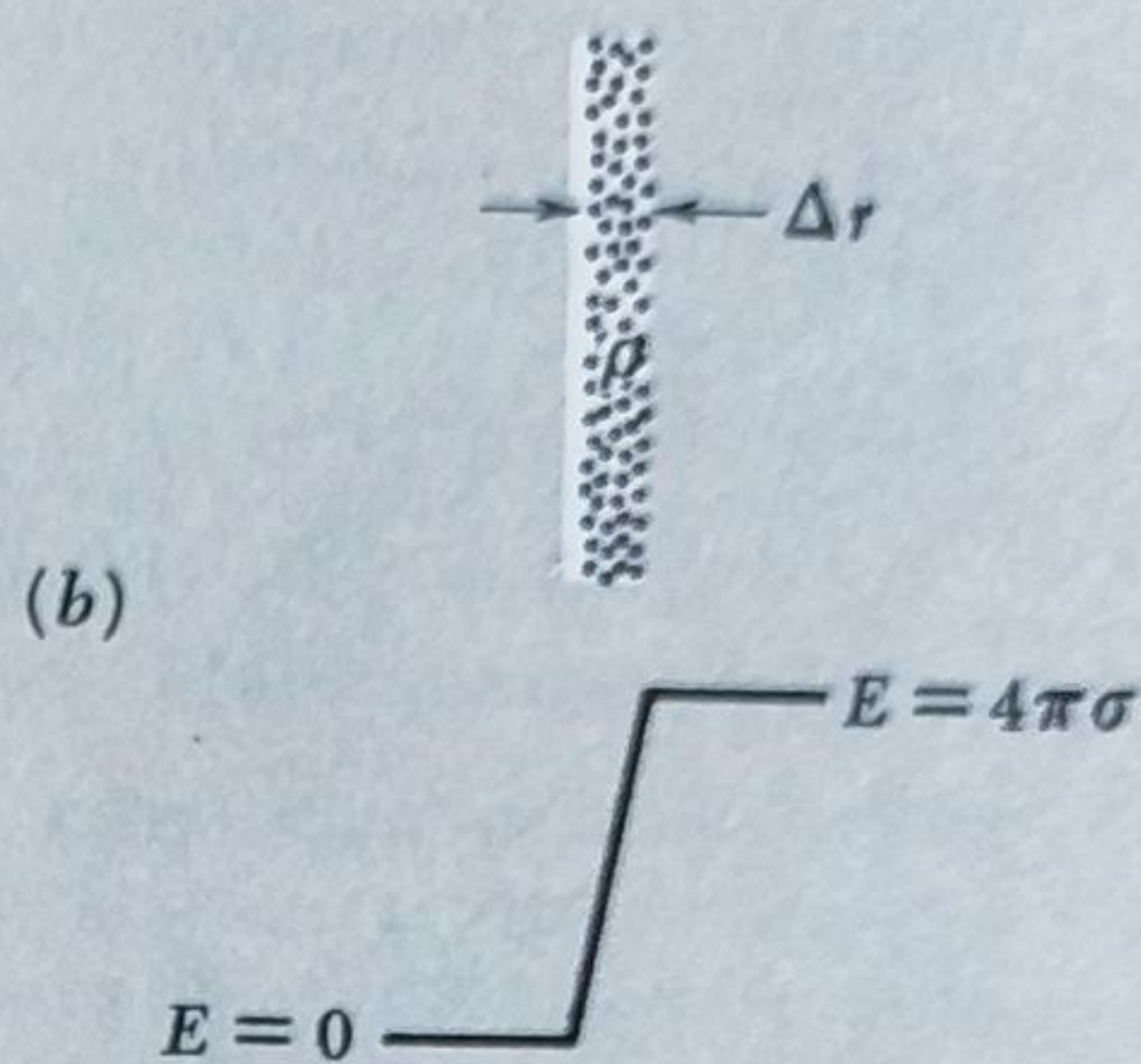
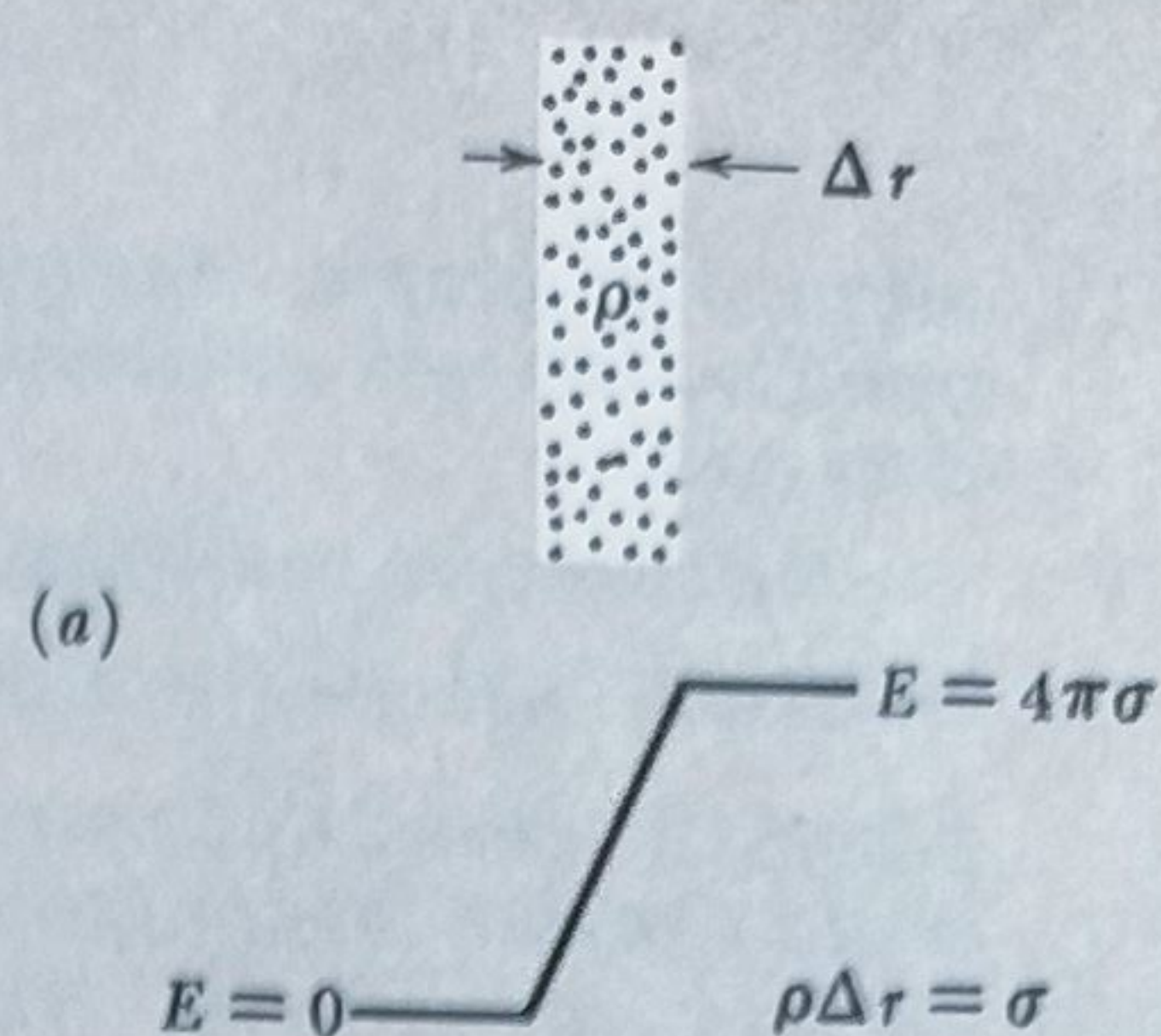
în această regiune mică suprafața este plană). Intensitatea medie a câmpului în această regiune și prin urmare, forța medie ce acționează asupra unității de sarcină în interiorul stratului este  $\frac{1}{2}(E_{int} + E_{ext})$  și în acest caz pentru  $E_{int} = 0$  este egală cu  $\frac{1}{2}E_{ext}$  sau  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ . Figurile 2.13, a-c reprezintă diferitele situații când grosimea stratului se micșorează, menținând constantă sarcina pe unitatea de suprafață. Nu se întâmplă nimic spectaculos: câmpul variază doar pe distanțe mici și densitatea de sarcină de volum crește la infinit.

Chiar dacă densitatea de sarcină în strat nu este uniformă ca, de exemplu, în figura 2.13, d, aceasta nu influențează variația totală a lui  $E$  prin trecerea dintr-o parte în alta a stratului.

Și în cazul când variația câmpului este neliniară, forța totală exercitată asupra unității de suprafață a unei asemenea plăci este egală cu  $1/2(E_{int} + E_{ext})$  înmulțită cu sarcina totală a unității de suprafață. Problema 1.29 prezintă o verificare a acestui caz simplu, iar problema 1.30 oferă posibilitatea unei generalizări pentru cei interesați.

Sarcinile superficiale reale nu pot fi, bineînțeles, distribuite într-un strat de grosime nulă cu o densitate de volum infinit de mare, astfel încât reprezentarea noastră intermediară este mult mai realistă decât cazul limită. De exemplu, sarcina pe suprafața unui metal poate fi distribuită într-un strat cu grosimea de câțiva angströmi. Problema constă în aceea, că atita timp cât stratul este subțire în comparație cu celelalte dimensiuni ale sistemului, pentru calculul tuturor efectelor macroscopice, el poate fi considerat de grosime nulă și caracterizat doar prin densitatea locală de sarcină pentru unitatea de suprafață. Pe de altă parte, distribuția reală în adâncime poate prezenta

Fig. 2.13. Variația câmpului unui strat încărcat depinde doar de sarcina totală pe unitatea de suprafață.





importanță pentru fenomenele atomice ce au loc sub suprafață ca, de exemplu, trecerea electronilor dintr-o substanță în alta prin suprafața ce le separă.

Revenind la problema cu care am început acest paragraf, observăm că forța exercitată asupra unui element de sarcină superficială  $dq$  este  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot dq$ , și întrucât cantitatea de sarcină în elementul de suprafață  $dA$  este  $dq = \sigma dA$ , forța ce acționează asupra acestui element de suprafață  $dA$  este:

$$dF = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dA. \quad (32)$$

Înseamnă că forța exercitată asupra unității de suprafață este  $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$ . Această forță se datorește respingerii sarcinilor și este îndreptată în afară. Bineînțeles, dacă sarcinile nu se risipesc, înseamnă că această forță trebuie să fie echilibrată de o altă forță, de natură atomică sau moleculară, care nu este inclusă în ecuațiile noastre și care reține purtătorii de sarcină pe sferă.

Dacă am încălca un balon de cauciuc, forța de respingere electrică pe unitatea de suprafață pe care am calculat-o,  $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$ , ar dilata balonul. Și invers, pentru a micșora diametrul unei asemenea distribuții de sarcină, menținând sarcina totală constantă, trebuie să efectuăm un lucru mecanic asupra sistemului. Să presupunem că vrem să micșorăm raza sferei de la  $r_0$  la  $r_0 - dr$  ca în figura 2.14. Ținând cont de lucrul mecanic ce trebuie efectuat doar pentru învingerea forțelor electrice, trebuie să aplicăm asupra fiecărei unități de suprafață o forță egală cu  $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$  newtoni îndreptată spre interiorul suprafeței. Această forță acționează pe distanța  $dr$ , astfel încât lucrul mecanic efectuat asupra sistemului de aceste forțe exterioare este

$$dW = (4\pi r_0^2) \left( \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \right) dr = \frac{2\pi}{\epsilon_0} \sigma^2 r_0^2 dr. \quad (33)$$

Această relație poate fi exprimată și în funcție de sarcina totală  $Q = 4\pi r_0^2 \sigma$ :

$$dW = \frac{Q^2 dr}{8\pi\epsilon_0 r_0^2}. \quad (34)$$



Fig. 2.14. Comprimarea unui strat sferic sau a unui balon încărcat.



## 2.8. ENERGIA UNUI CÎMP ELECTRIC

Observați că singurul rezultat al comprimării sferei, în ceea ce privește cîmpul electric, este crearea unui cîmp de intensitate  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  în spațiul dintre  $r_0 - dr$  și  $r_0$ , unde înainte cîmpul era nul. În tot restul spațiului cîmpul rămîne neschimbat. Această regiune a cîmpului a fost creată, putem spune, pe seama lucrului mecanic  $dW$ . Lucrul mecanic  $dW$  poate fi exprimat în funcție de noul volum  $dv$  ocupat de cîmp sub forma

$$dW = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dv. \quad (35)$$

Acesta este un caz particular al unei teoreme generale pe care n-o vom demonstra acum: *Energia potențială  $U$  a unui sistem de sarcini, care reprezintă lucrul mecanic total necesar formării acestui sistem, poate fi calculată simplu cu ajutorul cîmpului electric, atribuind fiecărui element de volum  $dv$  energia  $E^2/2\epsilon_0 dv$  și integrînd pe tot spațiul în care există cîmp electric.*

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{pe tot cîmpul}} E^2 dv. \quad (36)$$

$E^2$  este, bineînțeles, o mărime scalară:  $E^2 \equiv \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ .

Prin urmare, lucrul mecanic necesar pentru formarea stării inițiale a sferei încărcate (fig. 2.14) poate fi calculat după cum urmează:  $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ ,  $r > r_0$ ;  $E = 0$ ,  $r < r_0$ , astfel încît

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r_0}. \quad (37)$$

Același rezultat se obține dacă se calculează lucrul mecanic necesar pentru a comprima sfera de la o rază infinit de mare la o rază finită  $r_0$ , folosind ecuația (34):

$$U = \int_{\infty}^{r_0} -\frac{Q^2 dr}{8\pi\epsilon_0 r^2} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{Q^2 dr}{8\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r_0}. \quad (38)$$

Unii denumesc aceasta energia „înmagazinată” în cîmp. Întrucît sistemul este conservativ, această energie poate fi cedată, bineînțeles, dacă sarcinile s-ar putea răspîndi, astfel încît e firesc să gîndim că această energie „există undeva”. Raționamentul nostru este corect dacă considerăm că densitatea energiei înmagazinate în spațiu este egală cu  $\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \frac{\text{jouli}}{\text{m}^3}$ . Acest lucru este adevărat deși nu avem dreptul, fără alte considerente, să atribuim energia înmagazinată unui anume metru cub din spațiu. Din punct de vedere fizic putem măsura doar energia totală, adică lucrul mecanic efectuat pentru a aduce sarcina dintr-o configurație în alta. Exprîmînd energia potențială totală a unui sistem electrostatic prin ecuația (36) în loc de ecuația (1.9) ne folosim doar de o altă metodă de a calcula, la fel ca în cazul folosirii legii lui Coulomb sau a noțiunii de cîmp electric pentru descrierea comportării sarcinilor electrice. Privind aceleași probleme din



diferite puncte de vedere sau folosind diferite metode de calcul, se stimulează idei noi și se aprofundează problemele studiate. Noțiunea de câmp electric, ca o realitate independentă, a apărut în urma studierii comportării dinamice a substanței încărcate electric și a radiației electromagnetice.

Am vorbit despre energia potențială și potențialul electric. Trebuie reținut că acestea sînt lucruri complet diferite. Energia potențială  $U$ , a unui sistem de sarcini în repaus, reprezintă lucrul mecanic necesar pentru a forma acest sistem, adică energia pe care o putem considera înmagazinată în sistemul format. Ea este o mărime scalară și o proprietate a sistemului *ca un întreg*. Potențialul electric  $\varphi$  este funcție de poziția din spațiu pentru o distribuție dată de sarcini electrice. El se exprimă în volt. Diferența dintre valorile lui  $\varphi$ , în două puncte ale spațiului, este lucrul mecanic efectuat pe unitatea de sarcină pentru a o deplasa dintr-un punct în altul.

Pentru a sublinia diferența dintre  $\varphi$  și  $U$ , să scriem ecuația (36) în funcție de  $\varphi$  și nu de  $\mathbf{E}$ . Întrucît  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , avem

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{\text{tot spațiul}} |\nabla\varphi|^2 dv. \quad (39)$$

Există și o altă metodă de a calcula energia înmagazinată. În capitolul I s-a arătat că energia necesară pentru asamblarea unor sarcini punctiforme discrete  $q_1, \dots, q_j, \dots$  este dată de ecuația 1.9:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} \frac{q_j q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{jk}}. \quad (40)$$

S-o scriem în următoarea formă:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j \left[ \sum_{k \neq j} \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{jk}} \right] \quad (41)$$

și să studiem expresia din paranteză. Fiecare termen al acestei sume reprezintă contribuția uneia din sarcini la potențialul electric  $\varphi$  în punctul în care se găsește sarcina  $q_j$ , astfel încît întreaga sumă, pe care o vom nota cu  $\varphi_j$ , reprezintă potențialul în  $q_j$ , datorat tuturor celorlalte sarcini. În acest fel,  $U$  poate fi scris ca:

$$U = \frac{1}{2} \sum_j q_j \varphi_j. \quad (42)$$

Dacă în locul sarcinilor punctuale avem o distribuție continuă de sarcini  $\rho(x, y, z)$ , înlocuim, pur și simplu, suma din ec. (42) cu integrala:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dv. \quad (43)$$

Aici, întrucît elementul de sarcină analog lui  $q_j$  este  $\rho dv$  și este infinit mic, nu mai are rost precizarea că potențialul  $\varphi$  se datorește tuturor celorlalte sarcini. În acest fel  $\varphi$  din ec. (43) este potențialul electric al întregului sistem,  $\varphi(x, y, z)$ . Bineînțeles, ecuația (43) este echivalentă cu ec. (39) și cu ec. (36).



## 2.9. DIVERGENȚA UNEI FUNCȚII VECTORIALE

În fiecare punct, câmpul electric are o direcție și o mărime bine definită. El este o funcție vectorială de coordonate, adică  $\mathbf{E}(x, y, z)$ . Ceea ce vom discuta în continuare, se referă la orice funcție vectorială, nu numai la câmpul electric; vom nota această funcție cu  $\mathbf{F}(x, y, z)$ . Cu alte cuvinte, vom acorda, deocamdată, prioritate matematicii și nu fizicii și vom numi  $\mathbf{F}$  o funcție vectorială oarecare în spațiul tridimensional.

Să considerăm un volum finit  $V$  de formă oarecare, a cărui suprafață o notăm cu  $S$ . Cunoaștem deja noțiunea de flux total care iese din  $S$ . Acesta este dat de valoarea integralei de suprafață a lui  $\mathbf{F}$  extinsă pe toată suprafața:

$$\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \quad (44)$$

$d\mathbf{a}$  este un vector infinitezimal a cărui mărime este egală cu aria unui element mic al suprafeței  $S$ , iar direcția coincide cu normala exterioară la acest element de suprafață (fig. 2.15, a).

Să împărțim acum volumul  $V$  în două prin suprafața sau diafragma  $D$  care secționează „balonul”  $S$  ca în figura 2.15, b. Să notăm aceste două părți ale lui  $V$  cu  $V_1$  și  $V_2$ , considerându-le două volume distincte și calculând integralele de suprafață pentru fiecare în parte. Suprafața  $S_1$  ce delimitează volumul  $V_1$  include pe  $D$  ca și suprafața  $S_2$  ce delimitează volumul  $V_2$ . Este evident că suma celor două integrale de suprafață

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_2 \quad (45)$$

va fi egală cu integrala pe întreaga suprafață din ecuația (44). Acest lucru se explică prin aceea că fiecare porțiune din  $D$  contribuie în mod egal cu un semn în prima integrală și cu

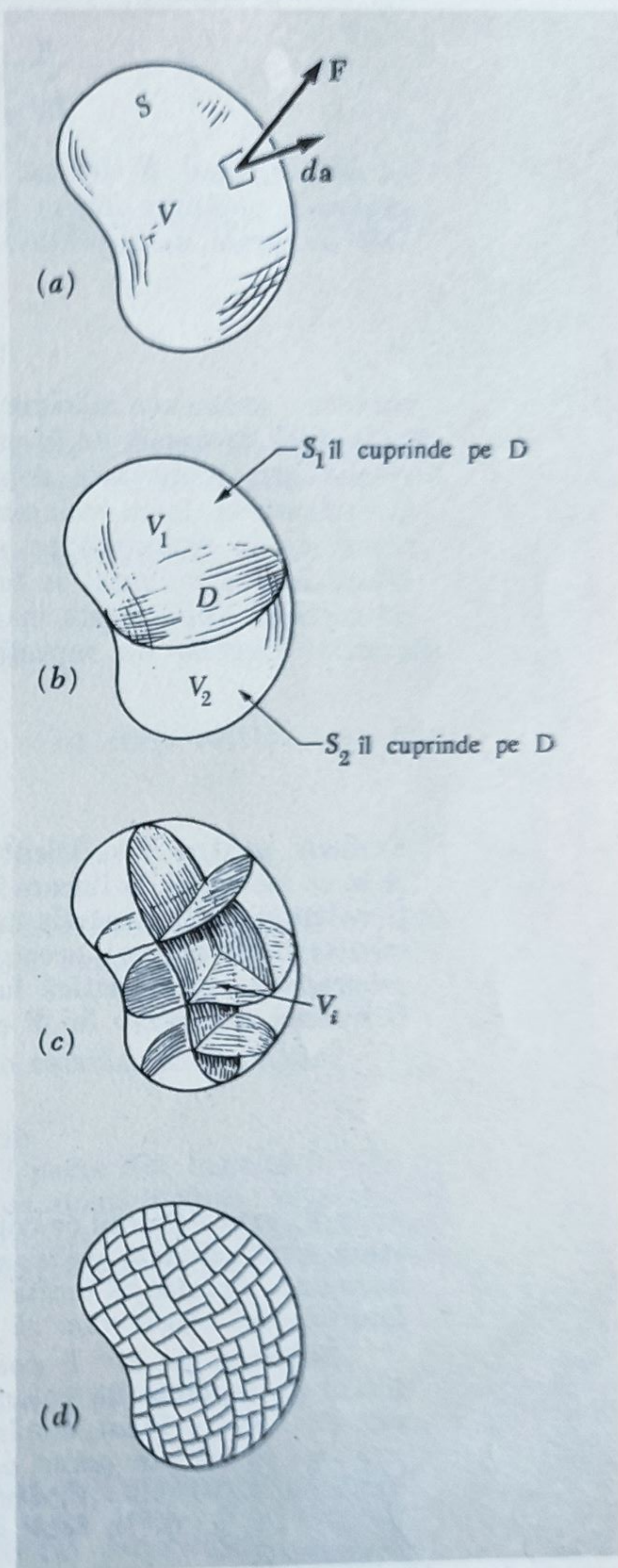


Fig. 2.15. Un volum  $V$  delimitat de o suprafață  $S$  (a) este împărțit în două porțiuni delimitate de suprafețele  $S_1$  și  $S_2$  (b). Indiferent cât de departe mergem cu divizarea, ca în (c) și (d), suma integralelor de suprafață pe toate porțiunile este egală cu integrala de suprafață pe suprafața inițială  $S$ , pentru oricare funcție vectorială  $\mathbf{F}$ .



## 2.9. DIVERGENȚA UNEI FUNCȚII VECTORIALE

În fiecare punct, câmpul electric are o direcție și o mărime bine definită. El este o funcție vectorială de coordonate, adică  $\mathbf{E}(x, y, z)$ . Ceea ce vom discuta în continuare, se referă la orice funcție vectorială, nu numai la câmpul electric; vom nota această funcție cu  $\mathbf{F}(x, y, z)$ . Cu alte cuvinte, vom acorda, deocamdată, prioritate matematicii și nu fizicii și vom numi  $\mathbf{F}$  o funcție vectorială oarecare în spațiul tridimensional.

Să considerăm un volum finit  $V$  de formă oarecare, a cărui suprafață o notăm cu  $S$ . Cunoaștem deja noțiunea de flux total care iese din  $S$ . Acesta este dat de valoarea integralei de suprafață a lui  $\mathbf{F}$  extinsă pe toată suprafața:

$$\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \quad (44)$$

$d\mathbf{a}$  este un vector infinitesimal a cărui mărime este egală cu aria unui element mic al suprafeței  $S$ , iar direcția coincide cu normala exterioară la acest element de suprafață (fig. 2.15, a).

Să împărțim acum volumul  $V$  în două prin suprafața sau diafragma  $D$  care secționează „balonul”  $S$  ca în figura 2.15, b. Să notăm aceste două părți ale lui  $V$  cu  $V_1$  și  $V_2$ , considerându-le două volume distincte și calculând integralele de suprafață pentru fiecare în parte. Suprafața  $S_1$  ce delimitează volumul  $V_1$  include pe  $D$  ca și suprafața  $S_2$  ce delimitează volumul  $V_2$ . Este evident că suma celor două integrale de suprafață

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_2 \quad (45)$$

va fi egală cu integrala pe întreaga suprafață din ecuația (44). Acest lucru se explică prin aceea că fiecare porțiune din  $D$  contribuie în mod egal cu un semn în prima integrală și cu

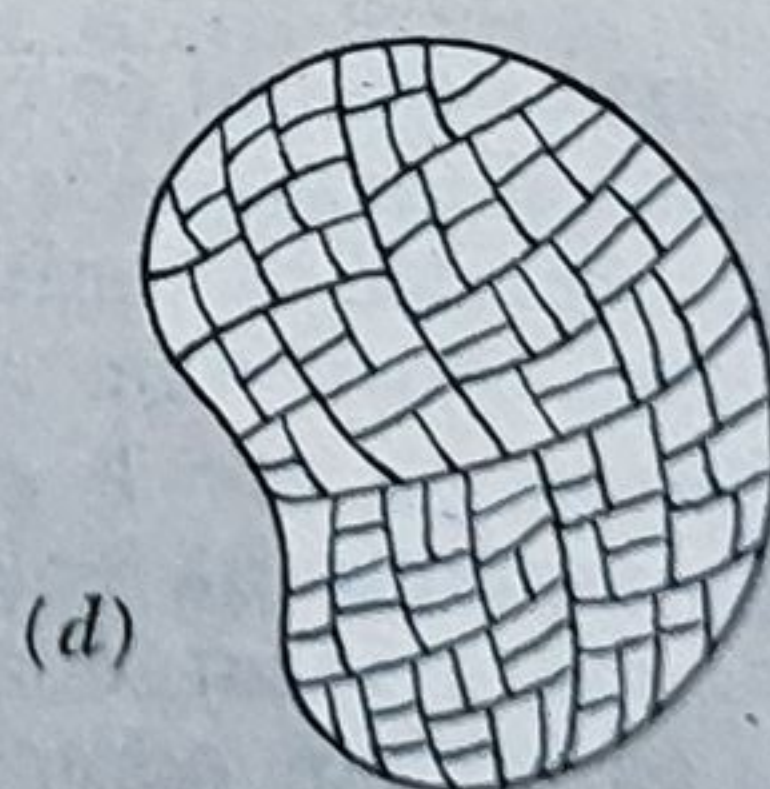
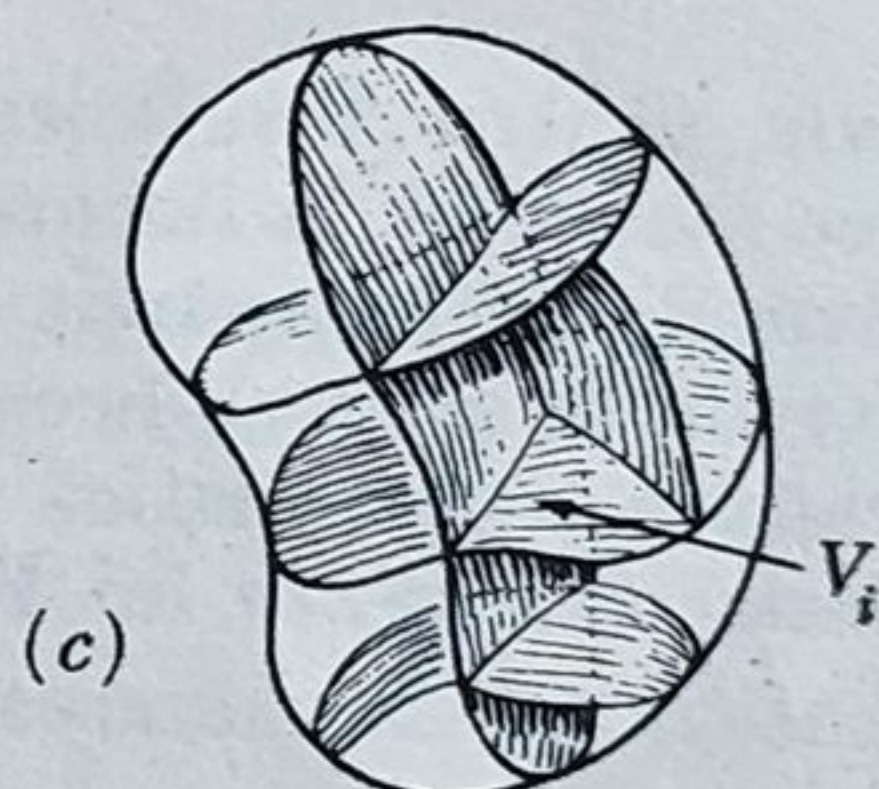
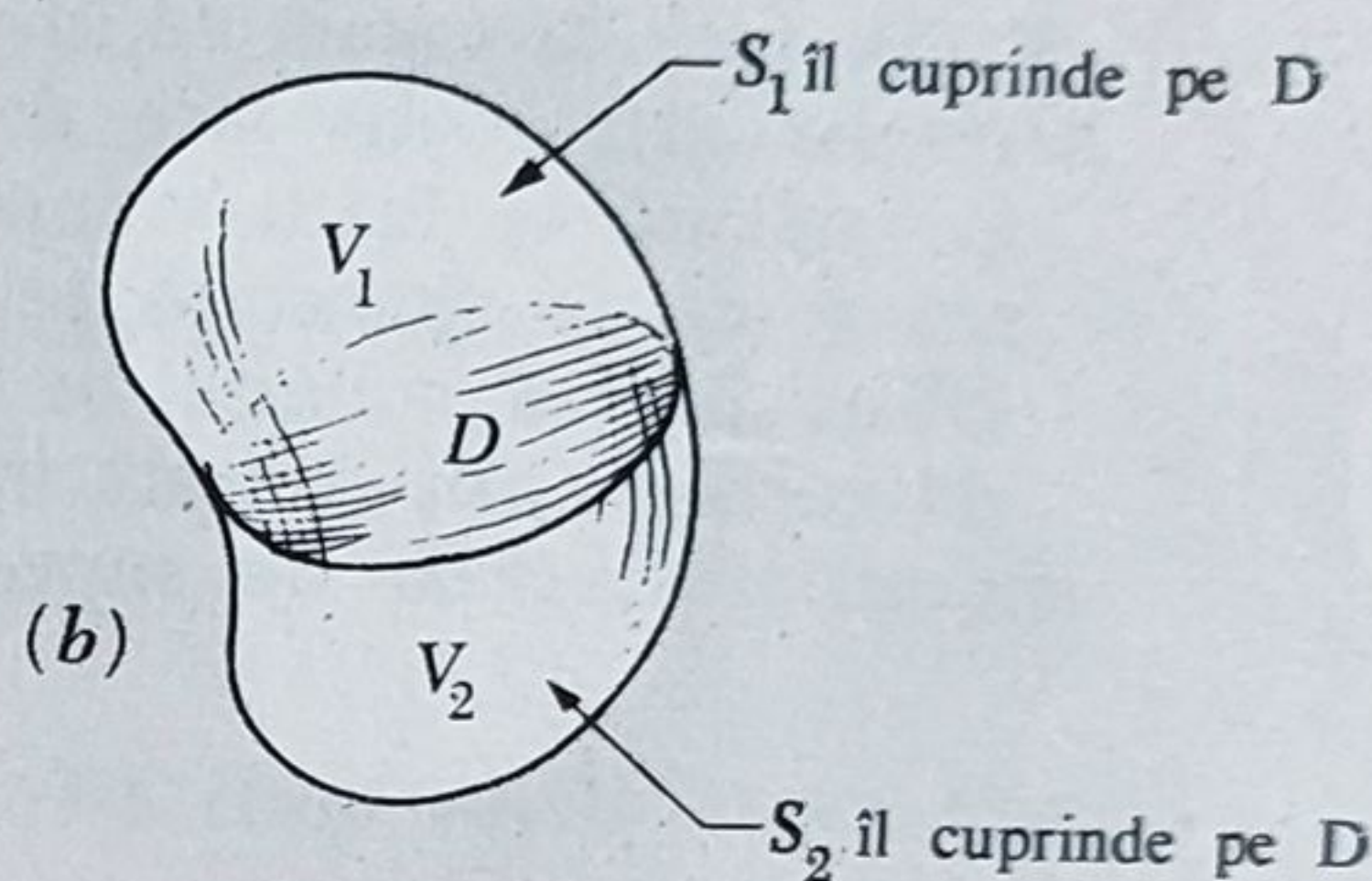
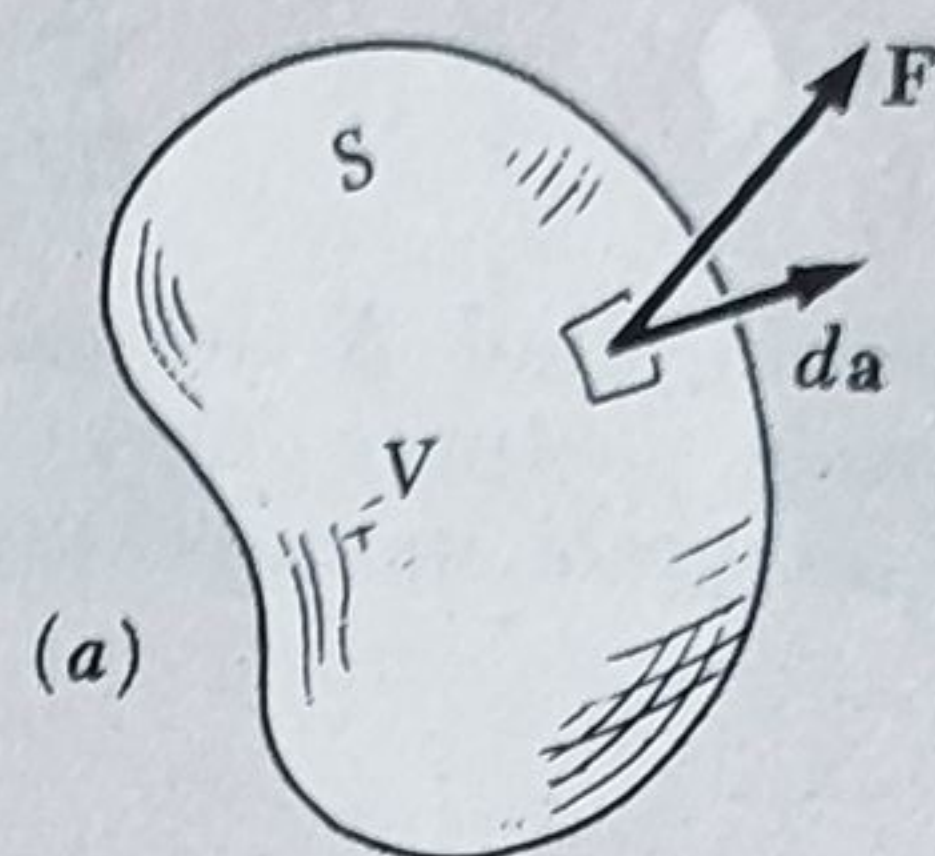


Fig. 2.15. Un volum  $V$  delimitat de o suprafață  $S$  (a) este împărțit în două porțiuni delimitate de suprafețele  $S_1$  și  $S_2$  (b). Indiferent cât de departe mergem cu divizarea, ca în (c) și (d), suma integralelor de suprafață pe toate porțiunile este egală cu integrala de suprafață pe suprafața inițială  $S$ , pentru oricare funcție vectorială  $\mathbf{F}$ .



semn opus în a doua integrală, întrucît direcția „spre exterior” într-un caz devine direcție „spre interior” în celălalt.

Cu alte cuvinte, orice flux care iese din  $V_1$  prin suprafața  $D$  este un flux ce intră în  $V_2$ . Restul suprafeței este identic cu cel al volumului inițial întreg. Putem continua această divizare a volumului  $V$  într-un mare număr de porțiuni  $V_1, \dots, V_i, \dots, V_N$ , cu suprafețele ce le delimitează  $S_1, \dots, S_i, \dots, S_N$ . Indiferent de numărul porțiunilor, putem fi siguri că

$$\sum_{i=1}^N \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \Phi. \quad (46)$$

La limită, cînd  $N$  devine foarte mare, vrem să găsim ce este caracteristic pentru o porțiune foarte mică și în final — pentru vecinătatea unui punct. Dar integrala de suprafață

$$\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i \quad (47)$$

nu este o asemenea mărime, întrucît dacă continuăm divizarea,  $N$  devine  $2N$  și această integrală se împarte în doi termeni, fiecare din ei mai mic decît cel dinainte de divizare, deoarece suma lor rămîne constantă. Cu alte cuvinte, pe măsură ce luăm volume din ce în ce mai mici în jurul aceluiași punct, integrala de suprafață pe unul din aceste volume se micșorează continuu. Observăm că volumul se împarte de asemenea în două părți a căror sumă dă volumul inițial. Asta înseamnă că trebuie să luăm în considerare raportul dintre integrala de suprafață și volumul elementului din spațiul divizat:

$$\frac{\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}}{V_i}. \quad (48)$$

Evident, pentru  $N$  suficient de mare, adică pentru o divizare în porțiuni din ce în ce mai mici, la fiecare împărțire a integralei de suprafață în doi termeni și volumul va fi împărțit în două. Continuînd o asemenea divizare, în jurul unei anumite regiuni, acest raport tinde către o limită. Această limită este o proprietate caracteristică funcției vectoriale  $\mathbf{F}$  în vecinătatea acestui punct. O numim *divergența* lui  $\mathbf{F}$  și o notăm  $\text{div } \mathbf{F}$ .

Înseamnă că valoarea  $\text{div } \mathbf{F}$  în orice punct este egală cu:

$$\text{div } \mathbf{F} \equiv \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i \quad (49)$$

unde  $V_i$  este volumul ce conține punctul respectiv și  $S_i$  suprafața ce delimitează acest volum și peste care se ia integrala de suprafață. Trebuie neapărat introdusă condiția că limita există și este independentă de modul de divizare. Deocamdată considerăm că această condiție este îndeplinită.

Noțiunea de  $\text{div } \mathbf{F}$  poate fi formulată în modul următor:  $\text{div } \mathbf{F}$  este fluxul pe unitatea de volum ce iese din volumul  $V_i$ , pentru  $V_i$  infinit de mic. Ea este, evident, o mărime scalară. Ea poate varia de la punct la punct, valoarea ei într-un punct oarecare  $(x, y, z)$  fiind dată de limita raportului din ecuația (49) cînd  $V_i$  devine din ce în ce mai mic, cuprinzînd tot timpul punctul  $(x, y, z)$ . În acest fel,  $\text{div } \mathbf{F}$  este pur și simplu o funcție scalară de coordonate.



## 2.10. TEOREMA LUI GAUSS ȘI FORMA DIFERENȚIALĂ A LEGII LUI GAUSS

Dacă cunoaștem această funcție scalară de coordonate  $\text{div } \mathbf{F}$ , putem să ne întoarcem din nou la integrala de suprafață ce delimitează un volum mare. Să scriem, mai întâi, ecuația (46) sub forma:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N V_i \left[ \frac{\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i}{V_i} \right]. \quad (50)$$

La limită când  $N \rightarrow \infty$ ,  $V_i \rightarrow 0$ , termenul din paranteză devine divergența lui  $\mathbf{F}$  și suma trece într-o integrală de volum:

$$\boxed{\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \text{div } \mathbf{F} dv} \quad (51)$$

Ecuația (51) este numită *teorema lui Gauss* sau *teorema divergenței*. Ea este valabilă pentru orice câmp vectorial pentru care există limita scrisă în ecuația (49).

Să vedem ce consecințe are asupra câmpului electric  $\mathbf{E}$ . Cunoaștem legea lui Gauss, care se scrie:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv \quad (52)$$

Dacă teorema divergenței este valabilă pentru orice câmp vectorial, ea este bineînțeles, valabilă și pentru  $\mathbf{E}$ :

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \text{div } \mathbf{E} dv. \quad (53)$$

Ambele ecuații (52 și 53) sînt valabile pentru *orice* volum ales, indiferent de formă, dimensiune și dispunere. Comparindu-le, observăm că acest lucru este adevărat numai dacă în fiecare punct,

$$\boxed{\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (54)$$

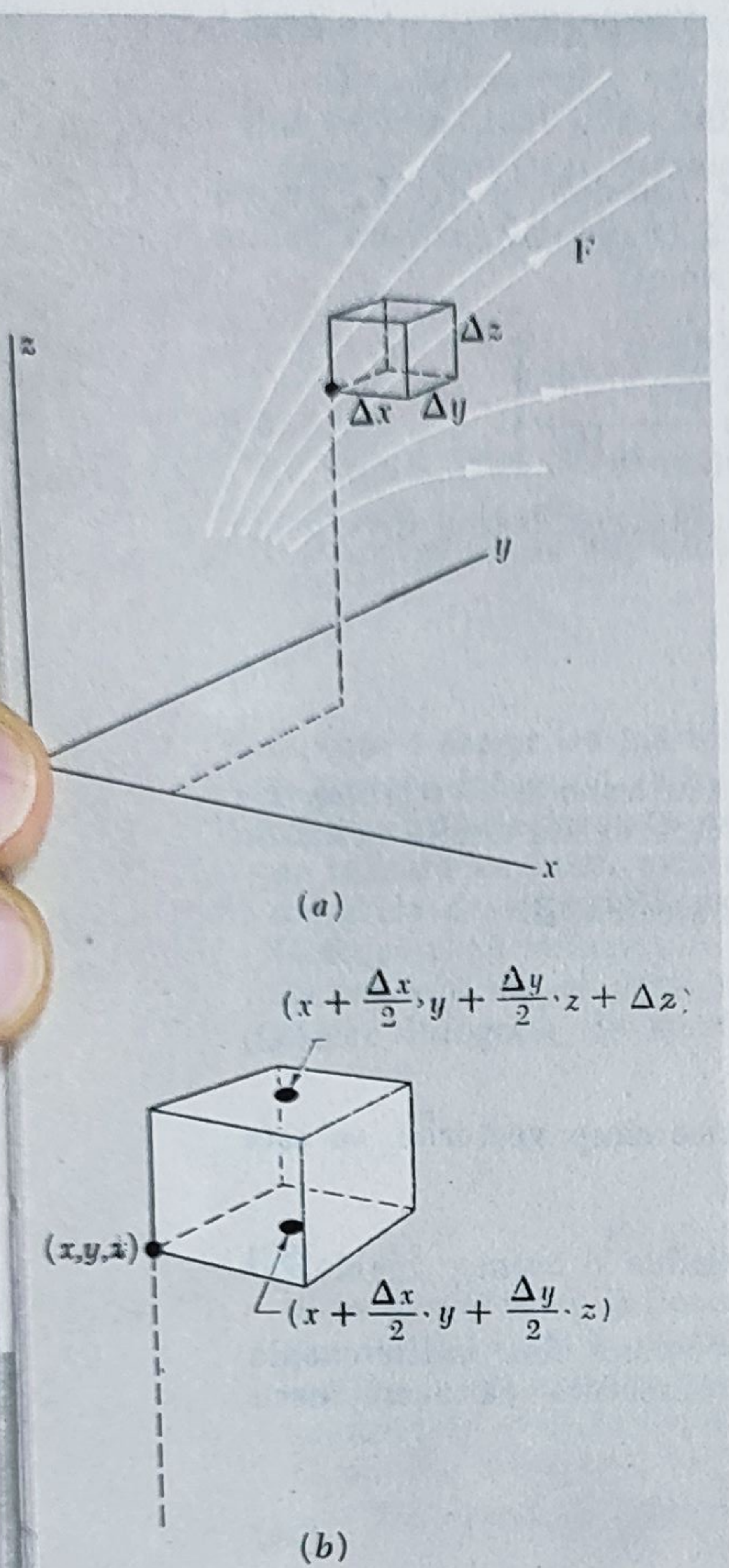
Dacă considerăm teorema divergenței ca făcînd parte din bagajul nostru de cunoștințe matematice pe care le vom folosi de acum înainte, ecuația (54) poate fi considerată ca o altă formulare a legii lui Gauss. Ea reprezintă forma diferențială a legii lui Gauss, exprimată prin relația (locală) dintre densitatea de sarcină și câmpul electric.

## 2.11. DIVERGENȚA ÎN COORDONATE CARTEZIENE

Ecuația (49) este definiția fundamentală a *divergenței* independent de sistemul de coordonate. Este util să știm cum se calculează divergența unei funcții vectoriale dată într-o formă explicită. Să presupunem că funcția vectorială  $\mathbf{F}$  este exprimată în coordonatele carteziene  $x$ ,  $y$  și  $z$ . Asta în-



Fig. 2.16. Calculul fluxului ce iese dintr-o cutie de volum  $\Delta x \Delta y \Delta z$ .



seamnă că avem trei funcții scalare  $F_x(x, y, z)$ ,  $F_y(x, y, z)$  și  $F_z(x, y, z)$ . Vom considera un volum  $V_i$  de forma unei mici cutii rectangulare, cu unul din colțuri în punctul  $(x, y, z)$  și cu laturile  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  și  $\Delta z$  (fig. 2.16). La întrebarea, dacă pentru un volum de altă formă obținem aceeași valoare a limitei, vom răspunde mai târziu.

Să luăm două fețe opuse ale cutiei, de exemplu cea superioară și cea inferioară, reprezentate prin vectorii  $\hat{z}\Delta x\Delta y$  și  $-\hat{z}\Delta x\Delta y$ . Fluxul prin aceste suprafețe se datorează doar componentei pe direcția  $z$  a lui  $F$  și contribuția finală depinde doar de diferența dintre  $F_z$  pe suprafața superioară și  $F_z$  pe suprafața inferioară, sau mai precis, de diferența dintre valoarea medie a lui  $F_z$  pe suprafața superioară și valoarea medie a lui  $F_z$  pe suprafața inferioară. În aproximația de ordinul întâi, această diferență este egală cu  $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\Delta z$ .

Vom explica acest lucru cu ajutorul figurii 2.16, b. Valoarea medie a lui  $F_z$  pe suprafața inferioară a cutiei — considerînd doar aproximația de ordinul întâi în variația lui  $F_z$  pe acest dreptunghi mic — este egală cu valoarea lui  $F_z$  în centrul acestui dreptunghi. Această mărime în aproximația de ordinul întâi\*, în raport cu  $\Delta x$  și  $\Delta y$  este:

$$F_z(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial F_z}{\partial y}. \quad (55)$$

Pentru valoarea medie a funcției  $F_z$  pe fața superioară luăm valoarea ei în centrul feței inferioare, din nou în aproximația de ordinul întâi în raport cu deplasările mici:

$$F_z(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial F_z}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (56)$$

\* Aceasta nu este decît începutul unei dezvoltări în serie Taylor a funcției scalare  $F_z$  în vecinătatea punctului  $(x, y, z)$ . Adică,  $F_z(x+a, y+b, z+c) = F_z(x, y, z) + \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z}\right) F_z + \dots + \left(\frac{1}{n!}\right) \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z}\right)^n F_z + \dots$ . Toate derivatele se calculează în punctul  $(x, y, z)$ . În cazul nostru  $a = \frac{\Delta x}{2}$ ,  $b = \frac{\Delta y}{2}$ ,  $c = 0$  și termenii de ordin superior ai dezvoltării îi neglijăm.



Fig. 2.17. Limita raportului dintre flux și volum este independentă de forma cutiei.

Fluxul total ce iese din cutie prin cele două suprafețe a căror arie este  $\Delta x \Delta y$ , este egal cu:

$$\underbrace{\Delta x \Delta y \left[ F_z(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial F_z}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z} \right]}_{\text{(fluxul ce iese prin suprafața superioară)}} - \underbrace{\Delta x \Delta y \left[ F_z(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial F_z}{\partial y} \right]}_{\text{(fluxul ce intră prin suprafața inferioară)}} \quad (57)$$

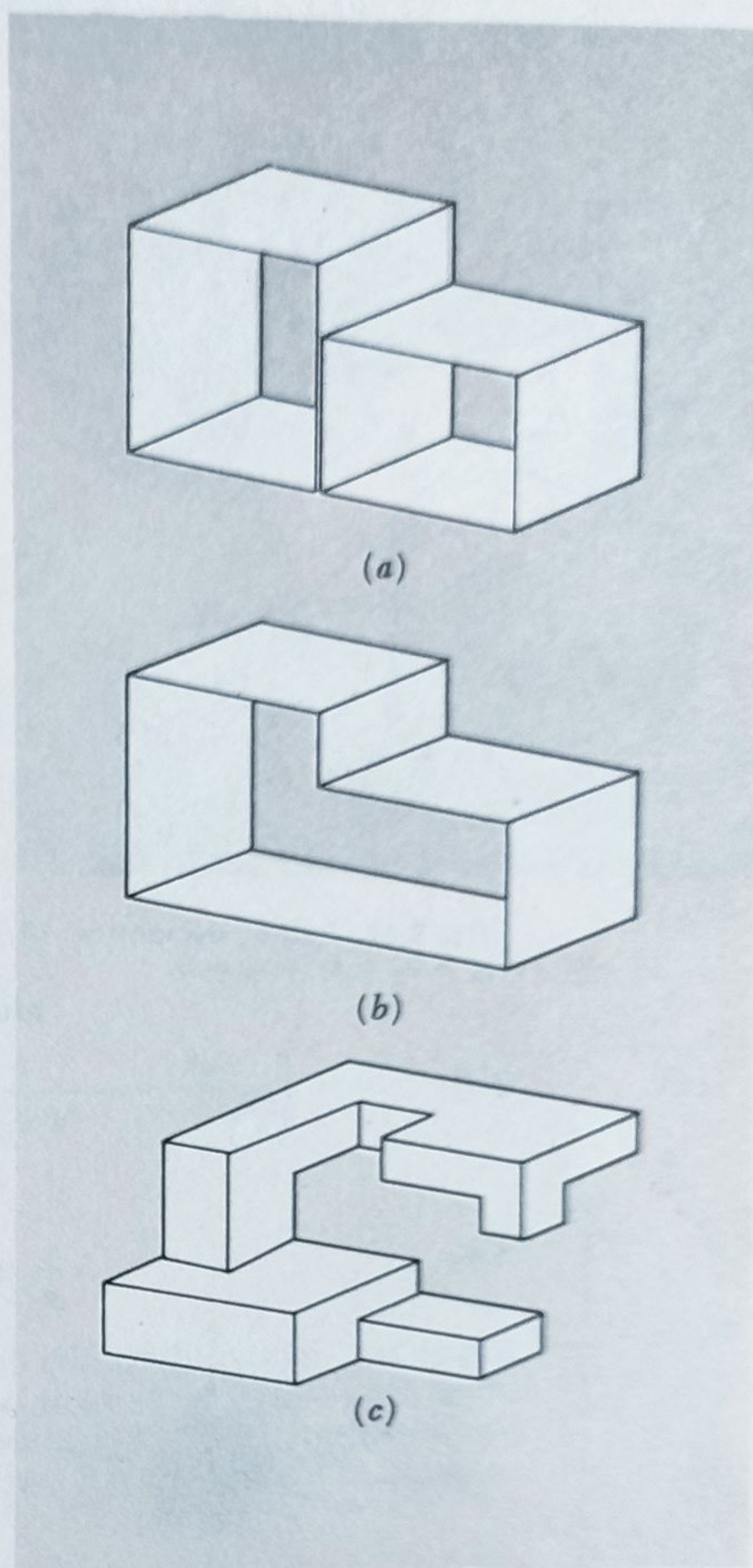
care se reduce la  $\Delta x \Delta y (\partial F_z / \partial z)$ . Este evident că același raționament se aplică și celorlalte perechi de suprafețe.

Astfel, fluxul total ce iese din cutie prin suprafețele paralele cu planul  $yz$  este  $\Delta y \Delta z \Delta x (\partial F_x / \partial x)$ . Observăm că și aici apare produsul  $\Delta x \Delta y \Delta z$ . Prin urmare, fluxul total ce iese din această cutie mică este egal cu:

$$\Phi = \Delta x \Delta y \Delta z \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right). \quad (58)$$

Întrucît volumul cutiei este  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , fluxul raportat la volum este  $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ ; în această expresie nu intră dimensiunile cutiei, ea nu se schimbă la micșorarea cutiei. (Dacă în calculul fluxului am fi reținut termenii proporționali cu  $(\Delta x)^2$ ,  $(\Delta x \Delta y)$  ș.a.m.d., bineînțeles, că la limită aceștia ar fi dispărut.)

Acum începe să ne devină clar de ce această limită nu depinde de forma cutiei. Este evident că ea nu depinde de dimensiunile cutiei, dar aceasta nu ne spune prea mult. Este ușor de văzut că această limită va fi aceeași pentru orice volum, pe care-l putem construi prin asamblarea unor cutioare rectangulare de dimensiuni și forme oarecare. Să considerăm două cutii ca în figura 2.17. Suma fluxului  $\Phi_1$  ce iese din cutia 1 și a fluxului  $\Phi_2$  ce iese din cutia 2 nu se schimbă dacă se îndepărtează peretele despărțitor pentru a forma o singură cutie; orice flux care ar trece prin această suprafață va fi negativ pentru o față și pozitiv pentru cealaltă. Prin urmare, nici o formă bizară ca cea din figura 2.17, c nu schimbă rezultatul. Generalizarea în con-





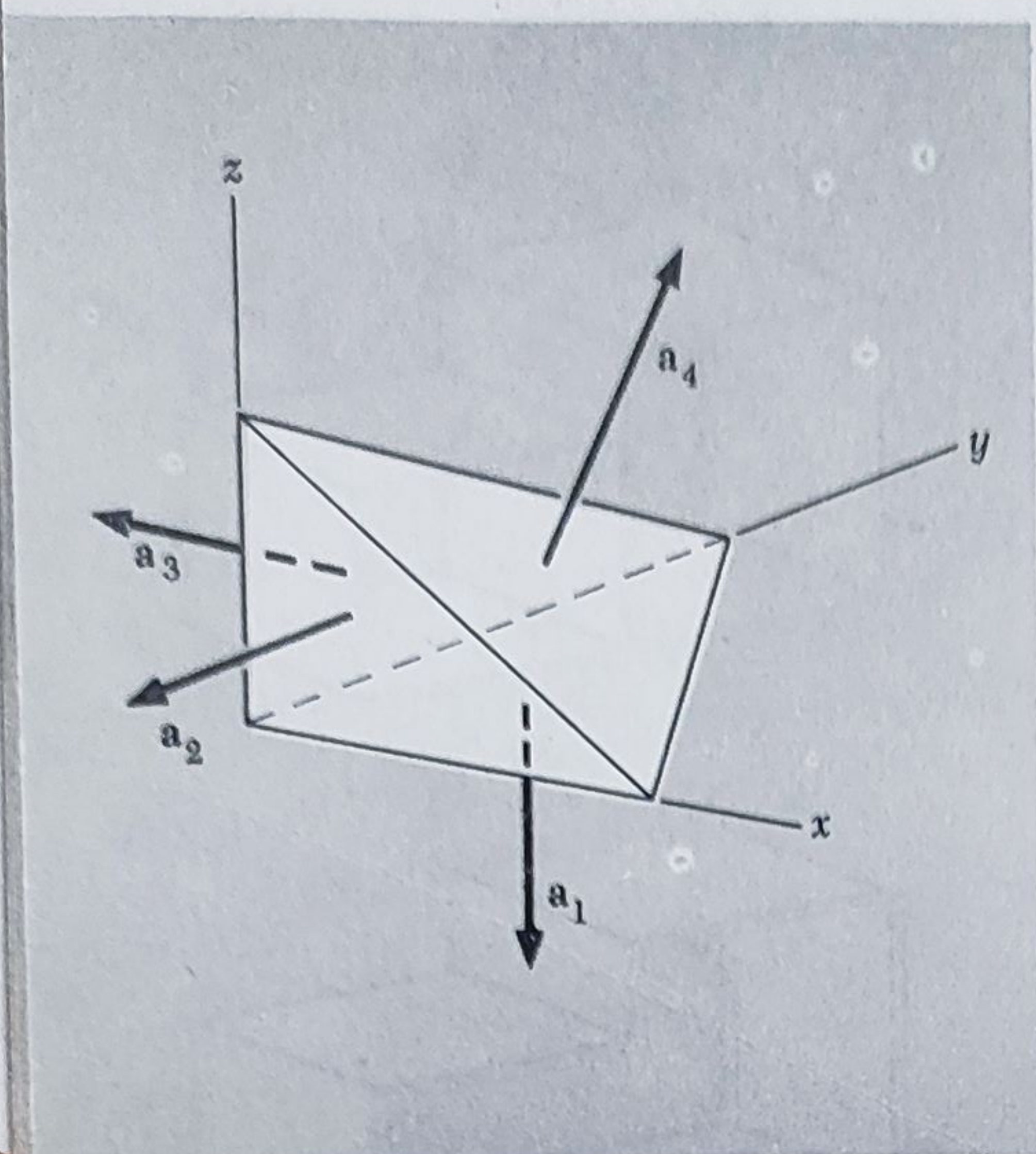


Fig. 2.18. Puteți demonstra că  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ .

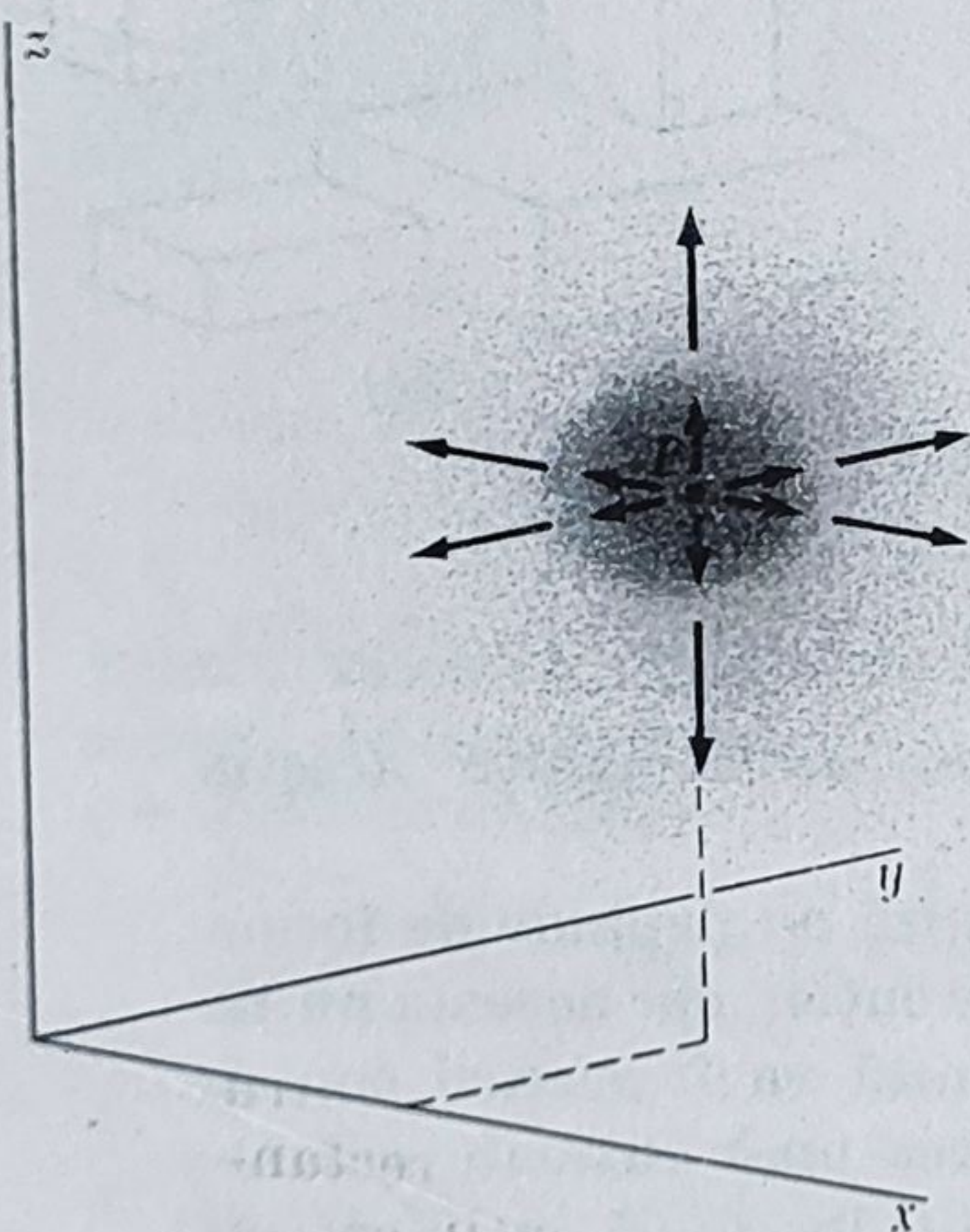


Fig. 2.19. Este reprezentat un câmp a cărui divergență în vecinătatea punctului  $P$  este diferită de zero.

tinuare a rezultatului o lăsăm în seama cititorului. Suprafețele înclinate trebuie alese cu grijă dacă vreți mai întâi, să demonstrați că suma vectorială a celor patru fețe ale tetraedrului din figura 2.18, este nulă.

Ajungem la concluzia că, presupunând funcțiile  $F_x$ ,  $F_y$  și  $F_z$  diferențiabile, limita trebuie să existe și este dată de

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (59)$$

Dacă  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  are o valoare pozitivă într-un punct oarecare, considerînd că  $\mathbf{F}$  este un câmp de viteze, putem găsi „fluxul extern” total în această regiune. De exemplu, dacă toate derivatele parțiale din ecuația (59) sînt pozitive în punctul  $P$ , atunci în vecinătatea acestui punct putem avea un câmp vectorial asemănător cu cel reprezentat în figura 2.19. Dar câmpul poate fi cu totul altul și să aibă, totuși, divergența pozitivă, întrucît i se poate suprapune orice funcție vectorială  $\mathbf{G}$  cu condiția ca  $\operatorname{div} \mathbf{G} = 0$ . În acest fel, una sau două din cele trei derivate parțiale pot fi negative, iar  $\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$ . Divergența este o mărime ce determină doar un aspect al variației spațiale a unui câmp vectorial.

Să aplicăm aceste raționamente unui câmp electric pe care ni-l reprezentăm mai ușor. Un cilindru circular de lungime infinită și de rază  $a$  conține sarcină pozitivă astfel distribuită încît densitatea este  $\rho$ . În exteriorul cilindrului intensitatea câmpului electric este aceeași cu cea produsă de distribuția liniară de pe axă. Este un câmp radial a cărui mărime este proporțională cu  $1/r$ . Aplicînd legea lui Gauss, pentru un cilindru de rază  $r < a$ , găsim câmpul din interiorul cilindrului. Această problemă o puteți rezolva ușor. Veți găsi că câmpul în interiorul cilindrului este direct proporțional cu  $r$  și este tot radial. Valorile exacte ale intensității câmpului sînt:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \text{ pentru } r > a \\ E &= \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \text{ pentru } r < a. \end{aligned} \quad (60)$$



Fig. 2.20. Câmpul în interiorul și în exteriorul unei distribuții de sarcină cilindrice uniforme.

În figura 2.20 este reprezentată o secțiune transversală a cilindrului, perpendiculară pe axa sa. Alegerea sistemului rectangular de axe de coordonate, nu este cea mai fericită în acest caz, dar ne vom folosi de el în rezolvarea ecuației (59), în scopul exersării. Pentru  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , componentele câmpului pot fi exprimate după cum urmează:

$$E_x = \left(\frac{x}{r}\right) E = \frac{\rho a^2 x}{2\epsilon_0(x^2 + y^2)} \text{ pentru } r > a$$

$$= \frac{\rho x}{2\epsilon_0} \text{ pentru } r < a$$

$$E_y = \left(\frac{y}{r}\right) E = \frac{\rho a^2 y}{2\epsilon_0(x^2 + y^2)} \text{ pentru } r > a$$

$$= \frac{\rho y}{2\epsilon_0} \text{ pentru } r < a.$$

Componenta  $E_z$  este, bineînțeles, zero.

În exteriorul cilindrului încărcat  $\text{div } \mathbf{E}$  este

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] = 0. \quad (62)$$

În interiorul cilindrului  $\text{div } \mathbf{E}$  este

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\rho(1+1)}{2\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (63)$$

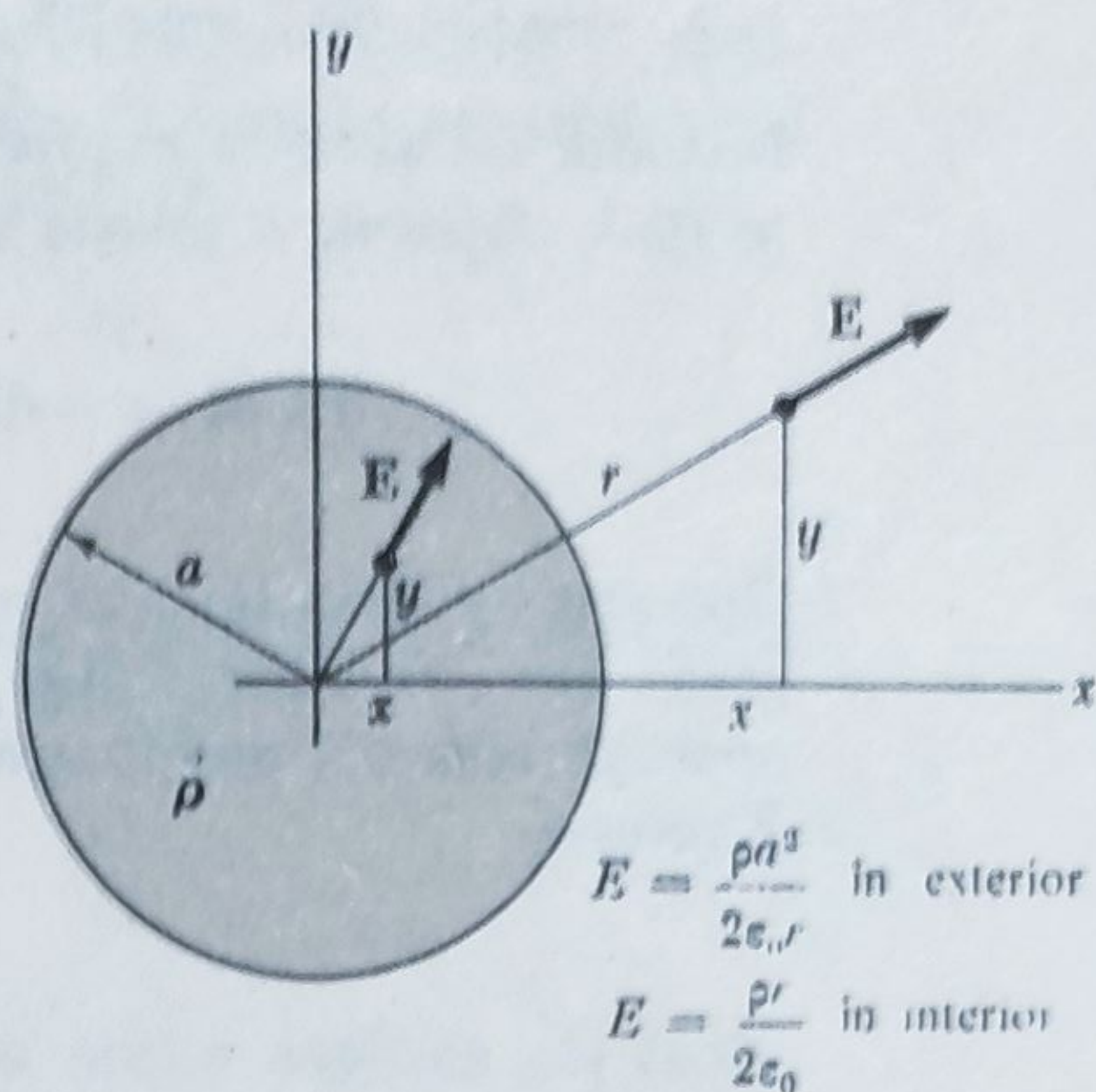
Ne așteptăm la aceste rezultate. În exteriorul cilindrului, unde nu există sarcină, fluxul total ce iese din orice volum — mare sau mic — este zero, astfel încât limita raportului flux/volum este bineînțeles zero. Rezultatul pe care l-am obținut pentru interiorul cilindrului rezultă din relația fundamentală (54).

## 2.12. LAPLACEANUL

Am întâlnit pînă acum două funcții scalare legate de câmpul electric: funcția potențială  $\varphi$  și divergența  $\text{div } \mathbf{E}$ . În sistemul de axe de coordonate relațiile dintre ele se scriu:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \quad (64)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (65)$$



$$E = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \text{ în exterior}$$

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \text{ în interior}$$



Din ecuația (64) rezultă că componenta pe  $x$  a lui  $\mathbf{E}$  este  $E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ . Introducând această expresie și expresiile corespunzătoare pentru  $E_y$  și  $E_z$  în (65), obținem o relație ce leagă  $\text{div } \mathbf{E}$  cu  $\varphi$ :

$$\text{div } \mathbf{E} = -\text{div grad } \varphi = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right). \quad (66)$$

Operația aplicată lui  $\varphi$  în ecuația (66), fără semnul minus, o vom numi „div grad” sau „divergență din gradient de...”. Simbolul folosit pentru această operație este  $\nabla^2$ , numit *operatorul lui Laplace* sau, pur și simplu, *laplacean*. Expresia

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

reprezintă laplaceanul în coordonate carteziane.

Notăția  $\nabla^2$  se explică în modul următor: operatorul gradient se notează frecvent  $\nabla$  și se numește „nabla”. În coordonate carteziane el se scrie:

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (67)$$

Dacă îl considerăm un vector, ridicându-l la pătrat, obținem:

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (68)$$

același cu laplaceanul în coordonate carteziane. Astfel, laplaceanul este deseori numit „nabla la pătrat” și spunem „nabla pătrat din  $\varphi$ ” înțelegând, prin aceasta, „div grad  $\varphi$ ”. Atragem atenția că în alte sisteme de coordonate, de exemplu, coordonate sferice, relația dintre operatorul gradient și operatorul lui Laplace nu mai este așa simplă. Esențial este să știm că operatorul lui Laplace înseamnă aplicarea operației „divergență din gradient de...”.

Acum putem exprima direct o relație (locală) între densitatea de sarcină într-un punct oarecare și funcția potențială în imediata lui vecinătate. Aplicând legea lui Gauss în forma diferențială,  $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , avem

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}. \quad (69)$$

Ecuația (69), numită uneori ecuația lui Poisson, leagă densitatea de sarcină cu derivatele de ordinul doi ale potențialului. În sistemul de coordonate carteziane, ea se scrie

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (70)$$



Această relație poate fi considerată ca exprimarea diferențială a integralei (17), cu ajutorul căreia se calculează potențialul într-un punct, însumând contribuțiile tuturor surselor apropiate și îndepărtate\*.

### 2.13. ECUAȚIA LUI LAPLACE

Peste tot unde  $\rho = 0$ , adică în toate punctele spațiului care nu conțin sarcini electrice, potențialul electric  $\varphi$  satisface ecuația

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = 0} \quad (71)$$

Ea se numește *ecuația lui Laplace* și o întâlnim în multe capitole ale fizicii. Într-adevăr, din punct de vedere matematic, în majoritatea cazurilor, teoria câmpurilor clasice constă în studiul soluțiilor acestei ecuații. Clasa de funcții care satisface ecuația lui Laplace sînt numite *funcții armonice*. Ele au proprietăți remarcabile, una dintre ele fiind următoarea: *dacă funcția  $\varphi(x, y, z)$  satisface ecuația lui Laplace, atunci valoarea medie a lui  $\varphi$  pe suprafața unei sfere oarecare (nu neapărat o sferă mică) este egală cu valoarea lui în centrul sferei*. Această proprietate se demonstrează ușor pentru potențialul electric  $\varphi$ , în regiunile ce nu conțin sarcini. Să considerăm o sferă  $S$  în câmpul unei sarcini punctiforme  $q$  aflată în afara sferei (fig. 2.21). Să presupunem că o sarcină de probă  $q'$  este uniform distribuită pe această sferă. Lucrul mecanic necesar pentru a distribui în acest mod sarcina  $q'$ , este egal cu  $q'$  înmulțită cu valoarea medie a potențialului produs de  $q$  pe sferă. Dar noi știm că acest lucru mecanic va fi același cu cel efectuat pentru a aduce sarcina  $q$  de la infinit în această poziție, sarcina de probă  $q'$  găsindu-se aici de la început, și că în acest caz lucrul mecanic este același ca și în cazul cînd  $q'$  este concentrată în centrul acestei sfere în loc să fie distribuită pe suprafața ei. Astfel se demonstrează cele afirmate pentru acest caz.

Întrucît potențialele mai multor surse se adună, înseamnă că acest lucru este valabil pentru orice sistem de surse aflate în exteriorul sferei  $S$ .

Această proprietate a potențialului este legată de un fapt care v-ar putea dezamăgi; nu se poate constitui un asemenea câmp electric care să mențină o particulă încărcată în *echilibru stabil* în vid. Această „teoremă a imposibilității”, ca și alte teoreme din fizică, ne scutește de

$q'$  este distribuită  
pe suprafața sferei

S

Fig. 2.21. Lucrul mecanic necesar pentru aducerea sarcinii  $q'$  și distribuirea ei pe sferă este egal cu produsul dintre  $q'$  și valoarea medie a potențialului  $\varphi$  creat de sarcina  $q$  pe sferă.

\* De fapt, se poate arăta că ecuația (70) este echivalentul matematic al ecuației (17). Dacă se aplică operatorul lui Laplace integralei din ecuația (17), se obține  $-\frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Nu ne vom opri asupra acestei demonstrații; vom accepta afirmația sau veți încerca s-o faceți singuri.



speculații inutile. Să vedem de ce este adevărată această teoremă. Să presupunem că avem un câmp electric în care, contrar teoremei, *există* un punct  $P$ , unde o particulă încărcată pozitiv se află în echilibru stabil. Asta înseamnă că *orice* deplasare mică a particulei din punctul  $P$ , o va aduce într-un loc de unde sub acțiunea câmpului electric, se va întoarce în punctul  $P$ . Dar asta înseamnă că câmpul  $E$ , al unei sfere mici din jurul punctului  $P$ , este îndreptat spre interior în orice punct de pe suprafață. Aceasta contrazice legea lui Gauss, întrucât în interiorul regiunii nu există sursă de sarcină negativă. (Sarcina noastră de probă nu se ia în considerație și în afară de aceasta, ea este pozitivă.) Cu alte cuvinte, nu există o regiune de vid, în care, în toate punctele câmpul electric să fie îndreptat numai spre interior sau numai spre exterior, care este condiția necesară pentru echilibru stabil. Exprimând același lucru cu ajutorul potențialului electric, se poate spune că poziția stabilă a unei particule încărcate este aceea în care potențialul  $\varphi$  este sau mai mic decât al tuturor punctelor învecinate (dacă particula este încărcată pozitiv) sau mai mare decât al tuturor punctelor învecinate (dacă particula este încărcată negativ). Evident, pentru o funcție a cărei valoare medie pe sferă este întotdeauna egală cu valoarea ei în centrul sferei, nu este posibilă nici una din condiții.

Bineînțeles, o particulă încărcată se poate găsi în *echilibru* într-un câmp electrostatic în sensul că forța ce acționează asupra ei este nulă. Un asemenea caz este punctul din figura 1.10 în care  $E = 0$ . Punctul aflat la mijlocul distanței dintre două sarcini pozitive egale, constituie o poziție de echilibru pentru o a treia sarcină, fie pozitivă, fie negativă. (Ce se va întâmpla dacă a treia sarcină va fi deplasată puțin din poziția ei de echilibru?) Între altele, cu ajutorul câmpurilor electrice variabile în timp, este posibilă captarea și menținerea unei particule încărcate în stare de echilibru stabil.

## 2.14. DEOSEBIREA DINTRE FIZICĂ ȘI MATEMATICĂ

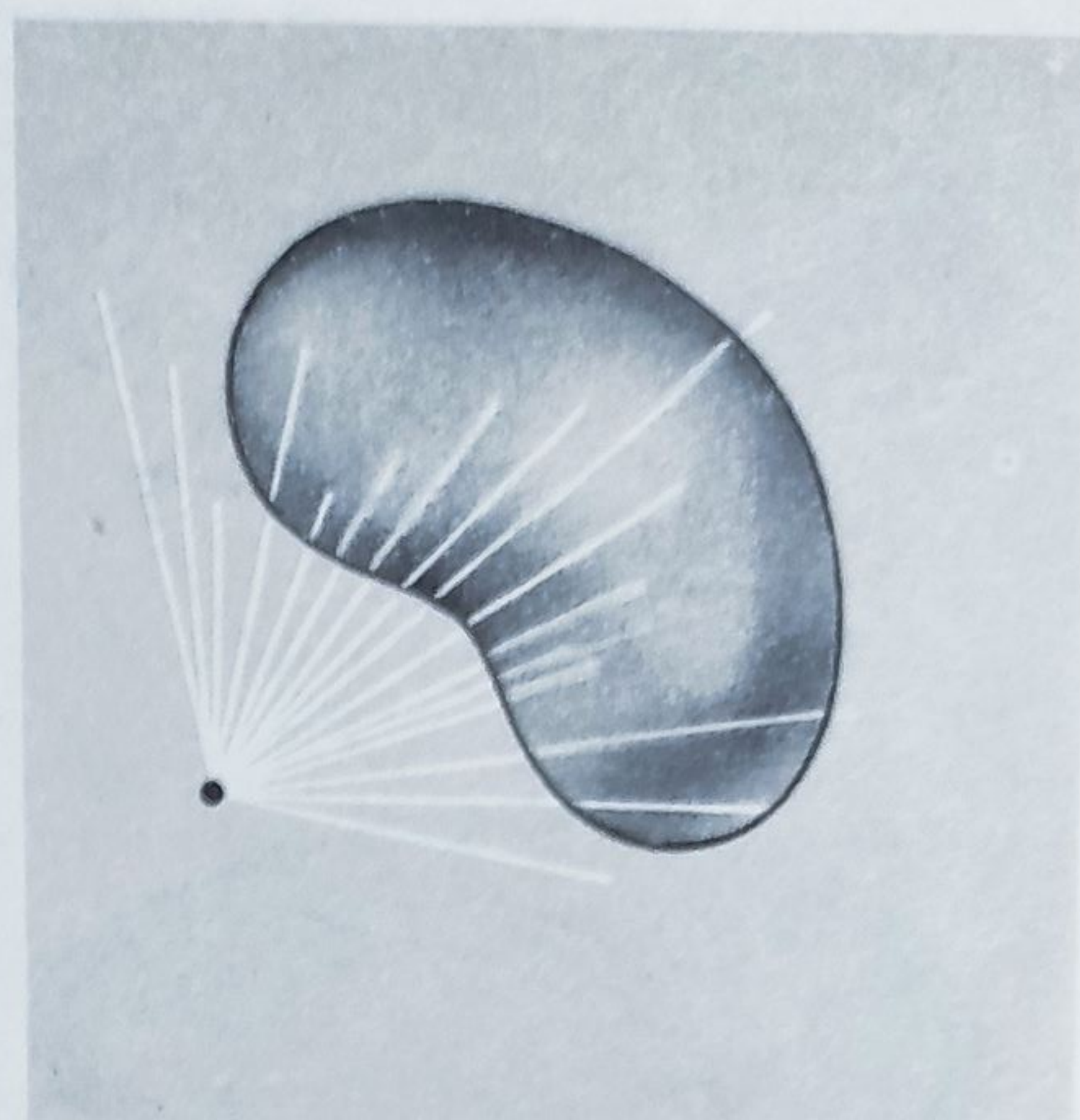
În ultimele paragrafe ne-am ocupat de relații matematice și de noi moduri de exprimare a faptelor cunoscute. Pentru a deosebi fizica de matematică și legea de definiție, să încercăm să ne imaginăm ce s-ar întâmpla dacă forța electrică n-ar varia invers proporțional cu pătratul distanței, ci ar fi o forță cu o rază de acțiune finită, variind, de exemplu, după legea

$$\frac{e^{-\lambda r}}{r^2}. \quad (72)$$

În acest caz, legea lui Gauss, exprimată în formă integrală în ecuația (52) nu este adevărată, întrucât pe o suprafață foarte mare, ce cuprinde câteva surse, intensitatea câmpului pe această suprafață tinde spre o valoare foarte mică. Totuși, vom mai putea defini un câmp în orice punct al spațiului. Putem calcula divergența acestui câmp, iar ecuația (53), care descrie proprietatea matematică a *oricărui* câmp vectorial, va rămâne adevărată. Există vreo contradicție aici? Nu, deoarece ecuația (54), de asemenea, nu va fi valabilă. Divergența câmpului nu va mai fi egală cu densitatea sursei. Putem înțelege aceasta, observând că printr-un volum mic, lipsit de surse, poate totuși trece un flux, dacă câmpul sursei aflate în afara volumului este limitat în spațiu. După cum se vede în figura 2.22, prin acea parte a suprafeței, ce se află în dreptul sursei, fluxul ce intră este mult mai mare decât cel care iese.



Fig. 2.22. Într-un câmp ce nu variază invers proporțional cu pătratul distanței, fluxul printr-o suprafață închisă nu este nul.



Prin urmare, putem afirma că ecuațiile (52) și (54) exprimă una și aceeași *lege fizică*, legea proporționalității inverse cu pătratul distanței pe care Coulomb a stabilit-o măsurind direct forțele ce acționează între două corpuri încărcate, în timp ce ecuația (53) este expresia unei *teoreme matematice*, care ne permite trecerea acestei legi din forma diferențială în cea integrală și invers.

Cum pot fi explicate aceste relații diferențiale între sursă și câmp într-o lume, în care sarcina electrică nu este un „jeleu” uniform, ci o concentrare de particule, despre a căror structură internă știm foarte puțin? Efectiv, ecuația lui Poisson, — formula (69), are sens numai la scară microscopică. Densitatea de sarcină  $\rho$  poate fi interpretată ca o valoare medie de sarcină pe o regiune mică dar finită, care conține multe particule. Prin urmare, funcția  $\rho$ , în sens matematic, nu poate fi continuă. Atunci când micșorăm domeniul  $V_i$ , pentru a obține forma diferențială a legii lui Gauss, ca fizicieni, știm că nu-l putem micșora oricât. E neplăcut să recunoaștem că, practic, ne descurcăm cu modelele continue numai pentru sistemele electrice la scară microscopică. În lumea atomului există particule elementare și vid. În interiorul particulelor, chiar dacă legea lui Coulomb joacă vreun rol, mai au loc multe alte fenomene. În electrostatică, vidul se supune ecuației lui Laplace. Cu toate acestea, nu sîntem convinși, că chiar și în vid, trecerea la limită către zero n-ar avea vreun sens *fizic*.

## 2.15. ROTORUL UNEI FUNCȚII VECTORIALE

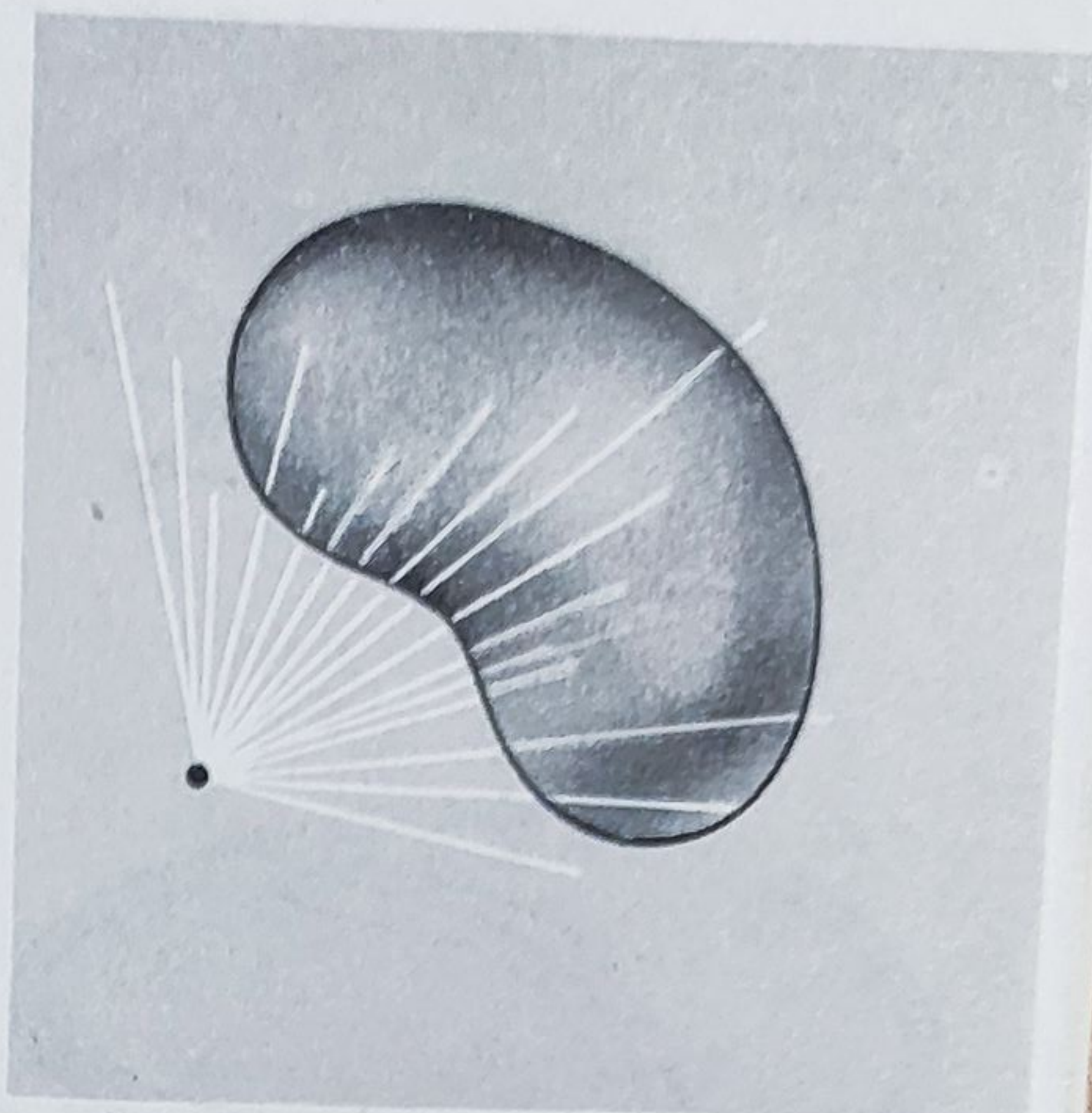
Am introdus noțiunea de divergență, ca o proprietate locală a câmpului vectorial, pornind de la integrala de suprafață pe o suprafață mare, închisă. În același mod, să considerăm integrala de linie a unui câmp vectorial oarecare  $\mathbf{F}(x, y, z)$ , pe un contur închis și anume pe curba  $C$ . Putem considera că curba  $C$  mărginește o suprafață oarecare  $S$ . Denumirea potrivită pentru mărimea unei asemenea integrale de linie, luată pe un contur închis, este cea de *circulație*; ca simbol al ei vom folosi  $\Gamma$  (litera grecească mare gama):

$$\Gamma = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (73)$$

$d\mathbf{s}$  este elementul de drum, un vector infinitezimal tangent la  $C$  în punctul respectiv (fig. 2.23, a). Există două sensuri de parcurgere a lui  $C$ ; pentru a determina direcția lui  $d\mathbf{s}$ , alegem una din ele. În general, nu e nevoie ca curba  $C$  să fie plană, ea poate fi deformată oricum.



Fig. 2.22. Într-un câmp ce nu variază invers proporțional cu pătratul distanței, fluxul printr-o suprafață închisă nu este nul.



Prin urmare, putem afirma că ecuațiile (52) și (54) exprimă una și aceeași *lege fizică*, legea proporționalității inverse cu pătratul distanței pe care Coulomb a stabilit-o măsurând direct forțele ce acționează între două corpuri încărcate, în timp ce ecuația (53) este expresia unei *teoreme matematice*, care ne permite trecerea acestei legi din forma diferențială în cea integrală și invers.

Cum pot fi explicate aceste relații diferențiale între sursă și câmp într-o lume, în care sarcina electrică nu este un „jeleu” uniform, ci o concentrare de particule, despre a căror structură internă știm foarte puțin? Efectiv, ecuația lui Poisson, — formula (69), are sens numai la scară microscopică. Densitatea de sarcină  $\rho$  poate fi interpretată ca o valoare medie de sarcină pe o regiune mică dar finită, care conține multe particule. Prin urmare, funcția  $\rho$ , în sens matematic, nu poate fi continuă. Atunci când micșorăm domeniul  $V_i$ , pentru a obține forma diferențială a legii lui Gauss, ca fizicieni, știm că nu-l putem micșora oricât. E neplăcut să recunoaștem că, practic, ne descurcăm cu modelele continue numai pentru sistemele electrice la scară microscopică. În lumea atomului există particule elementare și vid. În interiorul particulelor, chiar dacă legea lui Coulomb joacă vreun rol, mai au loc multe alte fenomene. În electrostatică, vidul se supune ecuației lui Laplace. Cu toate acestea, nu sîntem convinși, că chiar și în vid, trecerea la limită către zero n-ar avea vreun sens *fizic*.

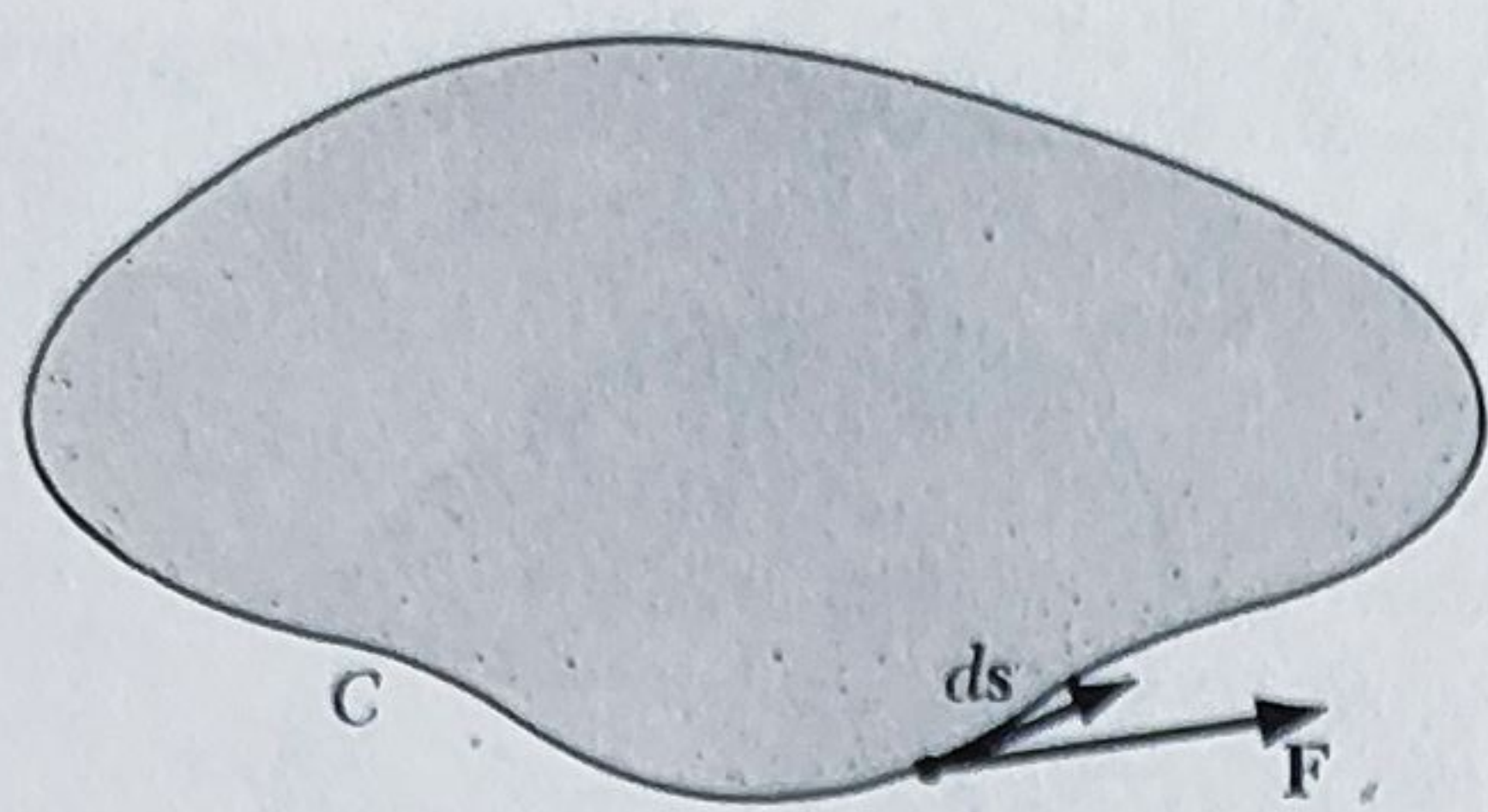
## 2.15. ROTORUL UNEI FUNCȚII VECTORIALE

Am introdus noțiunea de divergență, ca o proprietate locală a câmpului vectorial, pornind de la integrala de suprafață pe o suprafață mare, închisă. În același mod, să considerăm integrala de linie a unui câmp vectorial oarecare  $\mathbf{F}(x, y, z)$ , pe un contur închis și anume pe curba  $C$ . Putem considera că curba  $C$  mărginește o suprafață oarecare  $S$ . Denumirea potrivită pentru mărimea unei asemenea integrale de linie, luată pe un contur închis, este cea de *circulație*; ca simbol al ei vom folosi  $\Gamma$  (litera grecească mare gama):

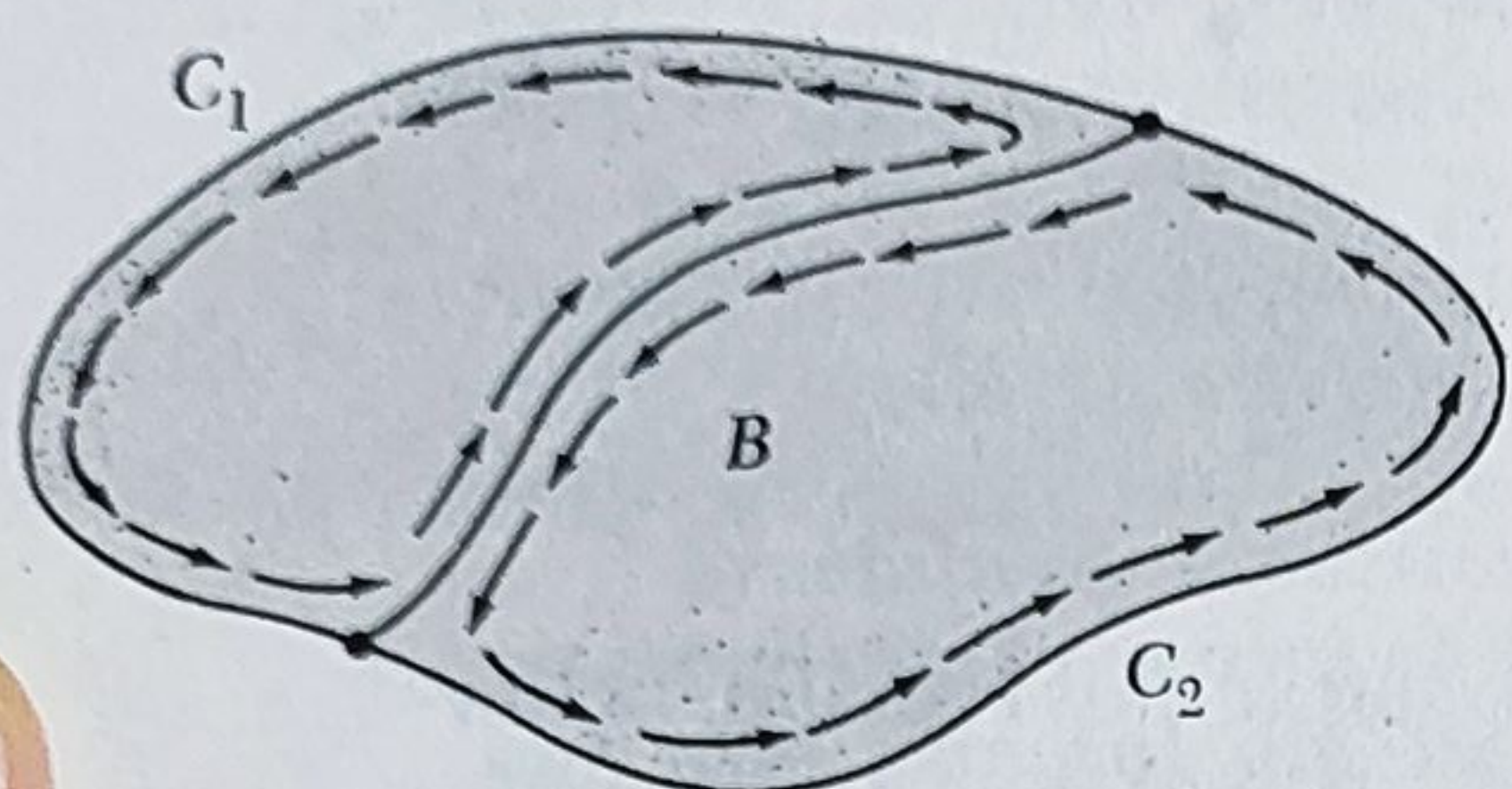
$$\Gamma = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (73)$$

$d\mathbf{s}$  este elementul de drum, un vector infinitezimal tangent la  $C$  în punctul respectiv (fig. 2.23, a). Există două sensuri de parcurgere a lui  $C$ ; pentru a determina direcția lui  $d\mathbf{s}$ , alegem una din ele. În general, nu e nevoie ca curba  $C$  să fie plană, ea poate fi deformată oricum.

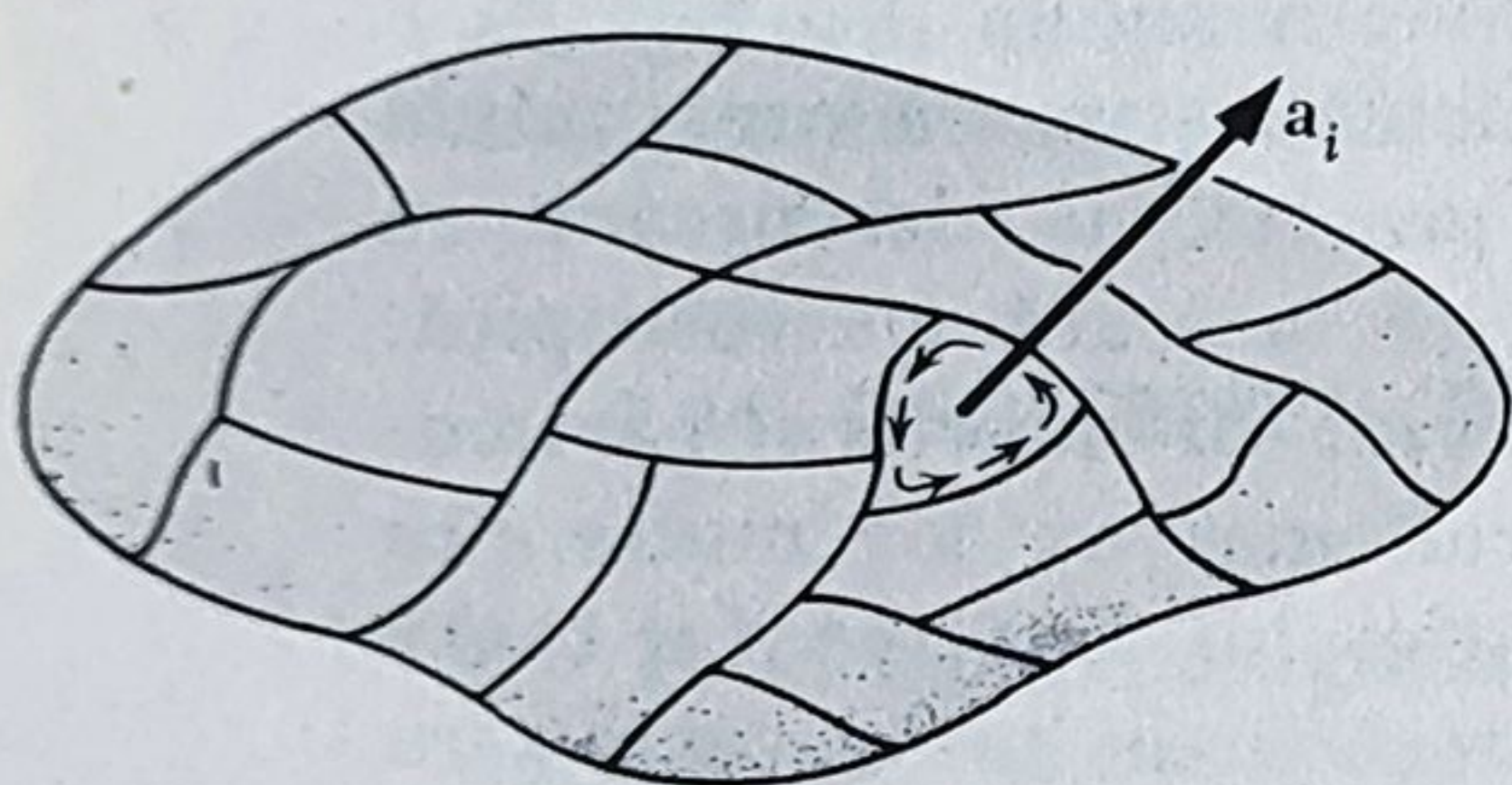




(a)



(b)



(c)

Fig. 2.23. Pentru bucla subdivizată, suma tuturor circulațiilor și în jurul tuturor elementelor este egală cu circulația în jurul curbei inițiale  $C$ .

Traversăm suprafața  $C$  pe drumul  $B$ , formând două bucle  $C_1$  și  $C_2$ , ambele cuprinzând drumul  $B$  (fig. 2.23, b). Calculăm integrala de linie pe fiecare din ele, parcurgându-le în același sens. Este ușor de observat că suma celor două circulații  $\Gamma_1$  și  $\Gamma_2$ , va fi egală cu circulația inițială de-a lungul curbei  $C$ . Acest lucru se explică prin aceea că, în cele două integrări, drumul  $B$  este parcurs în sensuri opuse și, prin urmare, în integrale rămâne doar contribuția acelor părți ale buclelor, care împreună formează curba inițială  $C$ . Dacă se continuă subdivizarea în bucle mai mici  $C_1, \dots, C_i, \dots, C_N$  suma integralelor nu se schimbă:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^N \int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}_i \text{ sau } \Gamma = \sum_{i=1}^N \Gamma_i. \quad (74)$$

Aici, de asemenea, se poate continua subdivizarea, cu scopul ca la limită să obținem o caracteristică cantitativă locală a cîmpului. Micșorînd buclele, se micșorează circulația, dar și aria. Este normal, astfel, să considerăm raportul dintre *circulația buclei* și *aria buclei*, exact cum am procedat în paragraful 2.9, cînd am considerat raportul dintre *flux* și *volum*. Totuși, aici situația este puțin diferită, deoarece aria  $a_i$ , a elementului de suprafață mărginită

de bucla  $C_i$ , este în realitate un vector; o suprafață are o orientare în spațiu. Nu putem lua raportul dintre un scalar și un vector! De fapt, micșorînd buclele, în vecinătatea unui punct dat, putem alege orientarea buclei oricum. (Nu uitați că nu sîntem legați de o suprafață anume, mărginită de curba  $C$ .) De aceea noi putem trece la limită în moduri complet diferite, iar rezultatul va reflecta acest lucru.

Să alegem o orientare oarecare pentru elementul de suprafață aflat într-unul din ultimele stadii de divizare. Vectorul unitar  $\hat{n}$  indică normala la acest element de suprafață și acest vector va rămîne constant la micșorarea drumului din jurul punctului  $P$ . Limita raportului dintre circulație și aria elementului se va scrie în felul următor:

$$\lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} \text{ sau } \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{a_i}. \quad (75)$$



Regula pentru semnele legate de direcția lui  $\hat{n}$  și sensul de parcurgere a lui  $C_i$  în integrala de linie, sint date de regula burghiului drept (fig. 2.24). Limita obținută în acest fel reprezintă o mărime scalară, asociată punctului  $P$  în câmpul vectorial  $F$  și direcției  $\hat{n}$ . Alegînd trei direcții independente  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  și  $\hat{z}$ , obținem trei numere diferite. Rezultă că aceste trei numere pot fi considerate ca componentele unui vector. Acest vector îl numim rotor  $F$ . Cu alte cuvinte, limita obținută pentru o anumită direcție  $\hat{n}$ , este componenta vectorului rotor  $F$  pe acea direcție. Să exprimăm acest lucru printr-o ecuație:

$$(\text{rot } F) \cdot \hat{n} = \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} = \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\int_{C_i} F \cdot ds}{a_i} \quad (76)$$

De exemplu, componenta  $x$  a rot  $F$  se obține alegînd  $\hat{n} = \hat{x}$  (fig. 2.25). Bucla micșorîndu-se în jurul punctului  $P$ , ea rămîne într-un plan perpendicular pe axa  $x$ . În general, vectorul rot  $F$  variază de la punct la punct. Dacă vom micșora suprafața în jurul altui punct, raportul dintre circulație și arie va avea altă valoare, depinzînd de natura funcției vectoriale  $F$ . Înseamnă că rot  $F$  este el însuși o funcție vectorială de coordonate. Direcția lui, în orice punct, este normală la planul ce trece prin acel punct pentru care mărimea circulației este maximă. Mărimea rotorului este egală cu valoarea limită a circulației pe unitatea de arie a planului din jurul punctului ales.

Noi am afirmat doar, că mărimea astfel determinată este un vector, fără a demonstra acest lucru. Pentru a fi vector, componentele astfel determinate, trebuie să se comporte în toate privințele ca componentele unui vector. Să presupunem că am găsit anumite valori pentru componentele  $x$ ,  $y$  și  $z$ , conform ecuației (76). Dacă alegem apoi o a patra direcție arbitrară pentru vectorul  $\hat{n}$ , atunci rezultatul obținut din relația (76), trebuie să corespundă cu cele trei componente obținute anterior intrucît un vector este determinat

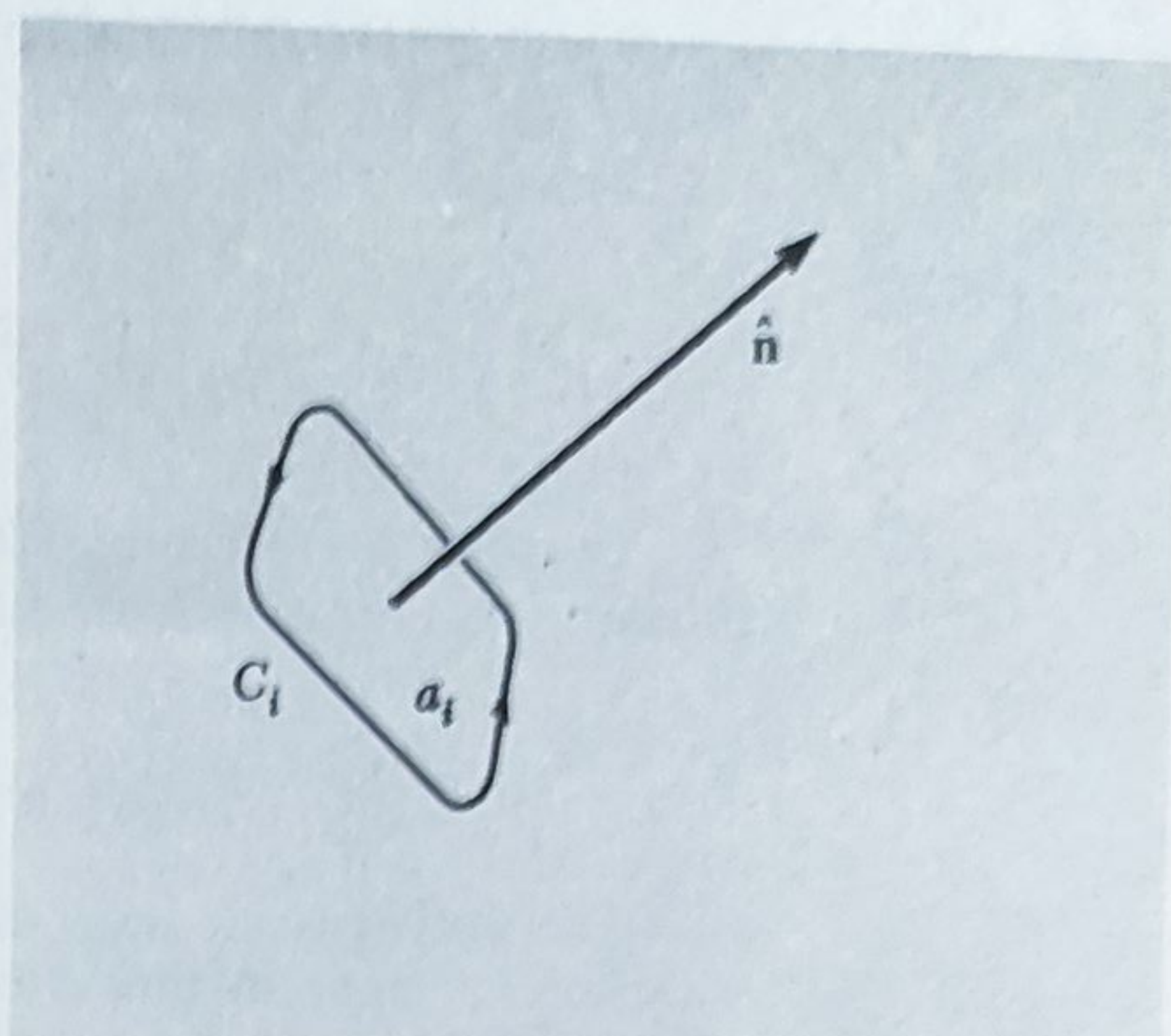


Fig. 2.24. Regula burghiului drept pentru stabilirea relației dintre normala la suprafață și direcția circulației integralei de linie.

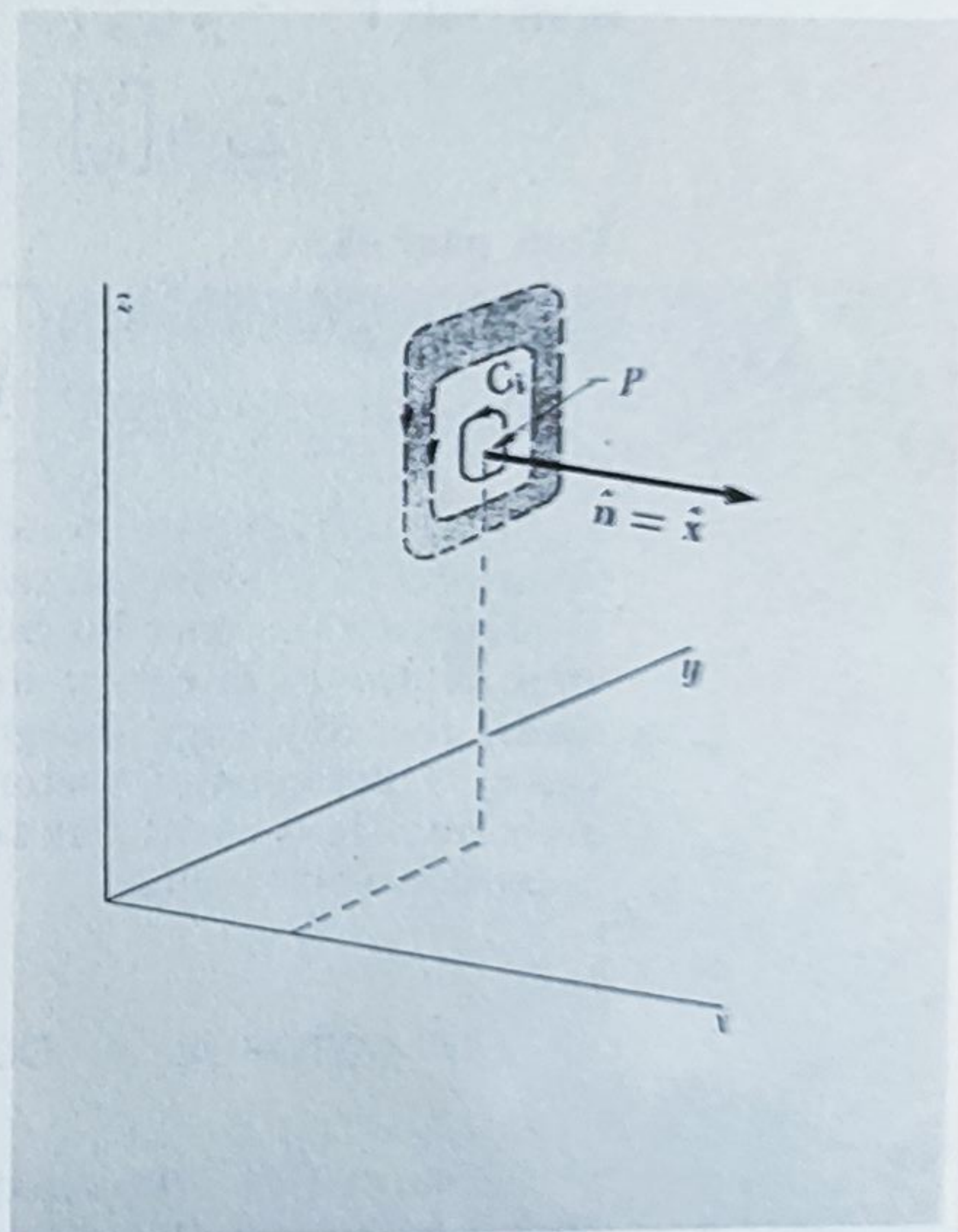


Fig. 2.25. Elementul se micșorează în jurul punctului  $P$ , direcția normalei, ce coincide cu axa  $x$ , rămînînd neschimbată.



doar de trei componente. Dacă vă interesează această chestiune, problema 2.24 vă va sugera o cale pentru a vă convinge că ecuația (76) definește, într-adevăr, o componentă a unui vector.

## 2.16. TEOREMA LUI STOKES

Pornind de la circulația în jurul unei suprafețe infinitezimale, ne putem întoarce la circulația în jurul buclei mari inițiale  $C$ :

$$\Gamma = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i = \sum_{i=1}^N a_i \left[ \frac{\Gamma_i}{a_i} \right]. \quad (77)$$

Ultimul termen l-am înmulțit și împărțit, pur și simplu, cu  $a_i$ . Să observăm acum, ce se întâmplă cu termenul din partea dreaptă a ecuației dacă  $N$  crește foarte mult, iar toate ariile  $a_i$  se micșorează. Mărimea din paranteză devine  $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i$ , unde  $\hat{\mathbf{n}}_i$  este vectorul unitate perpendicular pe elementul de suprafață  $i$ . Astfel, în partea dreaptă a ecuației, avem suma produsului dintre componenta normală a  $(\text{rot } \mathbf{F})$  și aria elementului de suprafață, peste toate elementele de suprafață care formează suprafața  $S$  subîntinsă de  $C$ . Aceasta nu este altceva decât *integrala de suprafață*, pe suprafața  $S$ , a vectorului  $\text{rot } \mathbf{F}$ :

$$\sum_{i=1}^N a_i \left[ \frac{\Gamma_i}{a_i} \right] = \sum_{i=1}^N a_i (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \rightarrow \int_S d\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{F}. \quad (78)$$

Vom găsi că:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \quad (79)$$

Relația (79) este o teoremă matematică numită *teorema lui Stokes*. Observăm că ea seamănă ca structură cu teorema lui Gauss, adică cu teorema divergenței. Teorema lui Stokes stabilește o relație între integrala de linie a unui vector și integrala de suprafață a rotorului vectorului. Teorema lui Gauss (ec. 51) leagă integrala de suprafață a unui vector de integrala de volum a divergenței vectorului. Teorema lui Stokes se referă la suprafața mărginită de o curbă, iar teorema lui Gauss la volumul și suprafața ce delimitează acest volum.

## 2.17. ROTORUL ÎN COORDONATE CARTEZIENE

Relația (76) este ecuația de definiție a rotorului  $\mathbf{F}$ , formulată fără a specifica sistemul de coordonate. În această privință ea este analogă cu ecuația de definiție a divergenței (49). Ca și în cazul divergenței, vom calcula  $\text{rot } \mathbf{F}$  cînd funcția vectorială  $\mathbf{F}(x, y, z)$  este dată explicit. Pentru aceasta, vom rezolva integrala din relația (76), dar o vom face pentru un drum foarte simplu și anume, drumul ce delimitează un element de suprafață dreptunghiulară, paralelă cu planul  $xy$  (fig. 2.26). În acest caz  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ . Conform



regulii stabilite pentru semne, sensul integrării va fi în sensul acelor unui ceasornic, dacă privim de jos în sus pe direcția lui  $\hat{n}$ . În figura 2.27 dreptunghiul este privit de sus în jos.

Integrala de linie din  $A$  pe un asemenea element de drum depinde de variația lui  $A_x$  cu  $y$  și variația lui  $A_y$  cu  $x$ . Întrucât  $A_x$  are aceeași valoare medie și pe latura superioară a dreptunghiului (fig. 2.27) ca și pe latura inferioară, evident, contribuțiile acestora în integrala de linie se vor anihila reciproc. Aceeași observație este valabilă și pentru celelalte laturi ale dreptunghiului. În aproximația de ordinul întâi, diferența dintre valoarea medie a lui  $A_x$  pe segmentul de sus pentru  $y + \Delta y$  și valoarea medie pe segmentul de jos pentru  $y$ , este

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \Delta y. \quad (80)$$

Folosim același raționament, pe care l-am folosit în figura 2.16, b:

$$A_x = A_x(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

(la mijlocul segmentului inferior) (81)

$$A_x = A_x(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

(la mijlocul segmentului superior).

Aceste valori medii s-au obținut din dezvoltarea în serie Taylor, reținând termenii de ordinul întâi. Contribuția finală în circulație este dată de produsul dintre diferența lor și lungimea elementului de drum  $\Delta x$ . Această contribuție este egală cu  $-\Delta x \Delta y (\partial A_x / \partial y)$ . Semnul minus apare datorită faptului că integrarea se face de la dreapta la stînga pe latura de sus a dreptunghiului, și dacă componenta pozitivă  $A_x$  este mai mare sus, ea dă o contribuție negativă în circulație. Contribuția celorlalte laturi este  $\Delta y \Delta x (\partial A_y / \partial x)$ , semnul fiind pozitiv, întrucât componenta pozitivă  $A_y$  este mai mare pe latura din dreapta, contribuția acestor două laturi în circulație este pozitivă.

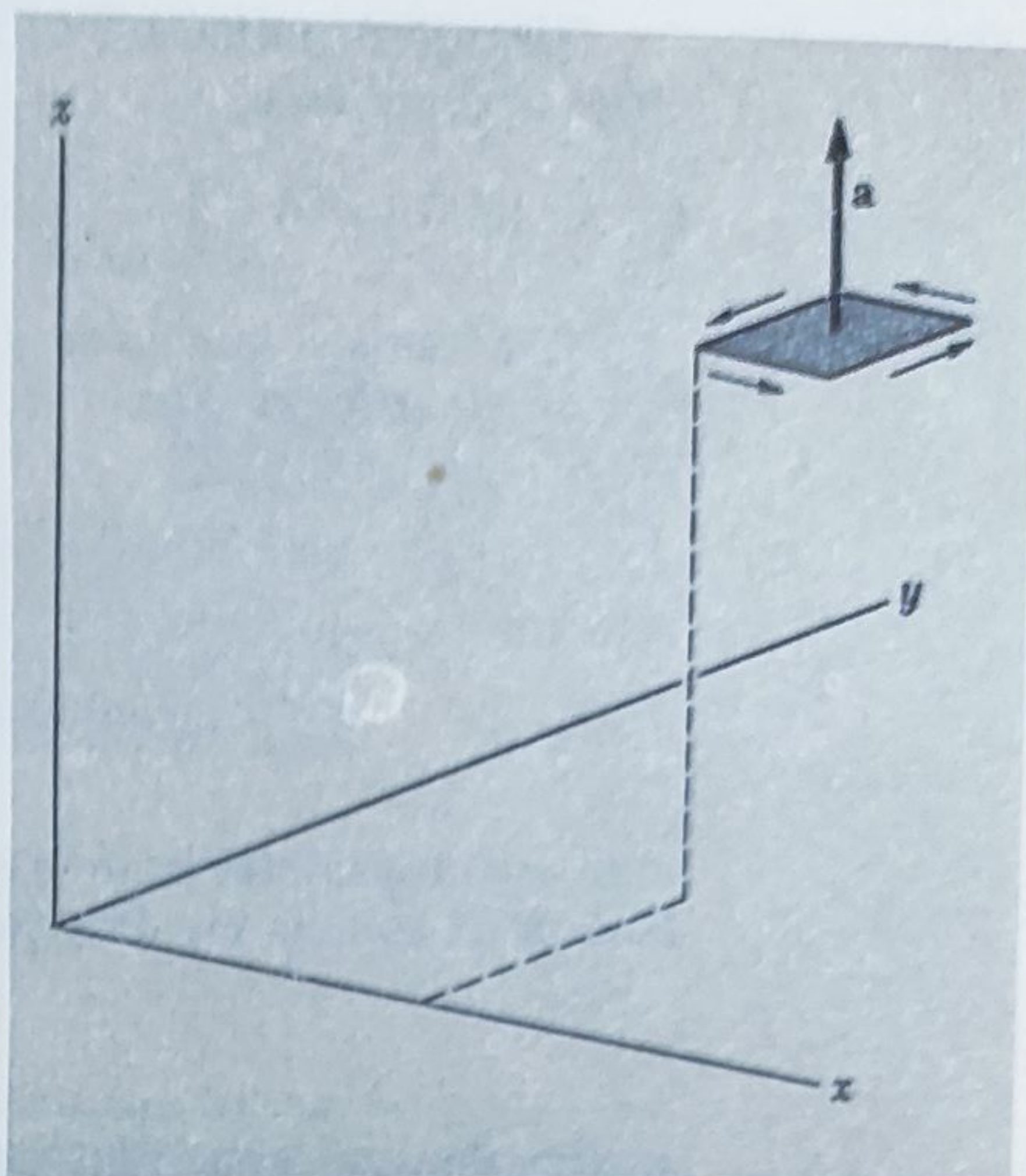


Fig. 2.26. Circulația în jurul unei porțiuni dreptunghiulare cu  $\hat{n} = \hat{z}$ .

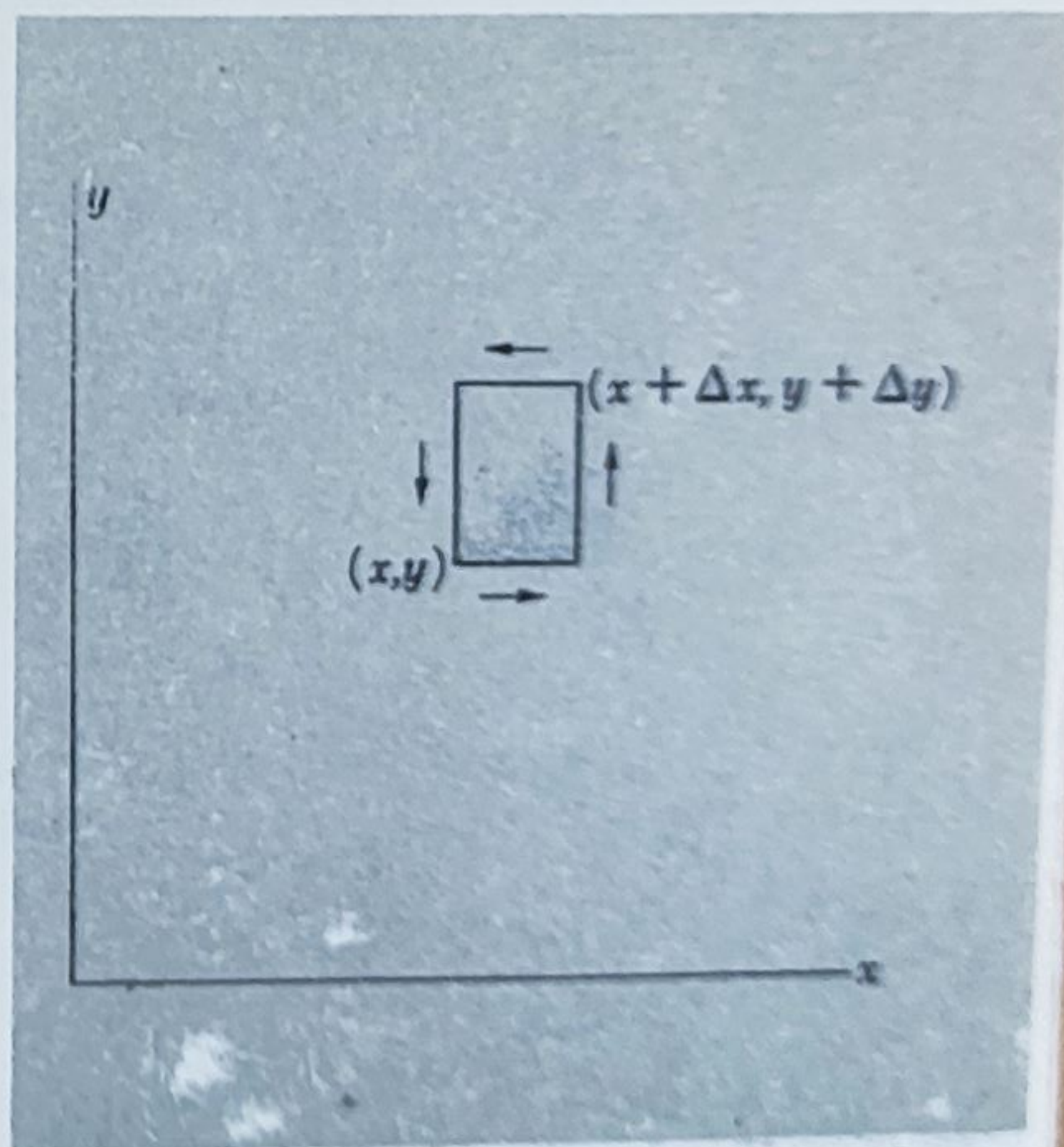


Fig. 2.27. Elementul de suprafață din figura 2.26 este privit de sus în jos.



regulii stabilite pentru semne, sensul integrării va fi în sensul acelor unui ceasornic, dacă privim de jos în sus pe direcția lui  $\hat{n}$ . În figura 2.27 dreptunghiul este privit de sus în jos.

Integrala de linie din  $A$  pe un asemenea element de drum depinde de variația lui  $A_x$  cu  $y$  și variația lui  $A_y$  cu  $x$ . Întrucît  $A_x$  are aceeași valoare medie și pe latura superioară a dreptunghiului (fig. 2.27) ca și pe latura inferioară, evident, contribuțiile acestora în integrala de linie se vor anihila reciproc. Aceeași observație este valabilă și pentru celelalte laturi ale dreptunghiului. În aproximația de ordinul întâi, diferența dintre valoarea medie a lui  $A_x$  pe segmentul de sus pentru  $y + \Delta y$  și valoarea medie pe segmentul de jos pentru  $y$ , este

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \Delta y. \quad (80)$$

Folosim același raționament, pe care l-am folosit în figura 2.16, b:

$$A_x = A_x(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

(la mijlocul segmentului inferior) (81)

$$A_x = A_x(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

(la mijlocul segmentului superior).

Aceste valori medii s-au obținut din dezvoltarea în serie Taylor, reținînd termenii de ordinul întâi. Contribuția finală în circulație este dată de produsul dintre diferența lor și lungimea elementului de drum  $\Delta x$ . Această contribuție este egală cu  $-\Delta x \Delta y (\partial A_x / \partial y)$ . Semnul minus apare datorită faptului că integrarea se face de la dreapta la stînga pe latura de sus a dreptunghiului, și dacă componenta pozitivă  $A_x$  este mai mare sus, ea dă o contribuție negativă în circulație. Contribuția celorlalte laturi este  $\Delta y \Delta x (\partial A_y / \partial x)$ , semnul fiind pozitiv, întrucît componenta pozitivă  $A_y$  este mai mare pe latura din dreapta, contribuția acestor două laturi în circulație este pozitivă.

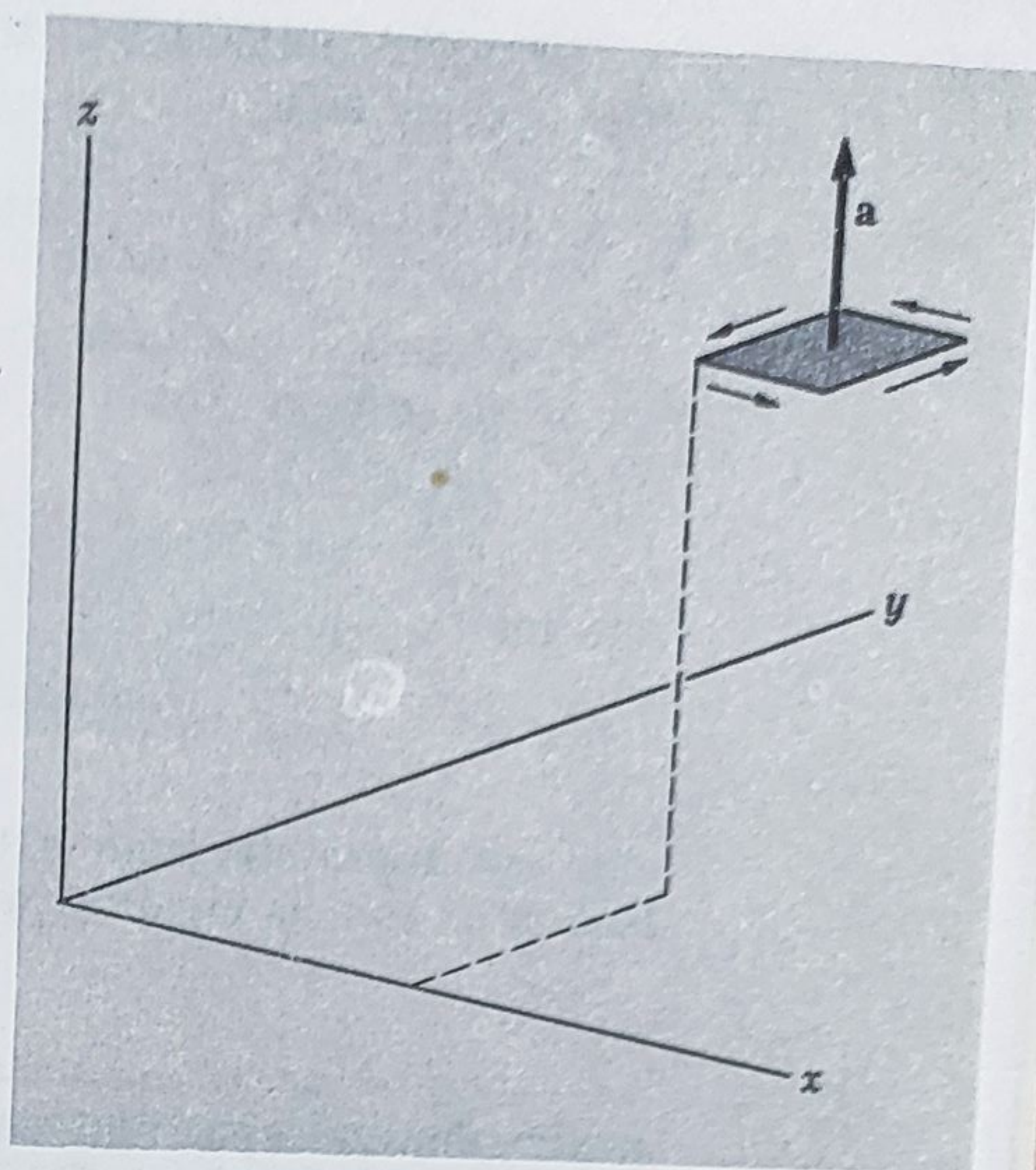


Fig. 2.26. Circulația în jurul unei porțiuni dreptunghiulare cu  $\hat{n} = \hat{z}$ .

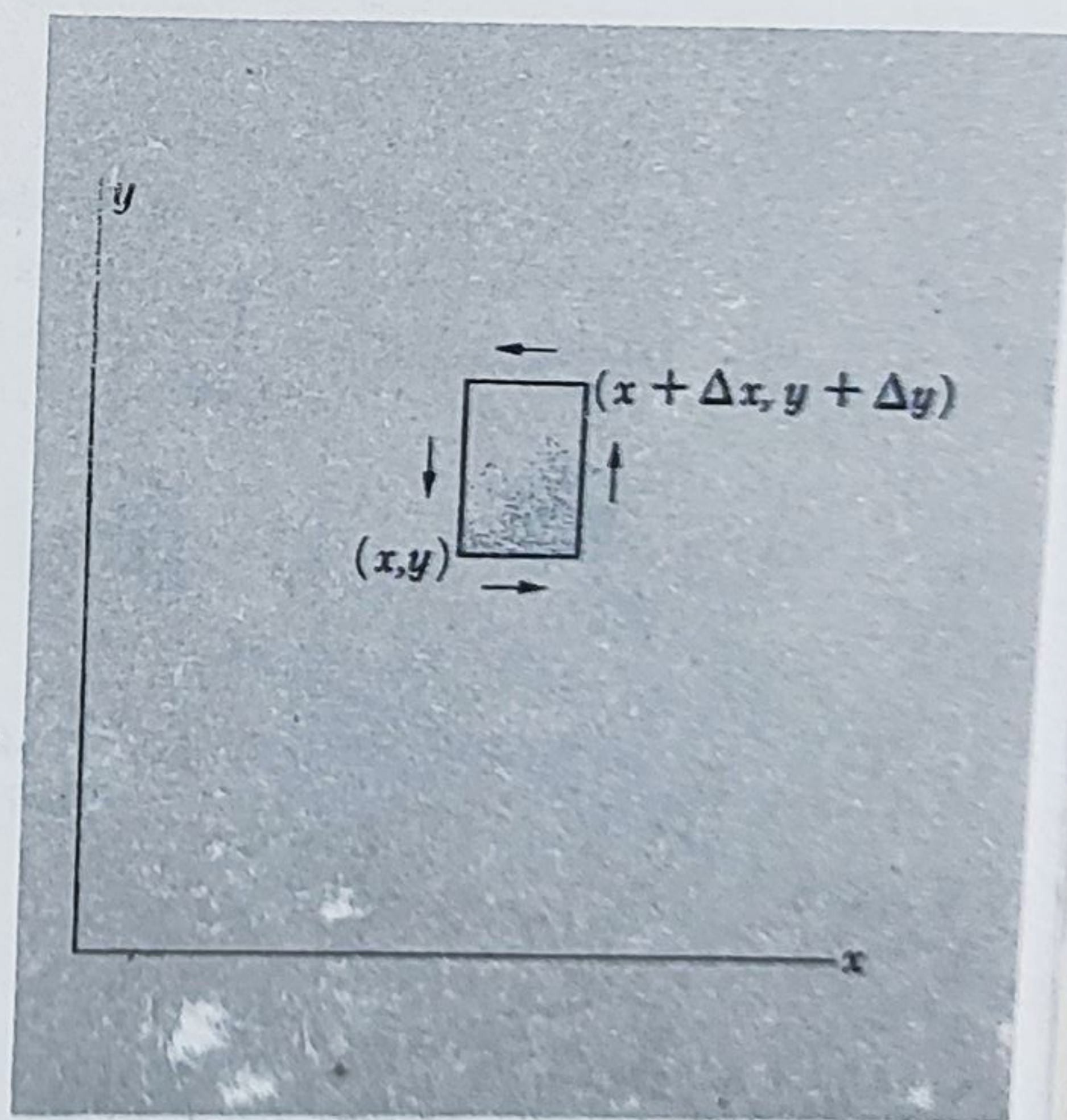


Fig. 2.27. Elementul de suprafață din figura 2.26 este privit de sus în jos.



Neglijind puterile mai mari ale lui  $\Delta x$  și  $\Delta y$ , integrala de linie pe tot dreptunghiul este

$$\int_{\square} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = -(\Delta x) \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta y + (\Delta y) \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \Delta x = \Delta x \Delta y \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (82)$$

Dar  $\Delta x \Delta y$  este aria dreptunghiului, pe care o reprezentăm printr-un vector pe direcția axei  $z$ . Evident, mărimea

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (83)$$

este limita raportului

$$\frac{\text{integrala de linie din jurul suprafeței}}{\text{aria suprafeței}} \quad (84)$$

cînd aria suprafeței tinde către zero. Dacă normala la suprafața dreptunghiulară ar fi coincis cu direcția pozitivă a axei  $y$ , am fi găsit expresia

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (85)$$

pentru limita raportului corespunzător, iar dacă normala ar fi coincis cu direcția axei  $x$ , ca suprafața din dreapta a figurii 2.28, am fi obținut

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \quad (86)$$

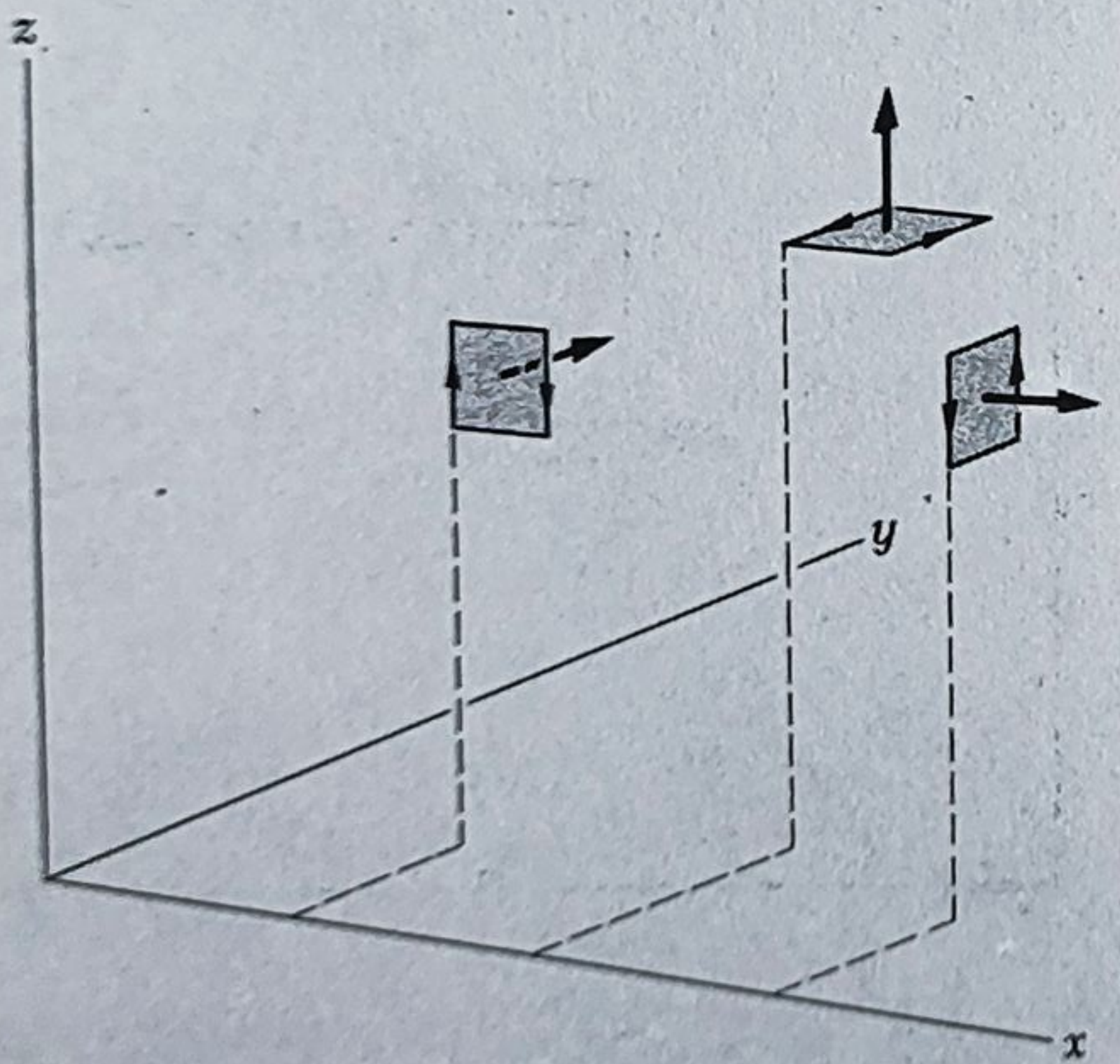
Deși am considerat doar suprafețe dreptunghiulare, în realitate, rezultatul nu depinde de forma suprafeței elementare și a conturului ce-o mărginește din aceleași motive pe care le-am întilnit în cazul integralelor din teorema

divergenței. Este evident că, de exemplu, putem reuni diferite dreptunghiuri (formînd astfel diferite figuri), integralele de linie pe contururile ce coincid anulîndu-se reciproc (fig. 2.29).

Ajungem la concluzia că, indiferent de orientarea suprafeței, limita raportului dintre circulație și suprafață nu depinde de forma suprafeței alese. În acest fel, obținem o formulă generală pentru componentele vectorului rot  $\mathbf{F}$ , dacă  $\mathbf{F}$  este funcție de  $x$ ,  $y$  și  $z$ :

$$\text{rot } \mathbf{F} = \hat{x} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right). \quad (87)$$

Fig. 2.28. Pentru fiecare orientare, limita raportului dintre circulație și arie determină o componentă a rot  $\mathbf{A}$  în acel punct. Pentru a determina toate componentele vectorului rot  $\mathbf{A}$  într-un punct oarecare, toate suprafețele vor fi grupate în jurul aceluși punct; aici, pentru mai multă claritate, ele sînt reprezentate în puncte diferite.





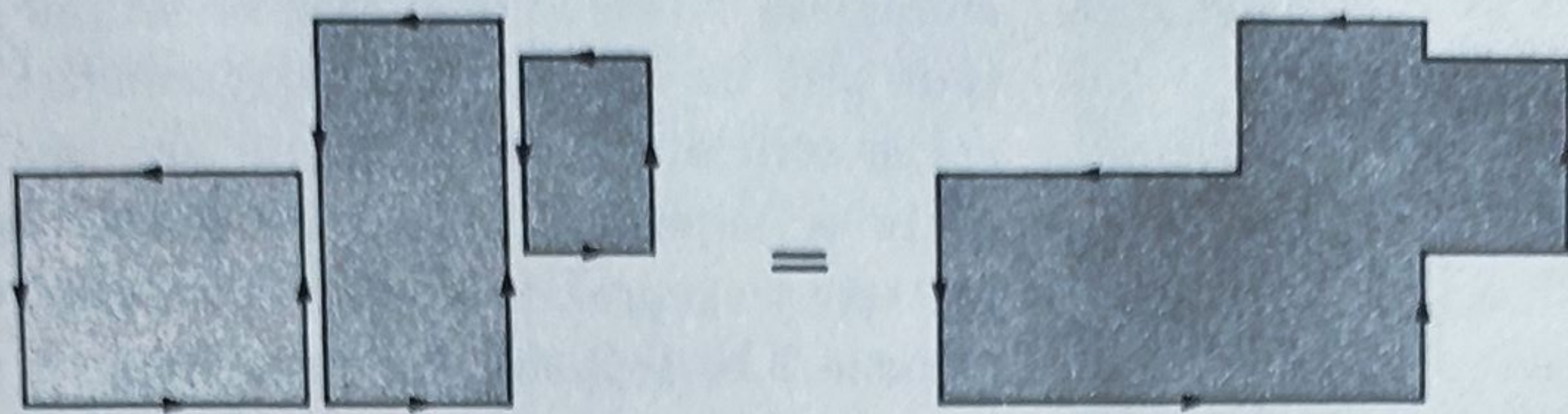


Fig. 2.29. Circulația pe conturul din dreapta este egală cu suma circulațiilor pe conturile dreptunghiurilor; aria suprafeței din dreapta este suma ariilor dreptunghiurilor. Acest desen arată, de ce raportul dintre circulație și arie este independent de forma conturilor.

Se poate găsi o regulă care este mai ușor de reținut decât formula. Scriem un determinant de forma:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (88)$$

Se dezvoltă după regula dezvoltării determinantilor și se obține expresia pentru  $\text{rot } \mathbf{F}$  ca în ecuația (87). Observați că componenta  $x$  a lui  $\text{rot } \mathbf{F}$  depinde de variația lui  $F_z$  pe direcția lui  $y$  și de variația negativă a lui  $F_y$  pe direcția lui  $z$  ș.a.m.d.

Dacă simbolul  $\nabla$  este un vector

$$\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (89)$$

atunci  $\nabla \times \mathbf{F}$  este un produs vectorial al cărui rezultat este un vector, numit  $\text{rot } \mathbf{F}$ . Astfel,  $\text{rot } \mathbf{F}$  și  $\nabla \times \mathbf{F}$  reprezintă același lucru.

## 2.18. SEMNIFICAȚIA FIZICĂ A ROTORULUI

Denumirea de „rotor” ne amintește că câmpul vectorial, al cărui rotor este diferit de zero, are circulație sau vîrtej. Maxwell folosea cuvîntul *rotație* (de unde provine și prescurtarea *rot*). Să ne imaginăm un câmp vectorial de viteze  $\mathbf{G}$  și să presupunem că  $\text{rot } \mathbf{G}$  este diferit de zero. Atunci vitezele, în



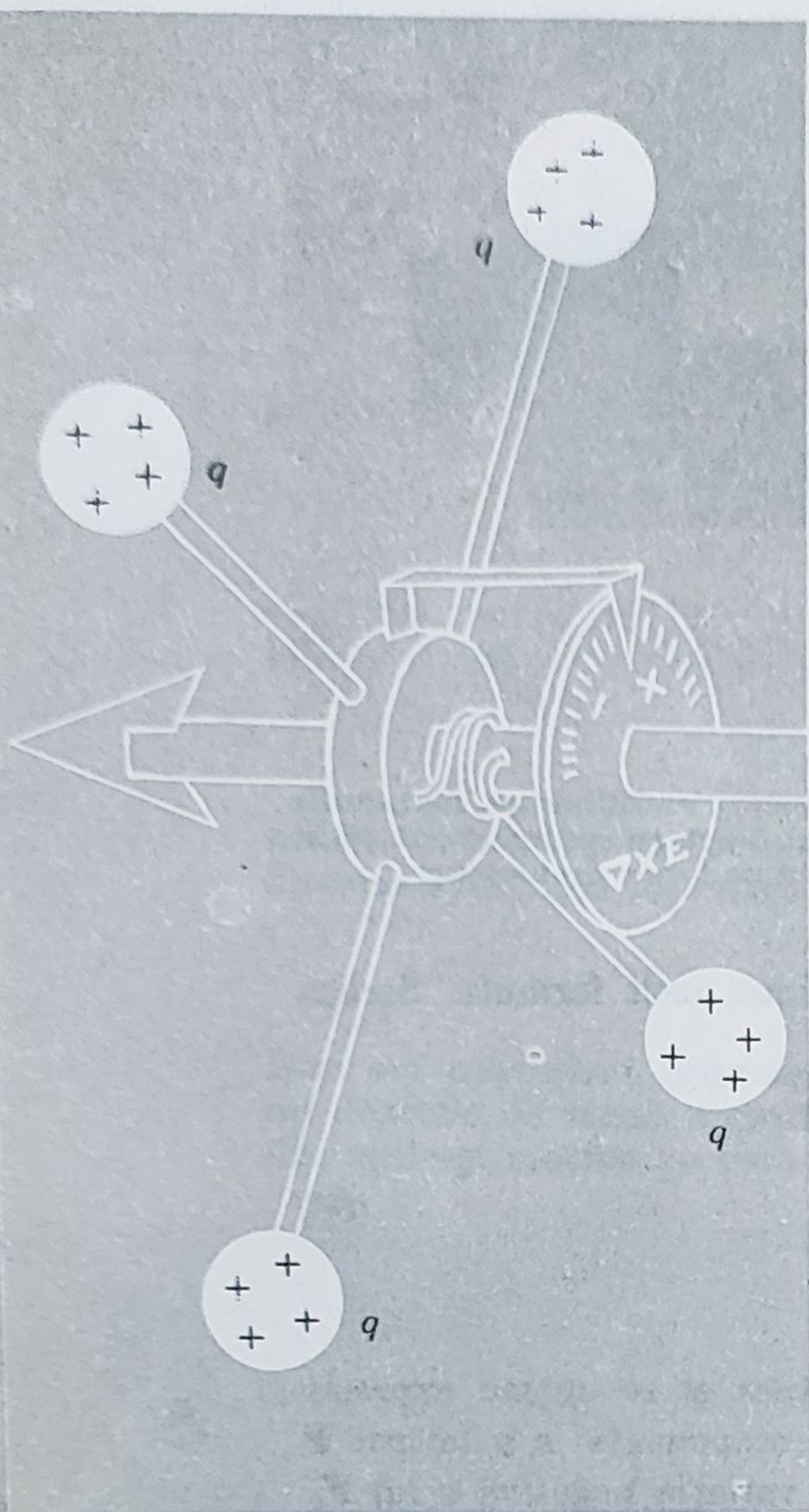


Fig. 2.30. „Rotormetru”.

Ce putem spune, în lumina celor expuse, despre câmpul electrostatic  $E$ ? Concluzia este simplă: rotormetrul va indica întotdeauna zero! Asta, după cum știm, se explică prin faptul că în câmpul electrostatic integrala de linie a lui  $E$ , de-a lungul oricărui contur închis este zero. Amintiți-vă, că integrala de linie a lui  $E$  între două puncte oarecare  $P_1$  și  $P_2$ , ca în figura 2.31, este independentă de drum. Dacă apropiem foarte mult cele două puncte  $P_1$  și  $P_2$ , integrala de linie pe cel mai scurt drum este, evident, egală cu zero dacă poziția finală a punctelor nu este o singularitate ca în cazul sarcinii punctiforme; acest caz poate fi exclus. Prin urmare, integrala de linie, pe un contur închis (fig. 2.31, d), trebuie să fie egală cu zero. Dar, dacă circulația este zero pe un contur închis oarecare, conform teoremei lui Stokes, integrala de suprafață din rot  $E$  pe o porțiune de orice dimensiune, formă sau poziție, este de asemenea egală cu zero. Dar atunci rot  $E$  trebuie să fie zero peste tot.

acest câmp, arată cam așa:  $\begin{matrix} \uparrow & \rightarrow \\ \leftarrow & \downarrow \end{matrix}$  sau  $\begin{matrix} \leftarrow & \uparrow \\ \rightarrow & \downarrow \end{matrix}$  și posibil că se suprapun peste direcția curentului, care curge într-una din direcții. De exemplu, câmpul de viteze al apei care se scurge dintr-o cadă are, de obicei, aspectul circulației. Rotorul ei este diferit de zero pe cea mai mare parte a suprafeței. Dacă un obiect oarecare plutește pe suprafața apei, el se rotește (v. problemele 2.16 și 2.26). În fizica curgerii fluide — în hidrodinamică și aerodinamică — acest lucru este de o deosebită importanță.

Pentru a construi un „rotormetru” pentru câmpul electric — măcar imaginar — ar trebui să fixăm sarcinile electrice pozitive de butuc cu ajutorul unor spițe izolate ca în figura 2.30. Explorînd un câmp electric cu acest dispozitiv, am afla că peste tot unde rot  $E$  este diferit de zero, roata are tendința să se învîrtă în jurul axei sale. Cu ajutorul unui arc care să împiedice rotația s-ar putea determina după mărimea unghiului de răsucire, momentul cuplului care va fi proporțional cu componenta rotorului vectorului  $E$  pe direcția axei. Dacă putem găsi direcția axului, pentru care momentul cuplului e maxim și este în sensul acelor de ceasornic, atunci aceasta este direcția vectorului rot  $E$ . (Bineînțeles, nu putem avea încredere într-un rotormetru aflat într-un câmp care variază puternic chiar în limitele dimensiunilor rotormetrului.)



Fig. 2.31. Dacă integrala de linie între punctele  $P_1$  și  $P_2$ , nu depinde de drum, integrala de linie pe un drum închis trebuie să fie zero.

deoarece dacă ar fi diferită de zero într-un loc, am putea alege o porțiune în acea vecinătate contrazicând, astfel, această concluzie. Toate acestea duc la o concluzie simplă și anume că: în câmpul electrostatic  $\mathbf{E}$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (\text{peste tot}) \quad (90)$$

Cu alte cuvinte, se poate spune că ecuația (90) este o condiție *suficientă* pentru ca un câmp să fie *conservativ*, adică pentru ca câmpul să poată fi descris de gradientul unei funcții potențiale oarecare.

Această condiție este ușor de aplicat. Când am introdus prima oară funcția vectorială (fig. 2.2), am afirmat că ea reprezintă un posibil câmp electrostatic. Ca componente am ales  $E_x = y$  și  $E_y = Kx$  la care, pentru descrierea completă a câmpului în spațiul tridimensional, putem adăuga  $E_z = 0$ . Calculând  $\text{rot } \mathbf{E}$ , găsim că:

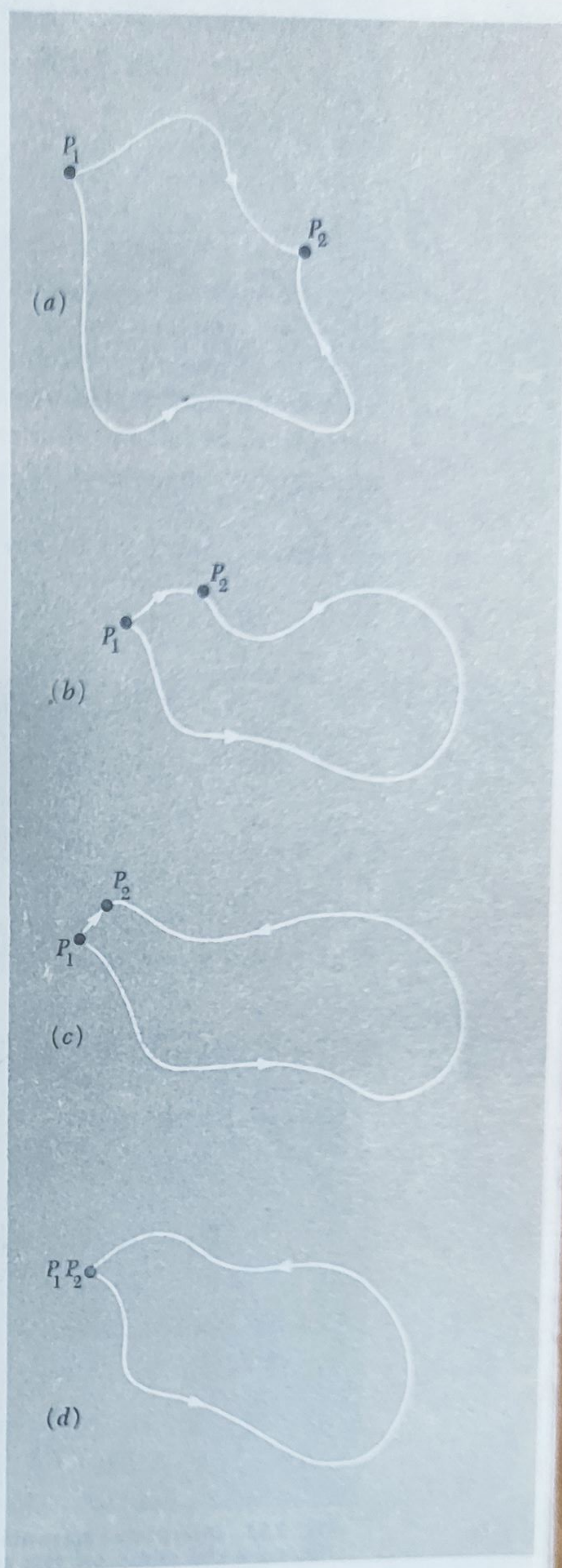
$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\ (\text{rot } \mathbf{E})_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (91)$$

$$(\text{rot } \mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = K - K = 0$$

Asta înseamnă că  $\mathbf{E}$  este gradientul unui potențial scalar. Întimplător, acest tip de câmp  $\mathbf{E}$  are divergența zero, prin urmare:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (92)$$

Acesta reprezintă un câmp electrostatic într-o regiune lipsită de sarcini.





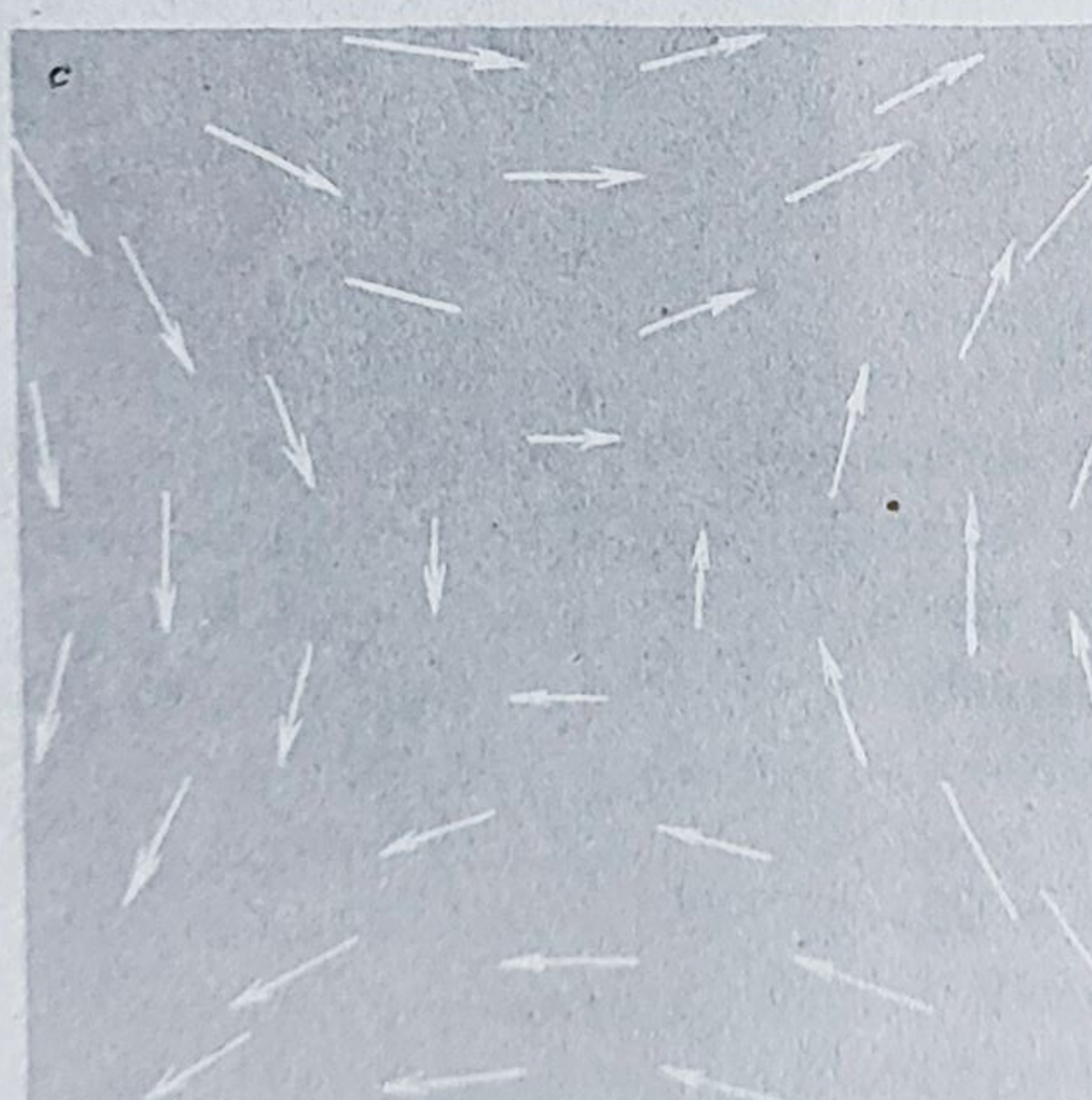
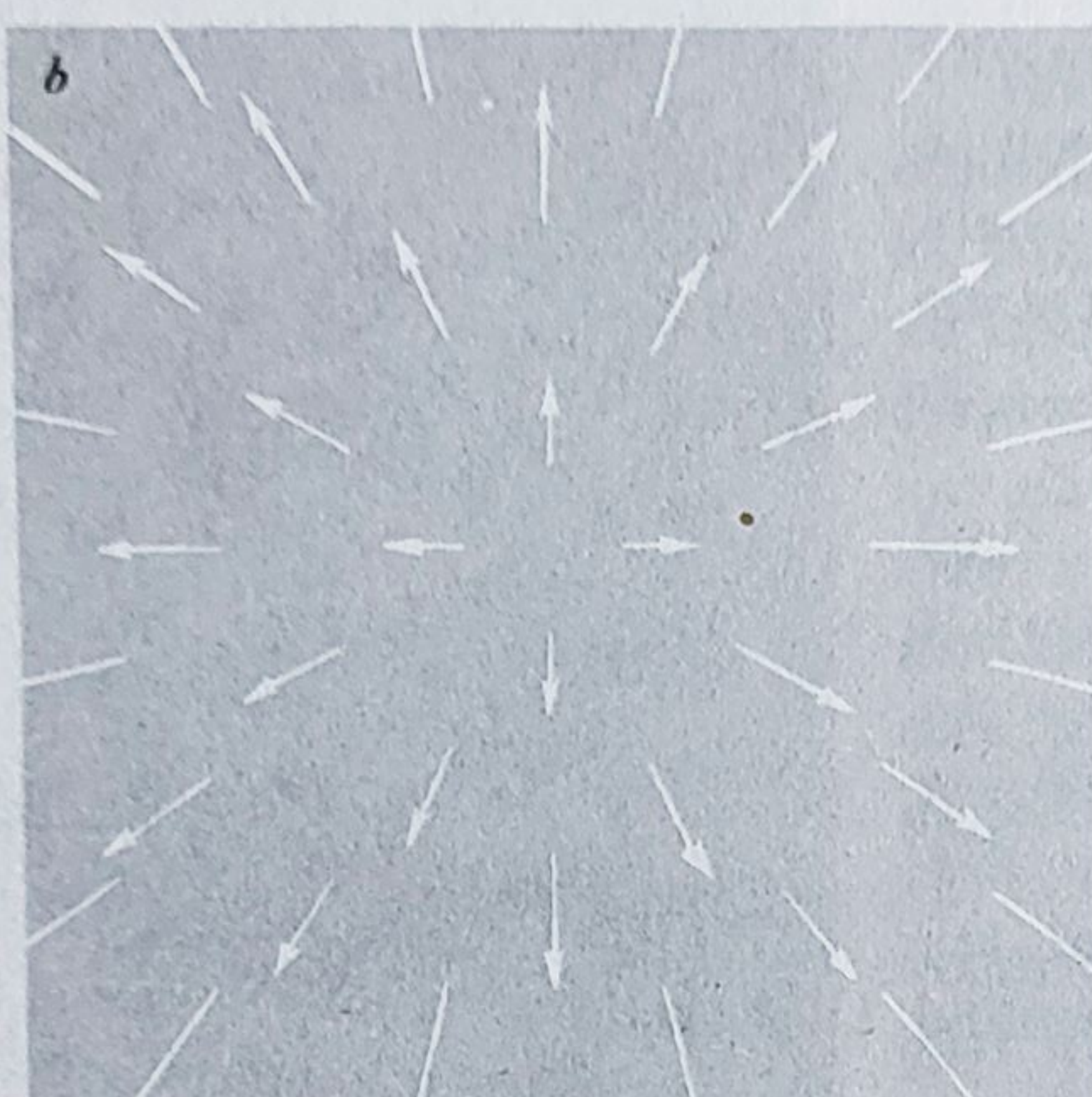
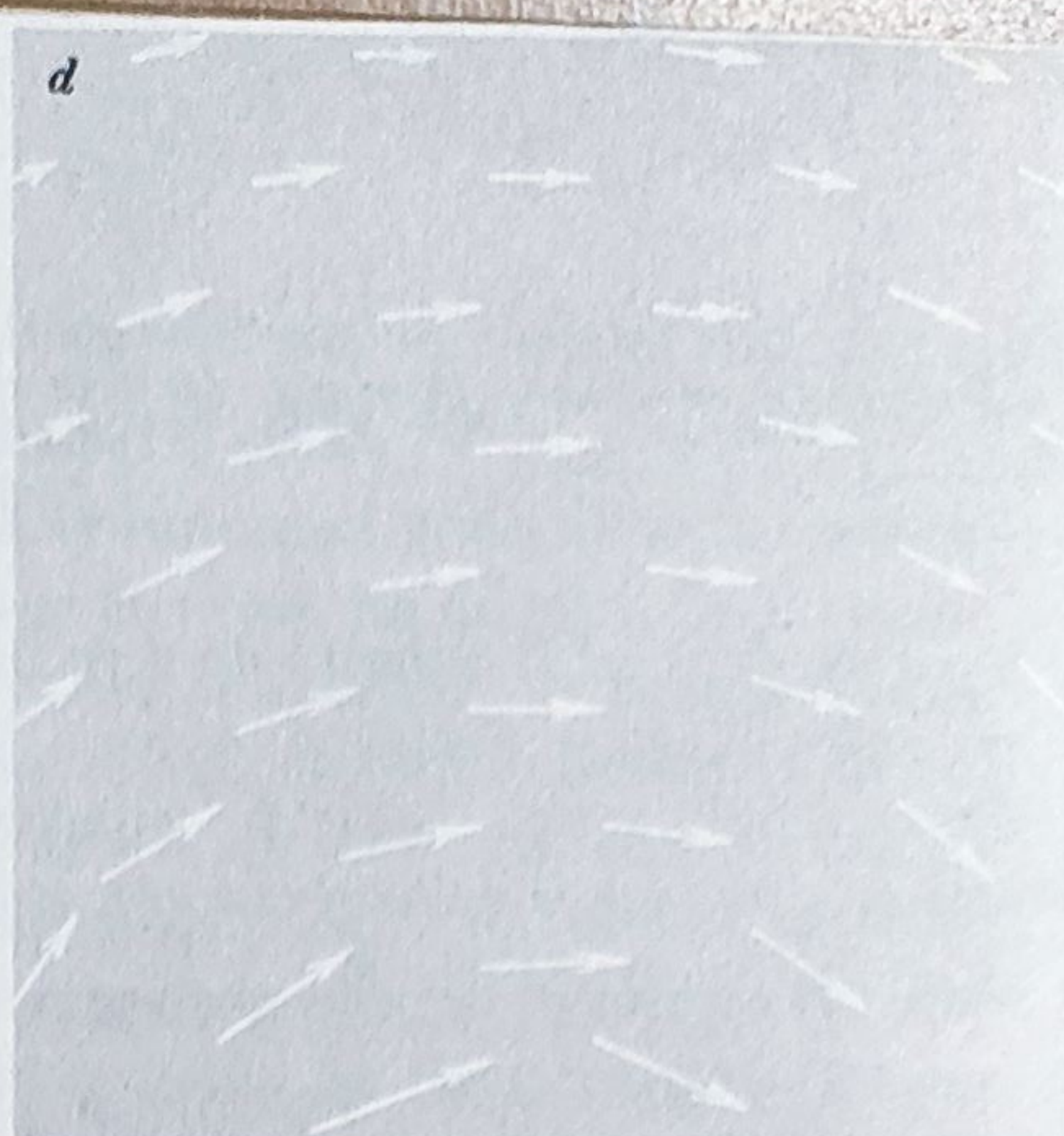


Fig. 2.32. Divergența a patru din aceste câmpuri vectoriale este zero în regiunea reprezentată. Rotorul a trei dintre ele este zero. Le puteți indica?



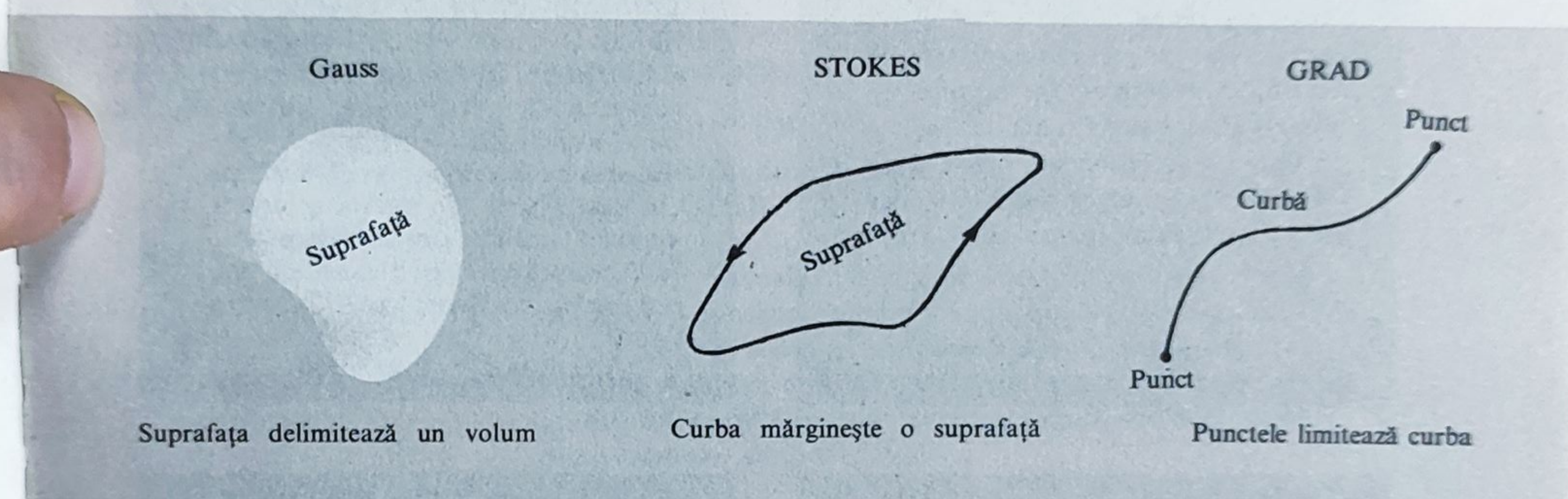
Pe de altă parte, rotorul unei funcții vectoriale la fel de simple definită de componentele  $F_x = Ky$ ;  $F_y = -Kx$ ;  $F_z = 0$ , este diferit de zero:

$$(\text{rot } \mathbf{F})_z = -2K. \quad (93)$$

Nici un câmp electrostatic nu este de această formă. Încercînd să reprezentați un asemenea câmp, veți vedea imediat că el are circulație.

Puteți să vă formați o idee despre asemenea funcții vectoriale, studiînd câmpurile bidimensionale reprezentate în figura 2.32. Pentru patru din aceste câmpuri divergența funcției vectoriale este zero pe întreg domeniul reprezentat. Încercați să le identificați. Divergența implică existența unui flux total ce intră sau iese din vecinătatea punctului considerat. Pe unele desene este ușor de observat acest lucru. În alte figuri, se vede imediat că divergența este zero. În trei dintre câmpuri rotorul funcției vectoriale este zero pentru toată porțiunea de câmp reprezentată. Încercați să le identificați, stabilind pentru fiecare desen dacă integrala de linie de-a lungul unui contur oarecare,

Fig. 2.33. Rezumarea unor relații vectoriale.



$$\int_{\text{suprafață}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\text{volum}} \text{div } \mathbf{F} dv$$

$$\int_{\text{curbă}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{suprafață}} \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\text{curbă}} \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{s}$$

### ÎN COORDONATE CARTEZIENE

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \hat{x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &\quad + \hat{z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

$$\text{grad } \varphi = \hat{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \nabla \varphi$$

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$



(a)

(a) Observați că vectorul rămâne constant, dacă vă mișcați pe direcția lui în sensul indicat. Adică  $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ .  $F_x = 0$ . Prin urmare,  $\text{div } F = 0$ . Observați, că integrala de linie de-a lungul conturului punctat nu este zero.



$$\text{div } F = 0 \quad \text{rot } F \neq 0.$$

(d)

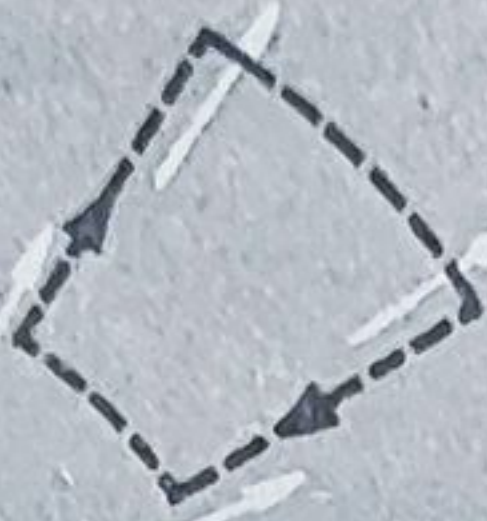
(b) Acesta este un câmp central. Asta înseamnă că funcția  $F$  este radială și pentru un  $r$  dat, mărimea ei este constantă. Rotorul oricărui câmp central este zero; circulația este zero, pe punctat și pe oricare alt contur. Dar, evident, divergența nu este zero.



$$\text{div } F \neq 0 \quad \text{rot } F = 0.$$

(b)

(c) Evident, circulația ar putea fi zero de-a lungul contururilor din figură. În realitate, acesta este un posibil câmp electrostatic, același ca în figura 2.2. Nu este evident doar din această figură că  $\text{div } F = 0$ , dar se vede că ea ar putea fi și zero.



$$\text{div } F = 0 \quad \text{rot } F = 0$$

(e)

(d) Observați că, aici, în aproximația de ordinul întâi, mărimea lui  $F$  nu variază dacă ne mișcăm pe direcția lui  $F$ . Această condiție este suficientă pentru ca divergența să fie zero. Rezultă că circulația pe conturul reprezentat, ar putea fi zero, într-  
cât  $F$  este mai slab pe latura mai lungă decât pe cea mai scurtă. În realitate, acesta este un posibil câmp electrostatic cu  $F$  proporțional cu  $1/r$ , unde  $r$  este distanța la un punct aflat în afara figurii.



$$\text{div } F = 0 \quad \text{rot } F = 0.$$

(c)

(e) Din același motiv ca mai sus, deducem că  $\text{div } F$  este zero. Aici, mărimea lui  $F$  este aceeași peste tot, astfel încât integrala de linie de-a lungul por-



țiunii mai lungi a drumului nu este anulată de integrala de pe porțiunea mai scurtă și circulația este diferită de zero.

$$\text{div } F = 0 \quad \text{rot } F = 0.$$

(f)

(f) Este evident că circulația pe conturul punctat este diferită de zero. Rezultă, de asemenea, că nici divergența nu este zero, întrucât, așa cum se vede, vectorii converg către centru din toate direcțiile.



$$\text{div } F \neq 0 \quad \text{rot } F \neq 0.$$

Fig. 2.34.



este egală sau diferită de zero. Asta este de fapt și esența rotorului. (După ce ați studiat desenele, meditați asupra acestor chestiuni, înainte de a compara raționamentele voastre cu explicațiile date în figura 2.34.)

Mai târziu, când ne vom ocupa de câmpurile electrice și magnetice al căror rotor este diferit de zero, rotorul unei funcții vectoriale ne va fi de un real folos. Am introdus acum noțiunea de rotor deoarece ca idee ea se aseamănă foarte mult cu cea de divergență. Putem spune că am întâlnit două feluri de derivate ale unui câmp vectorial. Una din ele — divergența, reprezintă viteza de variație a componentei vectorului pe direcția sa  $\partial F_x / \partial x$  ș.a.m.d. Cealaltă — rotorul, este un fel de „derivată transversală”, care reprezintă viteza de variație a lui  $F_x$  pe direcția lui  $y$  sau  $z$ .

Relațiile numite teoremele lui Gauss și Stokes, sînt rezumate în figura 2.33. Relația dintre funcția potențial scalar și integrala de linie din gradientul ei, poate fi și ea inclusă în familia acestor teoreme și ca urmare apare în desen.

### PROBLEME

*Integrala de linie și gradientul.*  
Acest câmp se mai studiază în problemele 2.11 și 2.20.

**2.1.** Funcția vectorială următoare reprezintă un posibil câmp electrostatic:

$$E_x = 6xy \quad E_y = 3x^2 - y^2 \quad E_z = 0$$

Să se calculeze integrala de linie din  $E$  de la punctul  $(0, 0, 0)$  la punctul  $(x_1, y_1, 0)$ , de-a lungul drumului direct de la  $(0, 0, 0)$  la  $(x_1, 0, 0)$  și de aici la punctul  $(x_1, y_1, 0)$ .

Faceți același calcul pentru drumul ce parcurge celelalte două laturi ale dreptunghiului format ce trec prin punctul  $(0, y_1, 0)$ . Dacă afirmația este corectă, veți obține aceleași rezultate. Avînd funcția potențială  $\varphi(x, y, z)$ , calculați gradientul acestei funcții; verificați dacă obțineți astfel componentele câmpului dat.

*Potențialul a două sarcini punctiforme.*

**2.2.** Să considerăm sistemul format din două sarcini punctiforme ca în figura 2.6. Fie  $z$  coordonata pe dreapta ce unește cele două sarcini și sarcina pozitivă așezată în punctul  $z = 0$ . Construiți graficul variației potențialului  $\varphi$  în funcție de  $z$ , de la  $z = -5$  la  $z = 15$ .

*Diferența de potențial dintre două sfere concentrice.*

**2.3.** O sferă mică de rază  $r$  este amplasată în centrul unei sfere mai mari de rază  $R$ . Sarcinile  $q$ , respectiv  $Q$  sînt uniform distribuite pe suprafața sferelor. Să se calculeze diferența de potențial dintre ele. Observați că, dacă  $q$  este pozitiv, potențialul sferei interioare va fi întotdeauna mai mare ca potențialul sferei exterioare. Prin urmare, dacă se unesc sferele printr-un conductor, sarcina  $q$  se va scurge integral pe sfera exterioară, indiferent de mărimea sarcinii  $Q$ .

*Potențialul unei vergele încărcate.*

**2.4.** O bară subțire are lungimea măsurată pe axa  $z$  între punctele  $z = -a$  și  $z = a$ . Sarcina este uniform distribuită pe lungimea barei și este egală cu  $\lambda$ .



Să se calculeze potențialul pentru toate punctele de pe axa  $x$ , pentru  $x > 0$ .

*Straturi paralele încărcate.*

**2.5.** Pe fiecare din cele trei plane infinite  $x = -a$ ,  $x = 0$  și  $x = a$  există o sarcină de suprafață uniform distribuită, de aceeași densitate  $\sigma$ . Să se găsească câmpul electric și potențialul pentru tot spațiul, luând  $\varphi = 0$ , în punctul  $x = 0$ .

*O distribuție cilindrică de sarcină.*

**2.6.** Pentru cilindrul cu densitate de sarcină uniformă, din figura 2.20:

a) Să se arate că expresia din figură, pentru câmpul din interiorul cilindrului, rezultă din legea lui Gauss.

b) Să se exprime potențialul  $\varphi$  în funcție de  $r$  în interiorul și în afara cilindrului.

c) Să se reprezinte grafic  $\varphi$  în funcție de  $r$ . De ce natură este singularitatea din punctul  $r = a$ ?

*Potențialul unei plăci cu densitate volumică de sarcină.*

**2.7.** În spațiul dintre planele  $y = 0$  și  $y = b$  sarcina cu densitatea de volum  $\rho$  este uniform distribuită, nemaiexistând alte sarcini. Să se determine câmpul electric în fiecare punct al acestui sistem.

Să se determine valoarea aproximativă a funcției potențiale pentru acest câmp și să se arate că ea satisface ecuația lui Poisson peste tot.

*Suprafețe echipotențiale în câmpul unui disc încărcat.*

**2.8.** Pentru sistemul din figura 2.7, hașurați suprafața echipotențială de la marginea discului. Să se găsească punctul în care ea intersectează axa de simetrie.

*Energia unui sistem de sarcini, exprimată în funcție de potențiale. În același mod am calculat energia unor asemenea sisteme în cap. 1.*

**2.9.** Aplicați ecuația (2.42) pentru a determina energia necesară așezării a patru electroni în colțurile unui tetraedru cu latura egală cu  $1 \text{ \AA}$ , în centrul căruia se găsește un proton. Ce puteți spune despre forța rezultantă ce acționează asupra unuia din electroni, dacă semnul energiei este cunoscut?

**2.10.** Două sfere identice de rază  $r$  sînt separate prin distanța  $d \gg r$ . O sarcină  $Q$  este distribuită pe suprafața sferei:

a) Care este energia potențială a sistemului dacă pe fiecare sferă se găsește sarcina  $\frac{Q}{2}$ ?

b) Care este energia potențială dacă întreaga sarcină se află pe una din sfere și pe cealaltă nu e nici o sarcină?

c) Care este potențialul electric pe fiecare din sfere în cazurile a) și b)?

d) Dacă cele două sfere din b) ar fi legate între ele printr-un conductor subțire, astfel încît sarcina să poată trece de pe o sferă pe alta, care va fi configurația finală a sarcinilor? Ce se poate spune despre conservarea energiei?

**2.11.** Calculînd explicit componentele lui  $\nabla \times \mathbf{E}$ , să se arate că funcția vectorială din problema 2.1, este un



posibil câmp electrostatic. (Dacă ați lucrat problema, ați demonstrat, bineînțeles, acest lucru pe altă cale, determinând funcția scalară al cărei gradient este acest câmp). Să se evalueze divergența acestui câmp.

**2.12.** Satisfacă funcția  $f(x, y) = x^2 + y^2$  ecuația bidimensională a lui Laplace? Dar funcția  $g(x, y) = x^2 - y^2$ ? Reprezentați a doua funcție grafic, calculați gradientul în punctele  $(x = 0, y = 1)$ ;  $(x = 1, y = 0)$ ;  $(x = 0, y = -1)$  și  $(x = -1, y = 0)$  și indicați prin săgeți direcția acestor vectori.

O aplicație simplă a rotorului și teoremei lui Stokes.

**2.13.** Trasați „liniile de câmp” pentru funcția vectorială  $\mathbf{A} = -y\hat{x} + x\hat{y}$  în planul  $xy$ . Calculați rotorul lui  $\mathbf{A}$  și desenați vectorul care indică direcția lui. Calculați integrala de linie

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

pe curba închisă  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ . Arătați că teorema lui Stokes este valabilă, calculând integrala de suprafață din  $\nabla \times \mathbf{A}$  pe suprafața mărginită de această curbă.

**2.14.** Calculați rotorul și divergența pentru fiecare din următoarele câmpuri vectoriale:

a)  $F_x = x + y; F_y = -x + y; F_z = -2z$ .

b)  $G_x = 2y; G_y = 2x + 3z; G_z = 3y$ .

c)  $H_x = x^2 - z^2; H_y = 2; H_z = 2xz$ .

Dacă găsiți că rotorul este egal cu zero, încercați să determinați funcția scalară  $\phi$ , al cărui câmp vectorial este gradientul.

O teoremă vectorială importantă.

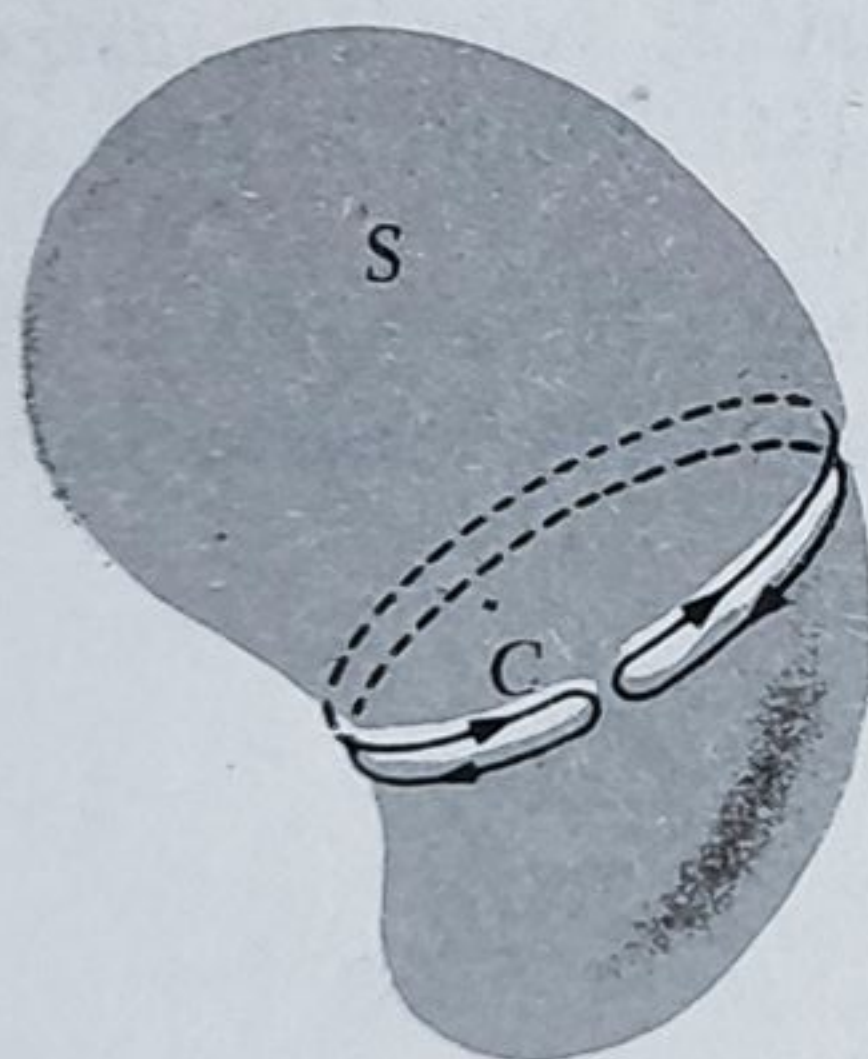


Fig. 1a problema 2.15

Exemple din fizică de câmpuri vectoriale de viteze cu o simetrie particulară: simetrie axială, viteza fiind orientată pe o circumferință.

**2.15.** Dacă  $\mathbf{A}$  este un câmp vectorial oarecare cu derivate continue,  $\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0$  sau  $\nabla(\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ . Vom avea nevoie de această teoremă mai târziu. Scopul problemei este demonstrarea acestei teoreme. Există două căi diferite în care se poate demonstra:

a) *Calculul direct într-un sistem de coordonate bine determinat.* Folosind expresia lui  $\nabla$  în coordonate carteziene, deduceți derivatele parțiale de ordinul doi de tipul  $\nabla(\nabla \times \mathbf{A})$ .

b) *Folosind teorema divergenței și teorema lui Stokes* nu e necesară precizarea sistemului de coordonate. Considerăm o suprafață  $S$  ca în figura 2.15, și anume, un balon aproape tăiat în două și înconjurat de curba închisă  $C$ . Aplicați integrala de linie pe curba  $C$ , pentru un câmp vectorial oarecare. Aplicați apoi teoremele lui Stokes și Gauss.

**2.16.** Fie funcția vectorială  $\mathbf{v}(x, y, z)$ , care reprezintă viteza într-un punct oarecare dintr-un fluid. Fluidul se consideră incompresibil, adică, densitatea este aceeași peste tot. Înseamnă că viteza transportului de substanță printr-o suprafață oarecare — un mic cadru fixat în spațiu, va fi proporțională cu  $\mathbf{v}$ . Rezultă că dacă  $\mathbf{v}$ , într-un punct oarecare, este constant în timp și dacă proprietățile



substanței nu se schimbă, atunci  $\text{div } \mathbf{v}$  trebuie să fie zero peste tot. De ce? Această situație este incidentală, de fapt problema se referă mai mult la  $\text{rot } \mathbf{v}$ . Să considerăm cazul când liniile de curent sînt independente de timp, simetrice față de o axă oarecare,  $\mathbf{v}$  fiind tot timpul orientat pe o circumferință. Înseamnă că  $\mathbf{v}$ , în orice punct, este un vector perpendicular pe planul ce cuprinde punctul și axa. Simetria fiind axială, e convenabil să alegem coordonate polare  $z$ ,  $r$  și  $\varphi$ . Mai impunem condiția ca  $\mathbf{v}$  să fie funcție numai de  $r$ . Atunci, orice curgere de acest tip poate fi descrisă de  $\mathbf{v} = \hat{\varphi} v(r)$ , unde  $\hat{\varphi}$  este un vector perpendicular pe  $\hat{r}$  și  $\hat{z}$ . Pornind de la definiția  $\text{rot } \mathbf{v}$  în funcție de integrala de linie pe o porțiune mică, arătați că pentru cîmpurile cu această simetrie,  $\text{rot } \mathbf{v}$  este dat de expresia

$$\text{rot } \mathbf{v} = \hat{z} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv(r))$$

Folosiți această expresie pentru a studia cazurile particulare, corespunzătoare următoarelor funcții  $v(r)$ :

a) Fluidul se mișcă ca un corp rigid, rotindu-se în jurul axei cu viteza unghiulară  $\omega$ . Care este expresia  $\text{rot } \mathbf{v}$  în acest caz?

b) Fluidul se mișcă astfel încît  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ . Este aceasta valabilă peste tot? Care este funcția  $v(r)$ ? Încercați să schițați o asemenea curgere.

c) Mișcarea fluidului este de așa natură încît  $v(r)$  este dat de legea lui Kepler pentru mișcarea circulară a planetelor. Care este  $\text{rot } \mathbf{v}$ ? Poate fi această mișcare asemuită cu mișcarea inelelor lui Saturn?

*Deducerea formulei generale pentru energia înmagazinată în cîmpul electric.*

2.17. Ecuația (36) și echivalentul ei (39) am dat-o fără demonstrație. Dar demonstrarea ecuației (43) o putem face pornind invers. Astfel, vom demonstra că ecuația (39) derivă din ecuația (43). Pentru a face acest lucru, ne vom folosi de:

a) identitatea vectorială  $\nabla \cdot (f \nabla f) = (\nabla f)^2 + f \nabla^2 f$  care poate fi folosită fără demonstrație, aceasta nefiind complicată.

b) ecuația lui Poisson.

c) teorema divergenței.



## Capitolul 3

# Cîmpul electric în jurul conductorilor

3.1. Conductori și izolatori	100
3.2. Conductori în cîmp electrostatic	101
3.3. Problema fundamentală a electrostaticii; teorema unicității	107
3.4. Cîteva sisteme simple de conductori	109
3.5. Condensatori și capacitate	114
3.6. Potențiale și sarcini pe diferiți conductori	117
3.7. Energia înmagazinată într-un condensator	119
3.8. Alte aspecte ale problemei la limită	120
Probleme	123



### 3.1. CONDUCTORI ȘI IZOLATORI

Chiar de la primele experiențe din domeniul electricității, s-a observat că substanțele diferă după capacitatea lor de a păstra „acel ceva electric”. Unele materiale pot fi ușor electrizate prin frecare și menținute în această stare; altele, se pare, nu pot fi electrizate pe această cale și dacă se electrizează nu-și mențin această stare. Experimentatorii de la începutul secolului al XVIII-lea au clasificat substanțele în „electrice” și „neelectrice”. În jurul anului 1730, în Anglia, experiențele lui Stephen Gray au arătat că, „acel ceva electric” poate fi transmis de la un corp la altul cu ajutorul unei sfori orizontale, la o distanță de câteva sute de metri dacă sfoara este, la rîndul ei, suspendată cu niște fire de mătase.\* Odată stabilită diferența dintre conductor și neconductor, electrotehnicienii acelor timpuri au observat că chiar substanțele „neelectrice” pot fi puternic electrizate dacă sînt așezate pe sticlă sau suspendate de un fir de mătase. Un rezultat spectaculos al uneia dintre popularele demonstrații de electricitate din acel timp era probabil electrizarea unui băiețel, suspendat de căpriori cu ajutorul unor fire de mătase: părul i se ridica vîlvoi, iar din vîrfurile nasului se puteau scoate scînteii.

După lucrările lui Gray și ale contemporanilor săi, substanțele „neelectrice” și „electrice” s-au denumit *izolatori* electrice și *conductori* electrice. Această deosebire între proprietățile substanțelor a rămas pînă în zilele noastre una din cele mai uluitoare contraste ale naturii. Conductibilitatea electrică a conductorilor buni obișnuiți, ca de exemplu metalele, depășește conductibilitatea electrică a izolatorilor obișnuiți, ca sticla și plasticul, de  $10^{20}$  de ori. În lumina concepțiilor secolului al XVIII-lea, experimentatori ca Gray sau Benjamin Franklin, ar fi explicat acest lucru astfel: un glob metalic, așezat pe un postament de metal, își pierde electrizarea într-o milionime de secundă pe cînd același glob, așezat pe un postament de lemn, și-o poate păstra mai mulți ani. (Pentru demonstrarea ultimei afirmații, trebuie luate anumite măsuri de precauție, care nu erau la îndemîna laboratoarelor din secolul al XVIII-lea. Puteți numi cîteva dintre ele?) Deosebirea dintre un bun conductor și un bun izolator, din punct de vedere electric, este tot atît de mare ca deosebirea dintre un lichid și un solid, din punct de vedere mecanic. Acest lucru nu este chiar întîmplător. Comportarea electrică ca și cea mecanică a corpului depinde de *mobilitatea* particulelor atomice: conductibilitatea electrică depinde de mobilitatea purtătorilor de sarcină —

---

\* Fără îndoială, că „sfoara” utilizată în experiențele lui era, în comparație cu o sîrmă, slab conductoare însă suficient de bună pentru transferul de sarcină în experiențe electrostatice. Tot Gray a observat că o sîrmă subțire de cupru este conductor și totuși pentru transportul sarcinilor la distanțe mari s-a folosit de sfoară.



electroni sau ioni; iar proprietățile mecanice depind de mobilitatea atomilor sau moleculelor, care determină structura substanței. Analogia poate fi dusă puțin mai departe dacă amintim substanțele a căror fluiditate este intermediară, plasându-se între solid și lichid, ca de exemplu, smoala și înghețata. Într-adevăr, unele substanțe (sticla constituie un exemplu bun) prin scăderea temperaturii cu câteva sute de grade, își schimbă treptat și continuu proprietățile, pe măsura trecerii din starea fluidă în starea de solid rigid. Conductibilitatea electrică a unor substanțe variază, de asemenea, într-un interval larg, cuprins între „buni conductori” și „buni izolatori”, în funcție de temperatura lor. De această proprietate și de încă multe alte proprietăți interesante, se bucură o clasă excepțională de materiale, cu multe aplicații, numite semiconductoare.

Una și aceeași substanță poate fi solidă sau lichidă, în funcție de timpul și probabil, de distanța considerată. Dacă țineți în mână o bucată de asfalt natural, ea vi se pare destul de solidă. Din punct de vedere geologic, ea este lichidă, provenind din straturile subterane, putând forma chiar lacuri. Din motive similare, ne putem aștepta ca un material să fie considerat izolator sau conductor, în funcție de timpul la care studiem fenomenul respectiv.

Vom ajunge la concluzia, că pentru o clasă destul de simplă și de generală de fenomene criteriul de clasificare este *numai* timpul și nu distanța.

### 3.2. CONDUCTORI ÎN CÎMPUL ELECTROSTATIC

Vom studia, la început, sistemele electrostatice formate din conductori. Ca urmare, ne va interesa starea *staționară* a sarcinii și cîmpului electric, care se stabilește după redistribuirea sarcinilor în conductori. Toți izolatorii pe care îi vom întâlni îi vom considera izolatori perfecți. După cum am amintit, chiar și izolatorii cei mai obișnuiți nu sînt prea departe de această idealizare, astfel încît sistemele studiate nu sînt prea artificiale. Exemplul următor ne poate clarifica asupra tipului de sistem la care ne referim. Luăm două sfere metalice încărcate, izolate una de alta și de alte corpuri. Le fixăm relativ aproape una de alta. Care este cîmpul electric rezultat în spațiul dintre sfere și din jurul lor și care este sarcina distribuită pe fiecare din sfere? Să începem cu o chestiune mai generală: ce se poate spune despre cîmpul electric din interiorul substanței conductoare, după ce purtătorii de sarcină au încetat să se mai miște?

În starea staționară nu există purtători de sarcină în mișcare. Ați putea fi tentați să afirmați că cîmpul în interiorul substanței conductoare trebuie să fie nul. Ați putea argumenta că, dacă cîmpul n-ar fi zero, asupra purtătorului mobil de sarcină s-ar exercita o forță care l-ar pune în mișcare și ca urmare nu va mai fi o stare staționară. O asemenea argumentare elimină posibilitatea existenței *altor* forțe care ar putea acționa asupra purtătorilor de sarcină și care ar putea echilibra forțele electrice, determinînd astfel o stare staționară. Din punct de vedere fizic, în afara forțelor electrice, asupra purtătorilor de sarcină mai poate acționa forța gravitațională. Ionul pozitiv are greutate, asupra lui, în cîmpul gravitațional, acționează o forță; același lucru este valabil și pentru electron. Forțele ce se exercită asupra lor nu sînt egale. Acest exemplu este destul de absurd. Știm că la scară atomică forțele gravitaționale sînt neglijabile. Există alte forțe, pe care le-am putea numi „chimice”. Într-o baterie și în multe alte exemple în care au loc reacții chimice, inclusiv



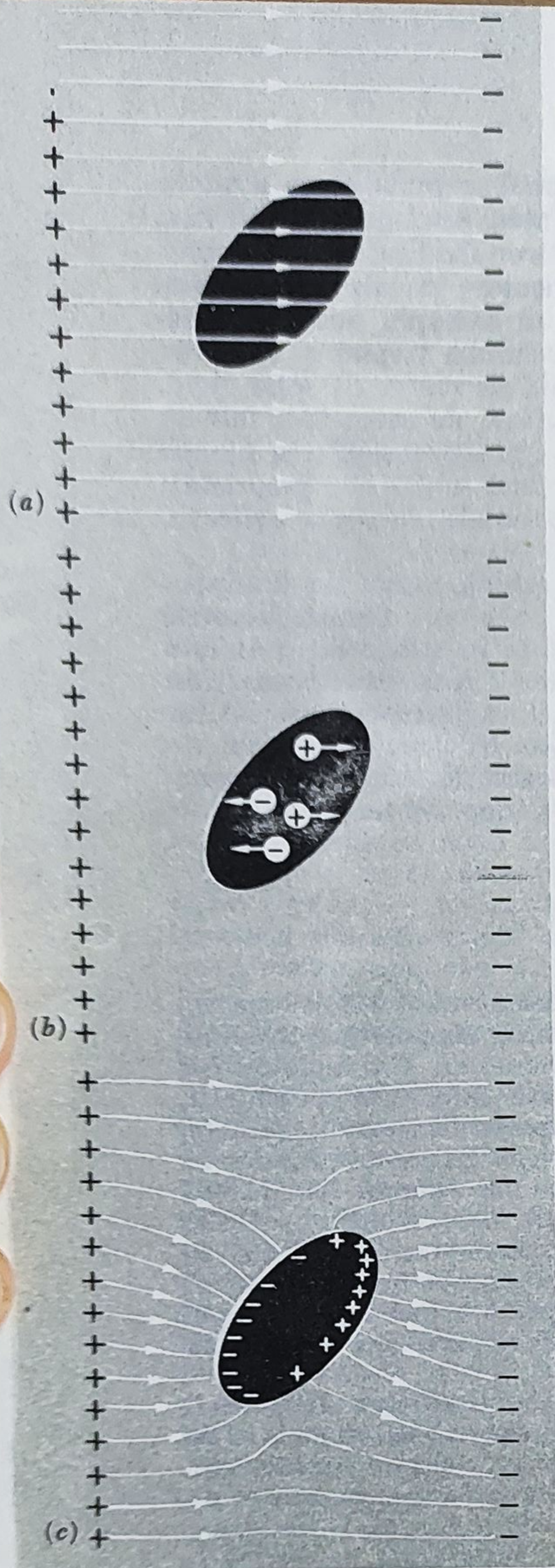


Fig. 3.1. Corpul din (a) este un izolator neutru. Sarcinile din interiorul lui, pozitive și negative, nu se mișcă. În (b) sarcinile eliberate încep să se miște. Ele se vor mișca pînă la atingerea stării finale din (c).

celula vie, purtătorii de sarcină se mișcă, uneori, *în sens opus* cîmpului electric; în acest fel se consumă mai puțină energie decît necesita reacția chimică. Ezităm să numim aceste forțe neelectrice știind că structura atomilor și moleculelor și forțele ce se exercită între ele, pot fi explicate cu ajutorul legii lui Coulomb și a mecanicii cuantice. Totuși, din punct de vedere al teoriei clasice a electricității, ele trebuie considerate de altă natură. Ele se și comportă diferit de forțele pe baza cărora ne-am fundamentat teoria și care sînt invers proporționale cu pătratul distanței. Despre necesitatea luării în considerare și a forțelor de altă natură, așa-numite neelectrice, am vorbit și în capitolul 2, observînd că forțele ce variază invers proporțional cu distanța nu pot explica structura statică stabilă. Rezultă, de fapt, că în unele cazuri, trebuie să admitem posibilitatea existenței unor forțe neechilibrate, necoulombiene, care acționează asupra purtătorilor de sarcină din interiorul substanței conductoare. În aceste cazuri, starea electrostatică se atinge doar prin *prezența* unui cîmp electric finit în conductor care anihilează influența altor forțe, de orice natură.

Ținînd cont de cele spuse, ne întoarcem la cazul, bine cunoscut și important, cînd asemenea forțe nu există — cazul unui material conductor omogen și izotrop. Într-un asemenea conductor, în cazul static, putem afirma cu siguranță că cîmpul electric este nul\*. În caz contrar purtătorii de sarcină ar fi trebuit să se miște. Rezultă că, toate regiunile din interiorul conductorului inclusiv toate punctele aflate chiar sub suprafața sa, trebuie să aibă același potențial. Se știe că la trecerea din interiorul conductorului spre exteriorul său poten-

\* Prin cîmpul electric din interiorul conductorului înțelegem valoarea medie a cîmpului, mediat pe un volum mare în comparație cu dimensiunile unei structuri atomice. Știm că în toate substanțele, inclusiv conductoare, la scară microscopică, în apropierea nucleului atomic, există cîmpuri foarte puternice. De fapt, particulele alfa, cu care Rutherford, Geiger și Marsden au bombardat foia de aur (v. vol. I, cap. 15, nota istorică 1), erau deviate tot de un cîmp electric. În general, cîmpul electric al nucleului nu este luat în considerare în cîmpul mediu din substanță, întrucît într-o parte a nucleului are un sens și în alta — sens opus. Modul de determinare și de măsurare al acestui cîmp mediu nu-l vom studia acum.

81,83, 43



țialul suferă o variație bruscă (v. probl. 3.21). Dar într-un conductor omogen și izotrop, cel pe care-l avem în vedere acum, variația va fi aceeași pe toată suprafața conductorului. În exteriorul conductorului câmpul electric nu este nul. Suprafața conductorului trebuie să fie o suprafață echipotențială a acestui câmp.

Să ne imaginăm că putem transforma substanța, după dorință, din izolator în conductor. (Acest lucru nu este imposibil — sticla, prin încălzire, devine conductoare; orice gaz poate fi ionizat de razele X). În figura 3.1, *a*, este arătat un izolator neîncărcat, în câmpul electric produs de două straturi de sarcini fixe. Câmpul electric în interiorul și în exteriorul corpului este același. (Un corp dens, de exemplu sticla, ar putea deforma câmpul; acest efect îl vom studia în cap. 9, dar aici nu este important.)

Acum, într-un fel sau altul, creăm sarcini mobile (sau ioni), care să transforme corpul într-un conductor. Așa cum se vede în figura 3.1, *b*, sub acțiunea câmpului ionii pozitivi se vor îndrepta într-un sens, iar ionii negativi în sens opus. Ei nu vor trece de suprafața conductorului; îngrămădindu-se în apropierea suprafeței, ei creează un câmp electric propriu în interiorul corpului care tinde să anihileze câmpul inițial. Mișcarea sarcinilor va continua până la anihilarea completă a câmpului inițial. Distribuția finală a sarcinilor pe suprafață (fig. 3.1, *c*) este astfel încât, câmpul creat de ele și câmpul surselor fixe externe se combină dând un câmp electric nul în interiorul conductorului.

Deoarece o asemenea compensație are loc automat, în orice conductor, în cazul câmpurilor externe, va trebui să luăm în considerare doar suprafața conductorului.

Ținând cont de cele spuse, să vedem ce putem spune despre un sistem de conductori diferit încărcăți, aflați într-un spațiu lipsit de alte sarcini. Acești conductori sînt reprezentați în figura 3.2. Putem să considerăm, de exemplu, că reprezintă niște piese din metal, iar niște izolatori invizibili — asemănători cu firele de mătase ale lui Stephen Gray — împiedică mișcarea lor. Sarcina totală a fiecărui obiect, adică cu cît depășește numărul sarcinilor pozitive pe cel al sarcinilor negative, rămîne neschimbată deoarece orice scurgere de sarcină este imposibilă. Notăm sarcina totală a conductorului  $k$  cu  $Q_k$ . De asemenea, fiecare obiect poate fi caracterizat prin valoarea bine determinată a potențialului electric  $\varphi_k$ . Spunem că conductorul 2 „se află la potențialul  $\varphi_2$ ”. Într-un asemenea sistem, în care la infinit nu se află obiecte fizice, este comod să alegem potențialul zero, într-un punct aflat la infinit. În acest caz,  $\varphi_2$  este lucrul mecanic pe unitatea de sarcină efectuat pentru a aduce un corp de probă infinitesimal cu sarcina unitate de la infinit într-un punct oarecare de pe suprafața conductorului 2. (Observați că, conform celor discutate în paragraful 1.7, acesta este tipul de sistem în care sarcina trebuie să fie mică.)

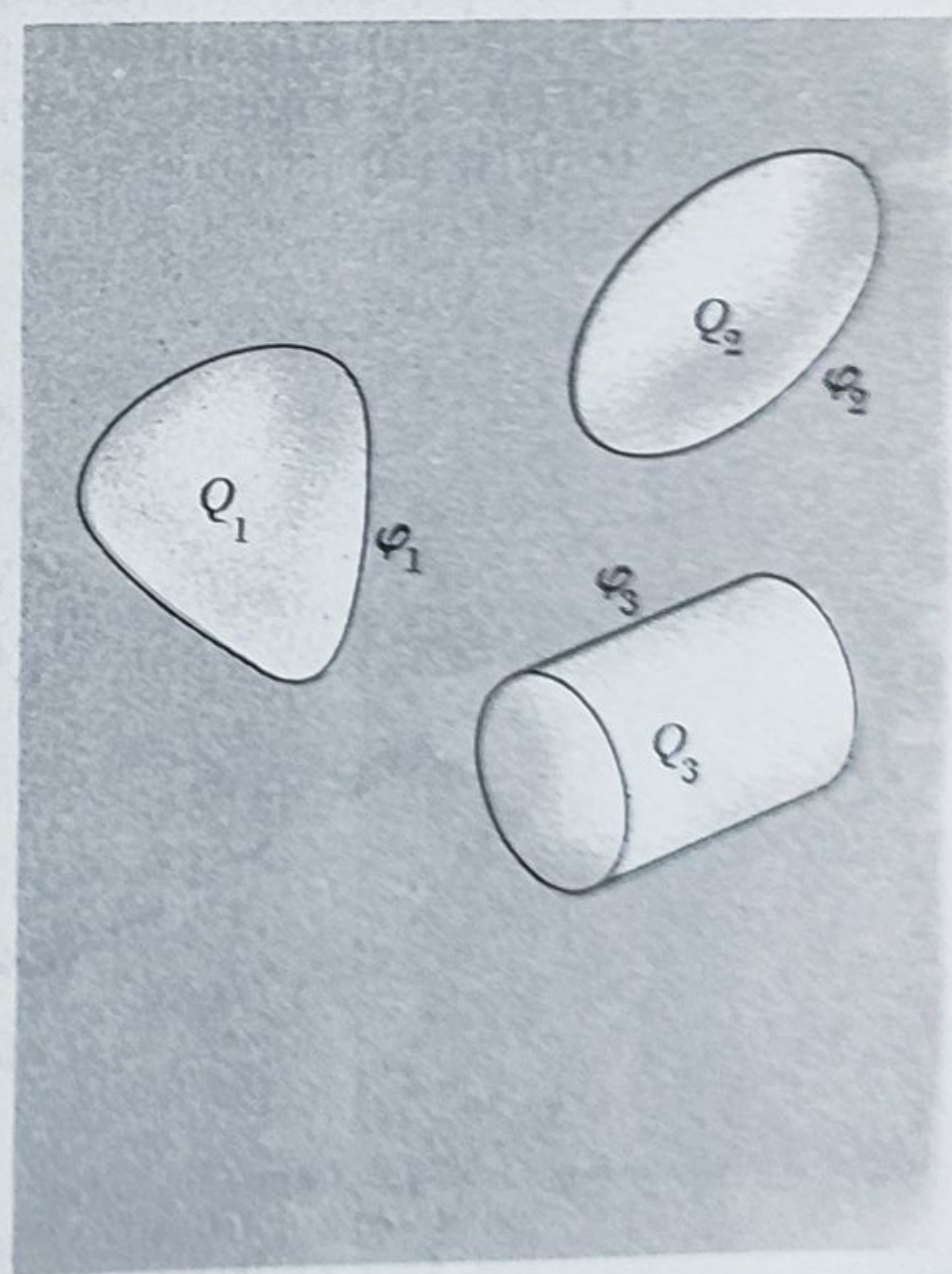


Fig. 3.2. Un sistem de trei conductori.  $Q_1$  este sarcina conductorului 1,  $\varphi_1$  este potențialul său ș.a.m.d.



Deoarece suprafața conductorului din figura 3.2 este neapărat o suprafață cu potențial constant, câmpul electric, care este egal cu  $-\text{grad } \varphi$ , trebuie să fie *perpendicular* la suprafață în orice punct. La trecerea din interiorul spre exteriorul conductorului, la suprafața lui se observă că intensitatea câmpului electric variază brusc; pe suprafața exterioară a conductorului  $E$  este diferit de zero și este nul în interior. Discontinuitatea lui  $E$  se explică datorită prezenței pe suprafață a sarcinii de densitate  $\sigma$  pe care, cu ajutorul teoremei lui Gauss, o putem lega direct de  $E$ . Să alegem o „cutie” plată care să cuprindă un element de suprafață (fig. 3.3), la fel cu cea folosită la analiza discului încărcat din paragraful 2.6. În acest caz, prin fața cutiei care se află în interiorul conductorului nu există flux și rezultă că  $E_n = \sigma/\epsilon_0$ , unde  $E_n$  este componenta normală la suprafață a intensității câmpului electric. Întrucît, așa cum am văzut, în acest caz câmpul este perpendicular pe suprafață, nu există altă componentă. Sarcina superficială va fi sarcina totală  $Q_k$ . Înseamnă că integrala de suprafață din  $\sigma$ , pe tot conductorul, va fi egală cu  $Q_k$ . Se pot trage următoarele concluzii, valabile pentru *orice* asemenea sistem de conductori, indiferent de forma și așezarea lor:

$$\varphi = \varphi_k \text{ în toate punctele de pe suprafața conductorului } k \quad (1)$$

$$\text{În orice punct din exteriorul conductorului, } E \text{ este perpendicular la suprafață și } E = \sigma/\epsilon_0, \text{ unde } \sigma \text{ este densitatea de sarcină superficială} \quad (2)$$

$$Q_k = \int_{S_k} \sigma \, da = \epsilon_0 \int_{S_k} E \cdot da \quad (3)$$

Întrucît (2) leagă în mod univoc pe  $E$  de  $\sigma$  (densitatea de sarcină superficială locală), am fi tentați să credem că  $\sigma$  este sursa lui  $E$ . Asta ar fi eronat.  $E$  este intensitatea câmpului total creat de *toate* sarcinile din sistem, apropiate și îndepărtate; sarcina superficială reprezintă doar o parte din aceste sarcini. Sarcina superficială este obligată „să se rearanjeze” pînă cînd este satisfăcută relația (2). Figura 3.4 pune în evidență faptul că, în comparație cu alte distribuții superficiale de sarcină, conductorul este un caz special.

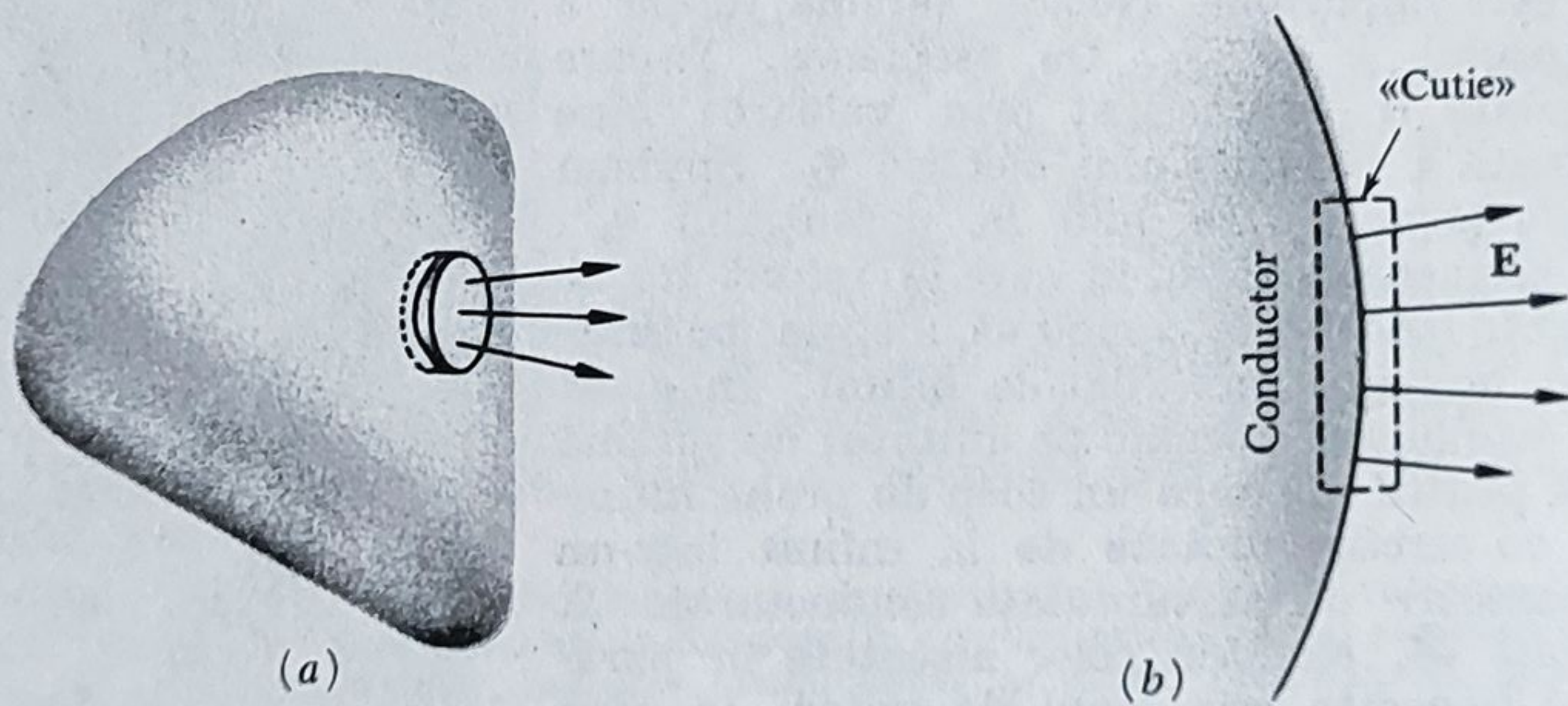
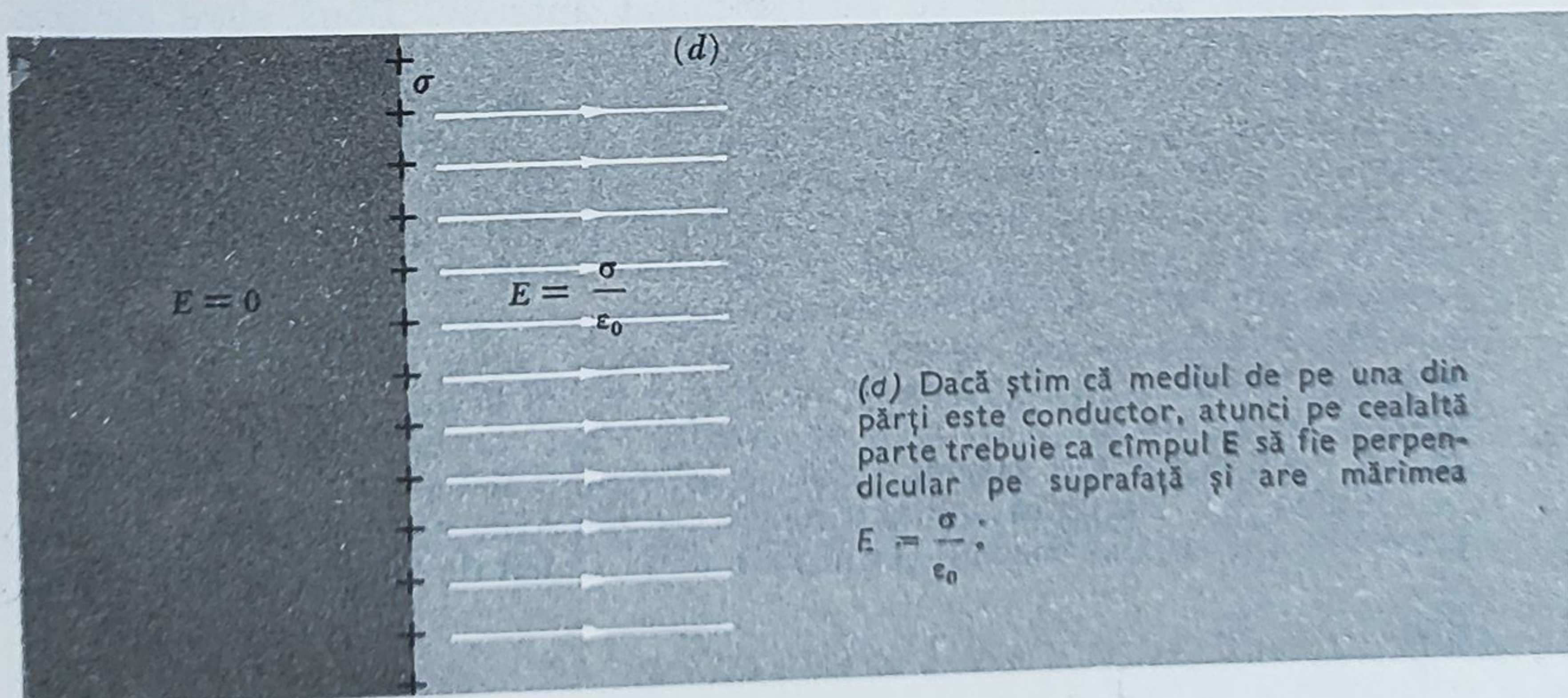
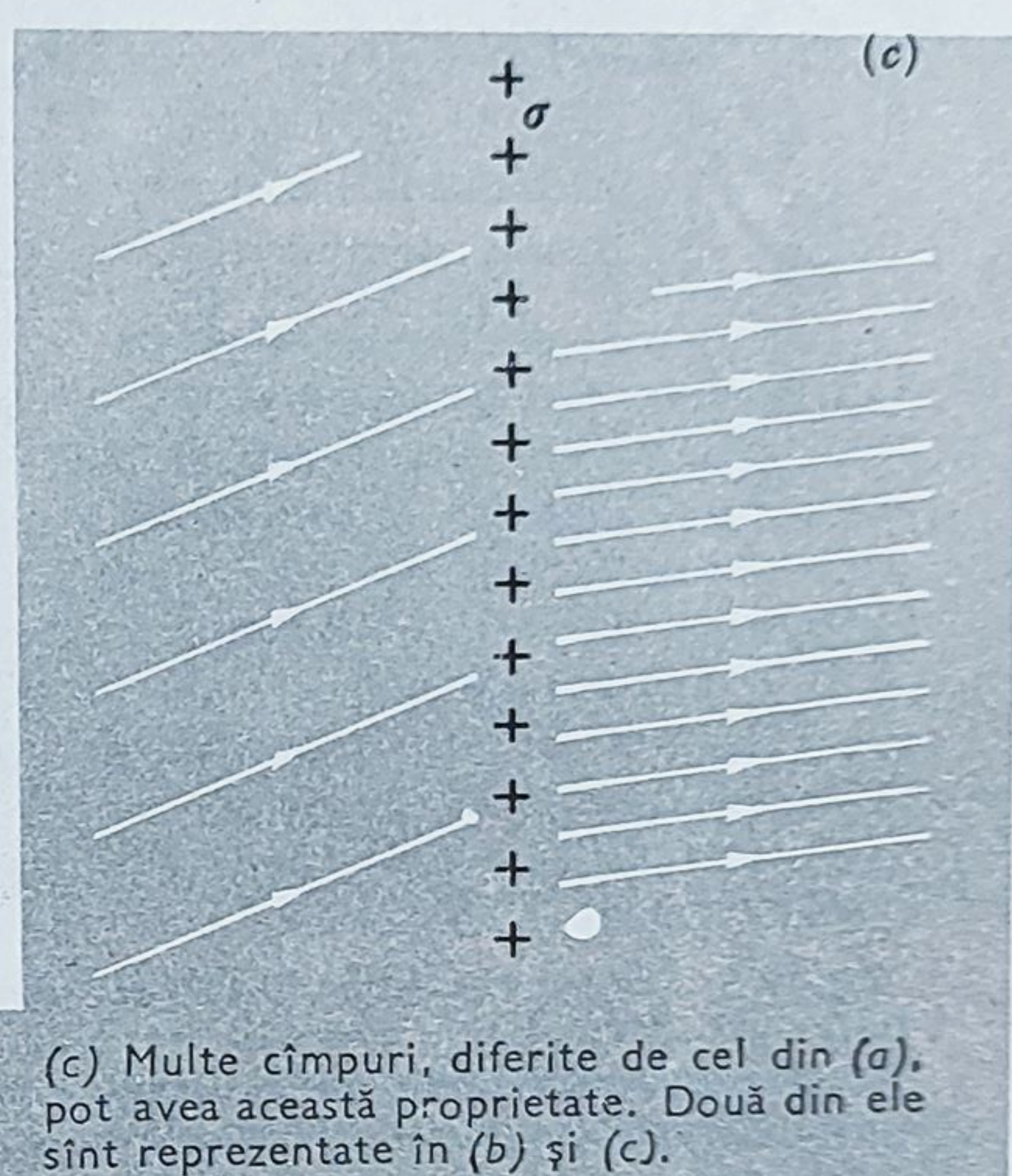
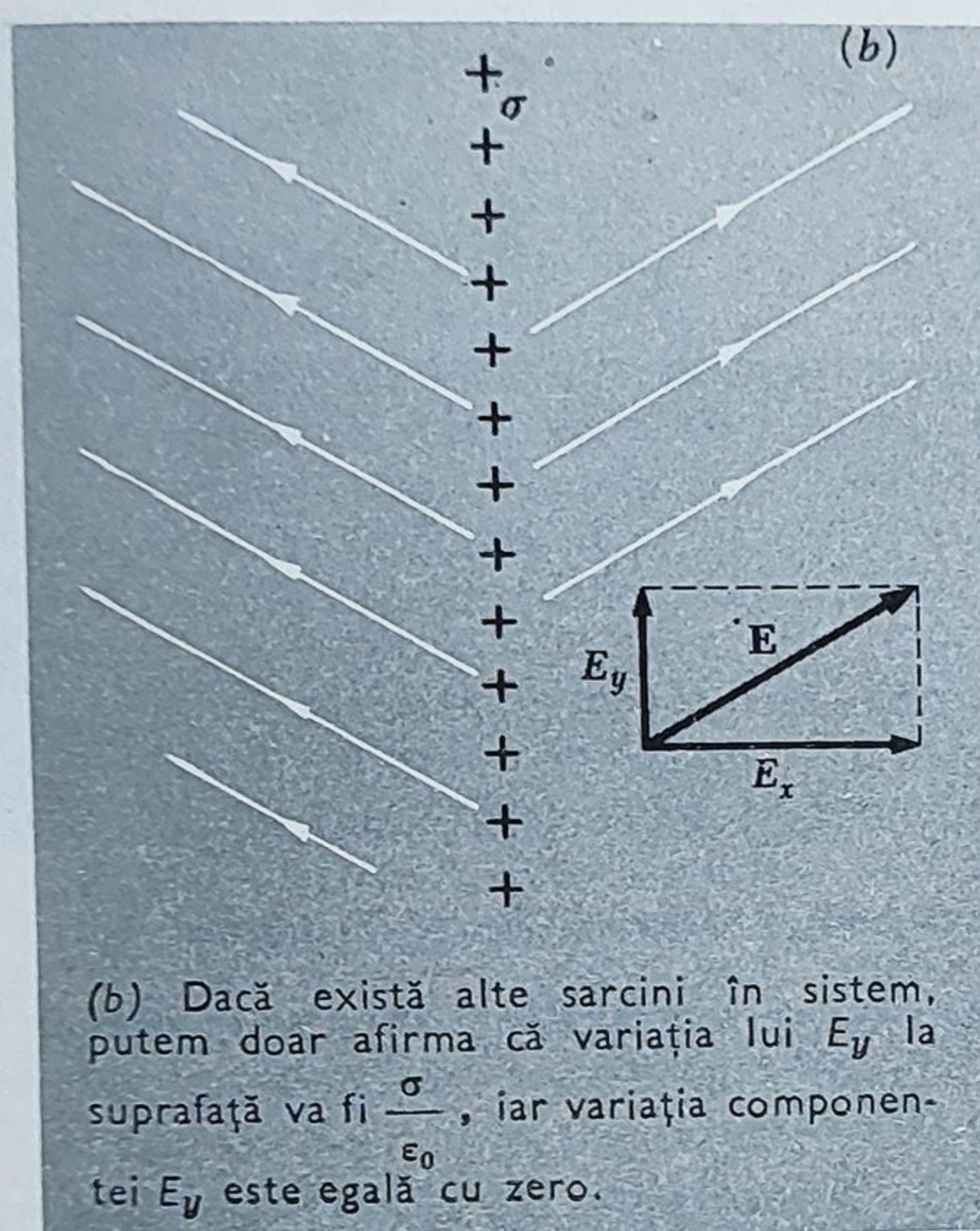
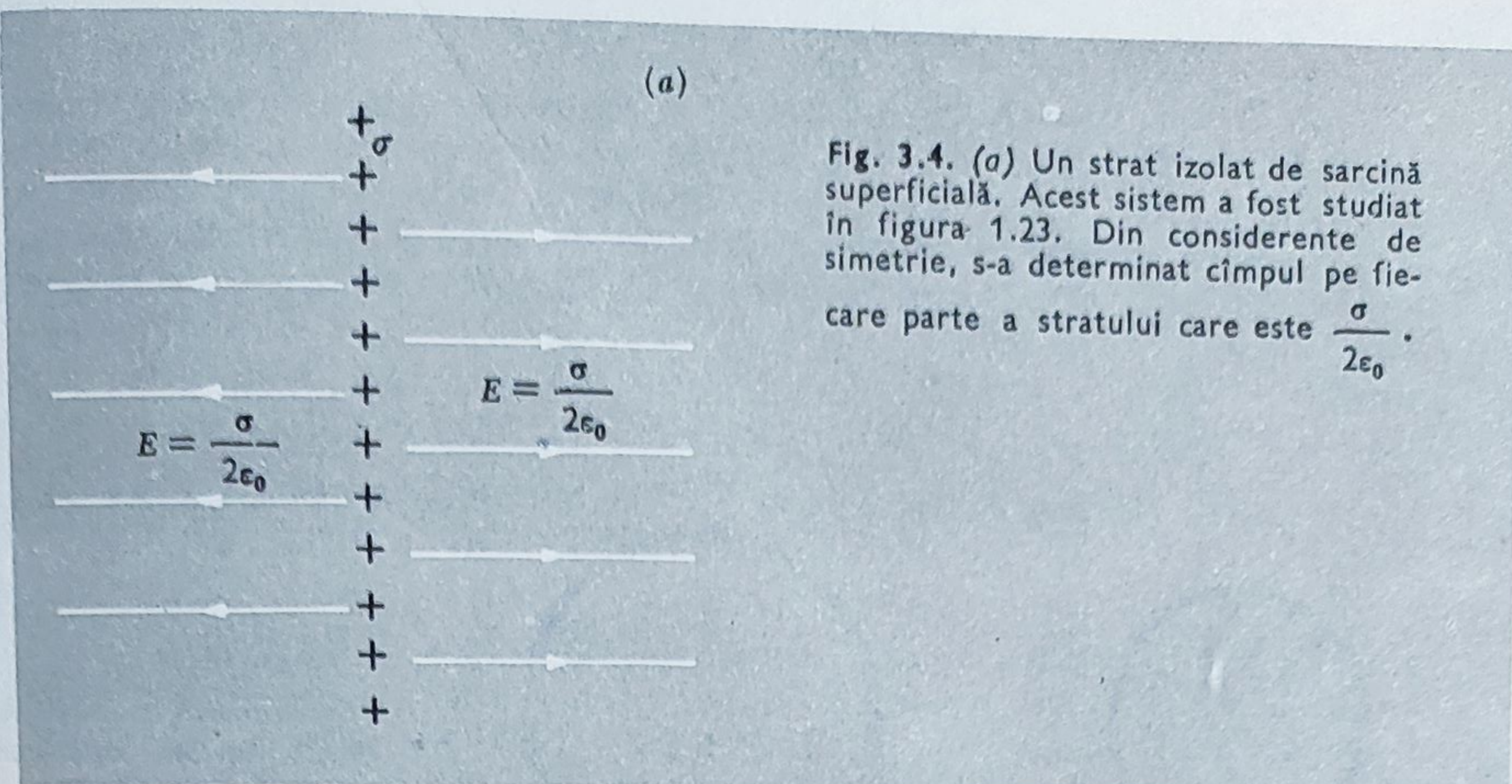


Fig. 3.3. (a) Legea lui Gauss leagă intensitatea câmpului electric de la suprafața conductorului de densitatea superficială de sarcină (ec. 2). (b) Secțiune transversală prin suprafața conductorului și a cutiei.







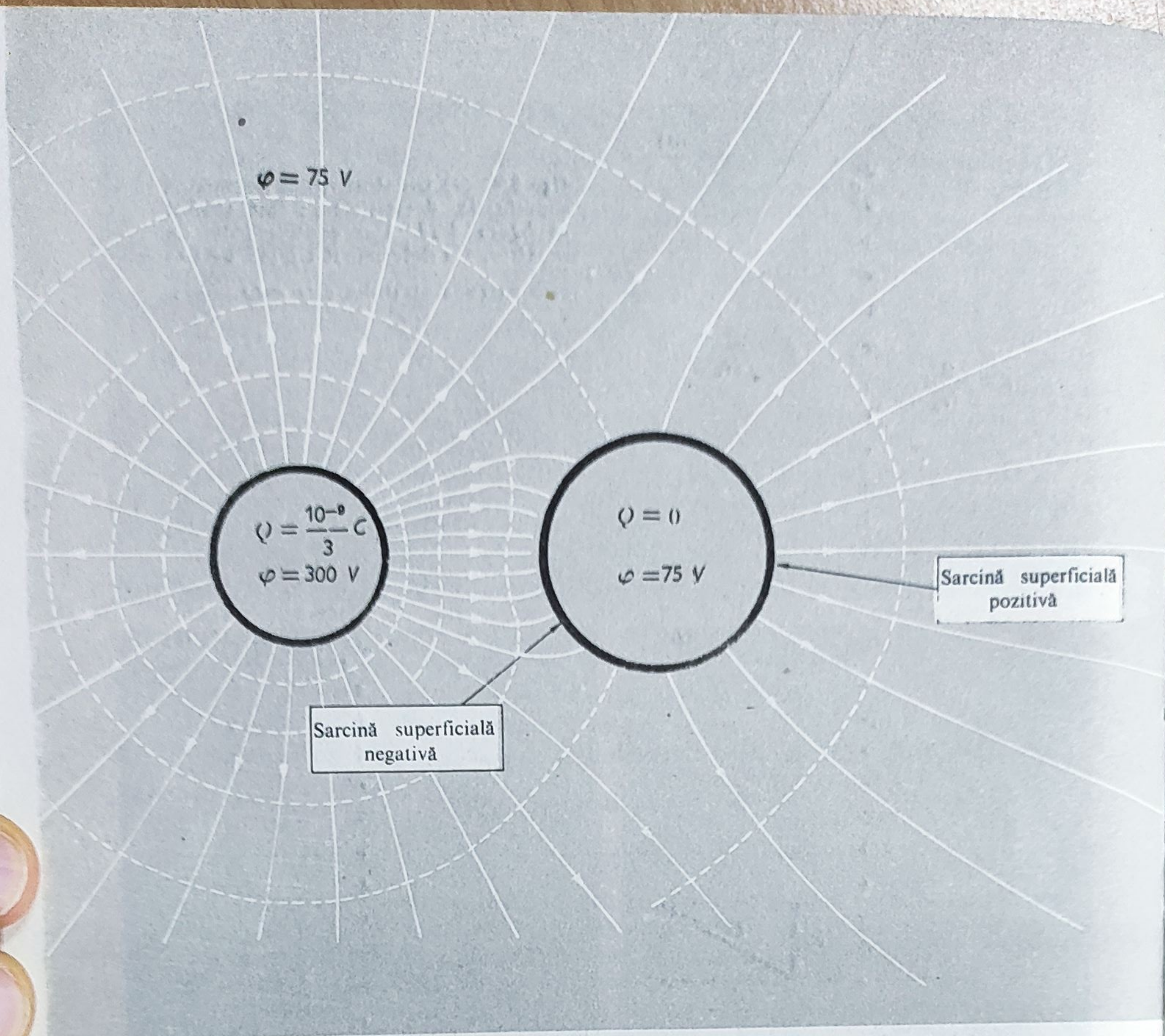


Fig. 3.5. Câmpul electric în jurul a doi conductori sferici, unul cu sarcina totală egală cu  $\frac{10^{-9}}{3} C$  și unul cu sarcina totală egală cu zero. Curbele punctate reprezintă intersecțiile suprafețelor echipotențiale cu planul figurii. Potențialul zero este la infinit.

În figura 3.5 este reprezentat câmpul și distribuția de sarcină pentru un sistem simplu, asemănător cu cel menționat anterior. Două sfere conductoare, una având raza egală cu unitatea și sarcina totală  $+1$  unități de sarcină, iar cealaltă — o rază ceva mai mare, cu sarcina totală zero. Observați că densitatea de sarcină superficială nu este uniformă pe nici unul din conductori. Sfera din dreapta, cu sarcina totală egală cu zero, are densitatea de sarcină superficială negativă concentrată pe fața din dreptul celeilalte sfere și sarcina superficială pozitivă este distribuită pe fața opusă. Curbele punctate, din figura 3.5, reprezintă suprafețele echipotențiale sau, mai precis, intersecțiile lor cu planul figurii. Pe măsură ce ne îndepărtăm de sferele încărcate, suprafețele echipotențiale devin sferice și liniile de câmp devin radiale, câmpul semănând tot mai mult cu câmpul unei sarcini punctiforme egale cu  $+1$ , care reprezintă sarcina totală a întregului sistem.

Figura 3.5 ilustrează calitativ toate posibilitățile pe care le-am fi putut prevedea, dar am dat desenul și din alt motiv. Oricât de simplu ar fi sistemul,



nu se poate obține pe cale directă o soluție matematică exactă. De fapt, numărul dispunerilor geometrice tridimensionale ale conductorilor care admit soluție matematică în formă închisă, sînt descurajant de mici. Rezolvarea a citorva asemenea cazuri, nici nu cere un studiu aprofundat al fizicii. Vom încerca să înțelegem esența problemei matematice ridicate de sistemul prezentat.

### 3.3. PROBLEMA FUNDAMENTALĂ A ELECTROSTATICII; TEOREMA UNICITĂȚII

Putem rezolva problema cu ajutorul funcției potențiale  $\varphi$ , deoarece dacă  $\varphi$  este cunoscut,  $\mathbf{E}$  poate fi imediat determinat. Peste tot, în jurul conductorilor,  $\varphi$  satisface ecuația diferențială pe care am întâlnit-o în cap. 2, ecuația lui Laplace:  $\nabla^2\varphi = 0$ . În coordonate carteziene, ecuația lui Laplace se scrie:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (4)$$

Problema constă în găsirea unei funcții care să satisfacă ecuația (4) și, de asemenea, condițiile la limită date pe suprafețele conductoare. Aceste condiții pot fi date diferit. Potențialul  $\varphi_k$  al fiecărui conductor poate fi dat sau cunoscut. (Într-un sistem real, potențialele pot fi menținute constante prin conectarea permanentă la baterii sau alte „surse de energie” cu potențial constant.) În acest caz, soluția noastră  $\varphi(x, y, z)$ , trebuie să ia valoarea dată în fiecare punct de pe suprafață. Aceste suprafețe cuprind în întregime domeniul în care este definit  $\varphi$ , dacă impunem ca pe suprafața aflată la „infini”, potențialul să fie nul. Uneori, regiunea care ne interesează este în întregime cuprinsă într-o suprafață conductoare; în acest caz atribuim conductorului un potențial oarecare și neglijăm tot ce se află în afara lui. În ambele cazuri, avem de-a face cu o problemă la limită tipică, în care valoarea funcției este determinată pe toată frontiera.

Sau, poate fi specificată sarcina totală pe fiecare conductor,  $Q_k$ . (Nu putem specifica arbitrar toate valorile sarcinilor și potențialelor, pentru că asta ar însemna o supradeterminare a problemei.) Specificînd sarcinile am fixat, de fapt, valoarea integralei de suprafață din grad  $\varphi$ , pe suprafața fiecărui conductor. Aceasta schimbă întrucîtva problema din punct de vedere matematic. De asemenea, cele două aspecte ale problemei la limită se pot „combina”.

Problema fundamentală care prezintă interes este următoarea: cu condițiile la limită date într-un anumit fel, are problema soluție și dacă are, cîte are — una sau mai multe? Nu vom încerca să răspundem la toate chestiunile ridicate de această problemă, dar vom studia unul din cazuri care prezintă importanță și care ne dă un rezultat util. Să presupunem că potențialul fiecărui conductor,  $\varphi_k$ , este dat și îndeplinește condiția ca la infinit sau pe conductorul ce include sistemul,  $\varphi$  să tindă către zero. Vom arăta că această problemă la limită nu are decît o soluție. Din punct de vedere fizic, pare evident că există o soluție oarecare, întrucît aranjînd efectiv conductorii în modul indicat, legîndu-i prin fire infinite de scurte pentru a ajunge la potențialul corespunzător, sistemul atinge o stare oarecare. Cu toate acestea, demonstrația matematică a existenței unei soluții este complet diferită și



nu vom încerca s-o facem. În schimb vom presupune că există o soluție  $\varphi(x, y, z)$  și vom arăta că ea este unică. Demonstrația, care este tipică unor asemenea probleme, decurge în modul următor:

Presupunem că există o altă funcție  $\psi(x, y, z)$  care este de asemenea o soluție ce îndeplinește aceleași condiții la limită. Știm că ecuația lui Laplace este liniară. Prin urmare, dacă  $\varphi$  și  $\psi$  satisfac ecuația (4), atunci și  $\varphi + \psi$  sau orice combinație lineară a lor  $c_1\varphi + c_2\psi$ , în care  $c_1$  și  $c_2$  sînt constante, vor satisface ecuația. În particular, și diferența dintre cele două soluții  $\varphi - \psi$  trebuie să satisfacă ecuația (4). Să notăm această funcție cu  $W$ :

$$W(x, y, z) = \varphi(x, y, z) - \psi(x, y, z) \quad (5)$$

Bineînțeles,  $W$  nu satisface condițiile la limită. De fapt, pe suprafața fiecărui conductor  $W$  este zero, întrucît  $\varphi$  și  $\psi$  iau aceeași valoare  $\varphi_k$  pe suprafața conductorului  $k$ . Rezultă că  $W$  este soluția unei alte probleme electrostatice, cu aceiași conductori, dar toți ținuti la potențial nul. Dacă este așa, putem afirma că funcția  $W$  trebuie să fie egală cu zero în toate punctele spațiului. Dacă n-ar fi așa, atunci ea ar trebui să aibă undeva un maxim sau un minim; ne reamintim, însă, că  $W$  este zero atît la infinit cît și pe suprafețele conductoarelor. Dacă  $W$  are un extremum într-un punct oarecare  $P$ , să considerăm o sferă cu centrul în acest punct. După cum am văzut în cap. 2, valoarea medie a unei funcții care satisface ecuația lui Laplace pe sferă este egală cu valoarea ei în centrul sferei. Dacă, însă, centrul este un maxim sau un minim al funcției, acest lucru n-ar fi adevărat. Înseamnă că  $W$  nu poate avea un maxim sau un minim și prin urmare, ea trebuie să fie peste tot egală cu zero. Rezultă că  $\psi = \varphi$  peste tot, adică nu există decît o soluție a ec. (4), care satisface condițiile la limită date.

Acum, putem demonstra ușor un alt fapt remarcabil. În spațiul din interiorul unui conductor gol de orice formă, lipsit de sarcini, cîmpul electric este nul. Această afirmație este valabilă indiferent care ar fi cîmpul în exteriorul conductorului. Știm că cîmpul în spațiul delimitat de o pătură sferică uniform încărcată, izolată, este nul, la fel ca și cîmpul gravitațional într-o sferă goală. Teorema enunțată este, într-un fel, mai surprinzătoare. Să considerăm cutia metalică reprezentată în figura 3.6, în care s-a practicat o tăietură. În apropierea cutiei se află sarcini electrice care creează un cîmp exterior ca în figură. Distribuția de sarcină pe suprafața cutiei este foarte neuniformă. Cîmpul în toată regiunea, inclusiv în interiorul cutiei, este egal cu suma cîmpurilor create de distribuția de sarcini și de sursele externe. Pare neverosimil ca aranjarea sarcinilor pe cutie să se fi făcut în așa fel încît cîmpul creat de ele să anuleze cîmpul surselor externe, în fiecare punct din interiorul cutiei. Și totuși așa s-a întîmplat, lucru pe care-l vom demonstra.

Funcția potențială din interiorul cutiei,  $\varphi(x, y, z)$ , trebuie să satisfacă ecuația lui Laplace. Întreaga frontieră a acestui domeniu și anume — cutia, este echipotențială și prin urmare, pe toată frontiera, funcția  $\varphi = \varphi_0$  este constantă. Evident, una din soluții este  $\varphi = \varphi_0$  în tot volumul. Dar conform teoremei unicității, există doar o singură soluție, chiar aceasta. „ $\varphi = \text{constant}$ ” înseamnă  $E = 0$ , deoarece  $E = -\text{grad } \varphi$ .

Absența cîmpului electric în spațiul din interiorul unui conductor prezintă atît interes practic cît și teoretic. Ea stă la baza ecranării electrice. În majoritatea aplicațiilor practice, nu este neapărat necesar ca învelișul să fie compact. Dacă în el s-au practicat mici orificii sau dacă este din plasă metalică, peste tot cîmpul va fi foarte slab exceptînd imediata vecinătate a orificiilor. Un tub metalic deschis la capete, cu lungimea egală cu cîteva



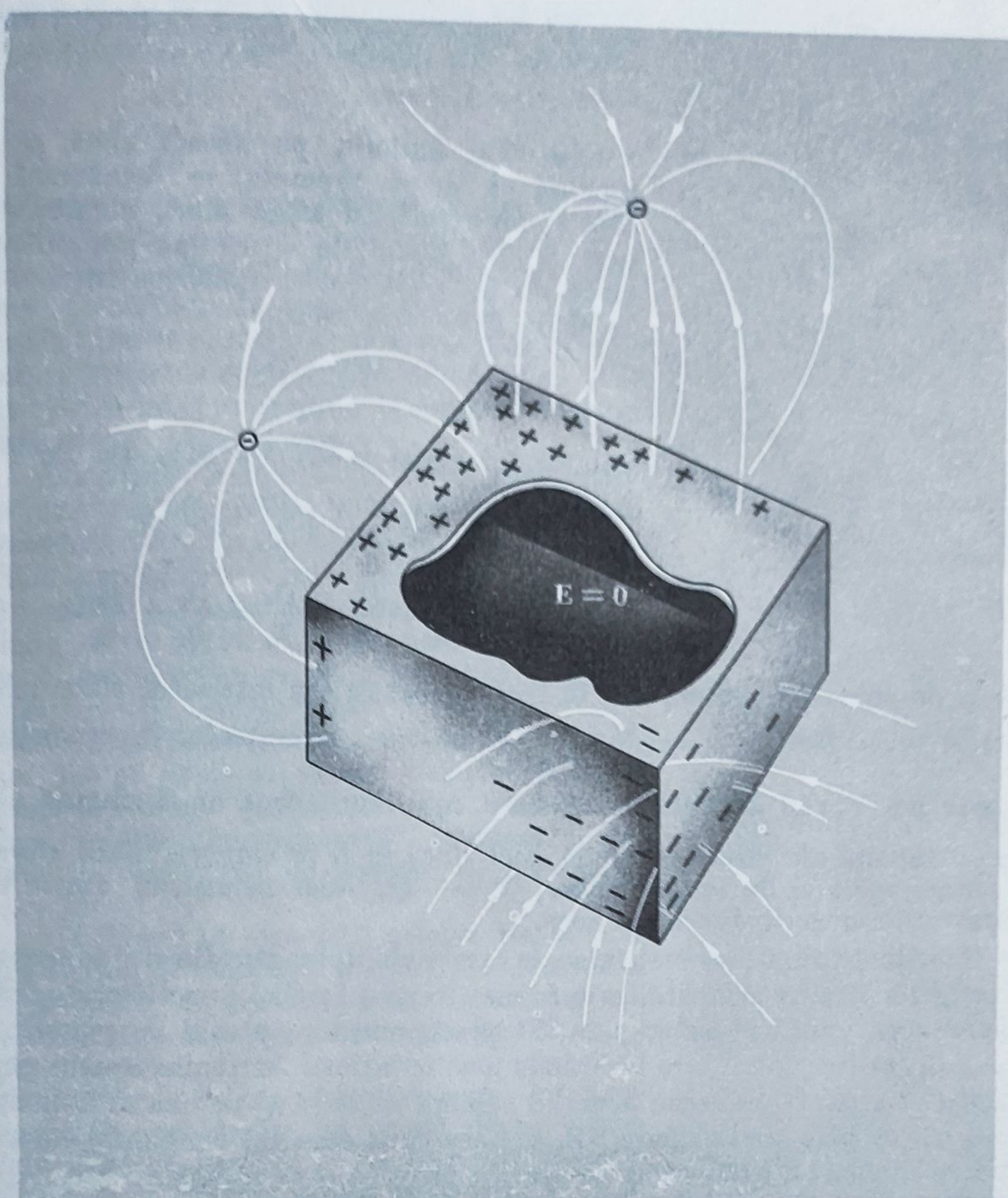


Fig. 3.6. Câmpul în interiorul unei cutii conductoare închise este peste tot egal cu zero.

diametre, ecranează eficient spațiul din interior cu excepția regiunilor din apropierea capetelor. Noi studiem, bineînțeles, numai câmpuri statice, dar considerațiile făcute sînt valabile și pentru câmpurile electrice ce variază lent.

### 3.4. CÎTEVA SISTEME SIMPLE DE CONDUCTORI

Vom studia în acest paragraf cîteva configurații deosebit de simple de conductori. Începem cu două sfere concentrice de metal, de raze  $R_1$  și  $R_2$ , care au sarcinile totale  $Q_1$  și respectiv  $Q_2$  (fig. 3.7). Această configurație nu aduce nimic nou. Din considerente de simetrie, este evident, că sarcina se



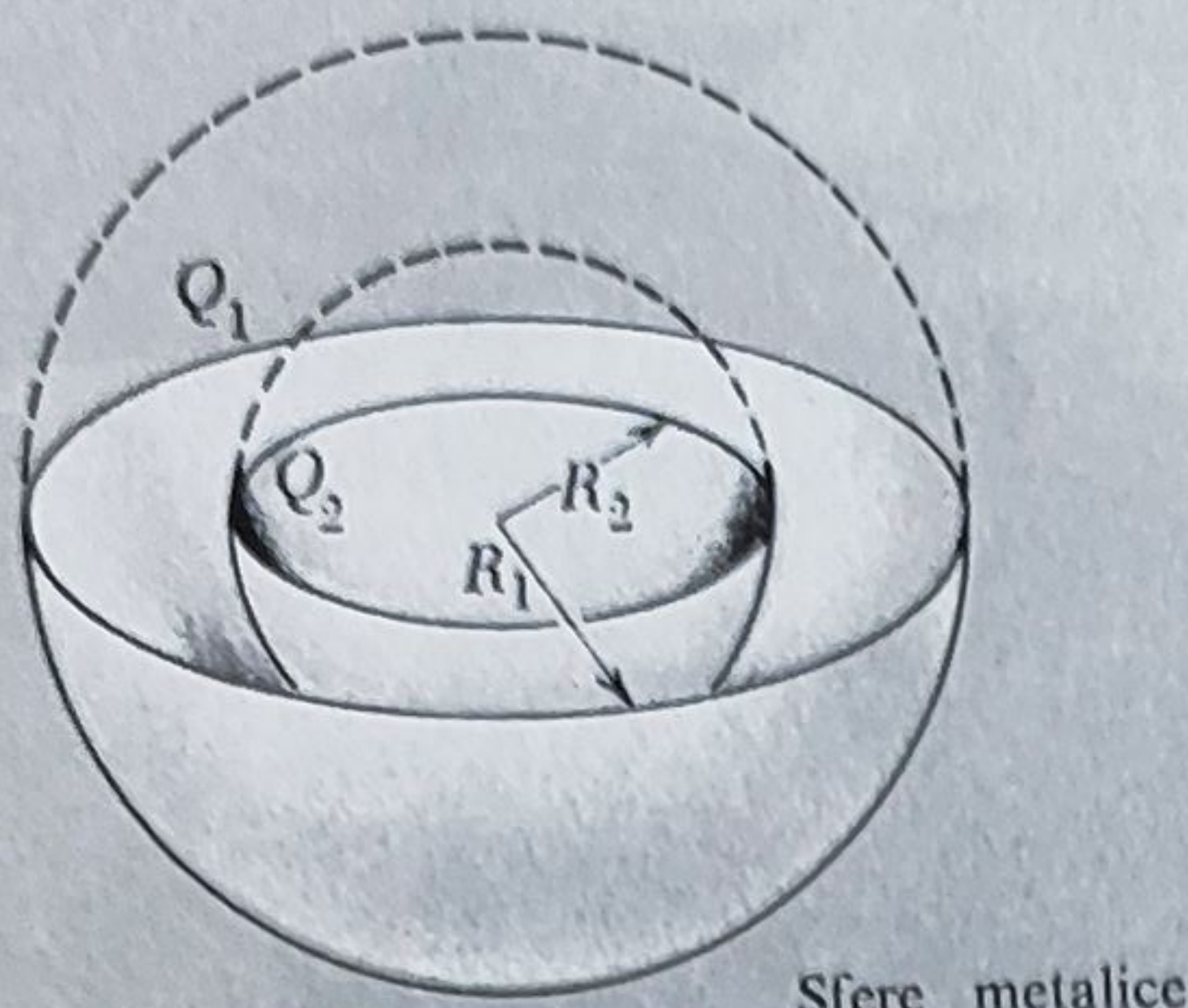


Fig. 3.7. Fiind date sarcinile  $Q_1$  și  $Q_2$  ale păturilor sferice, potențialul sferei interioare este dat de ecuația 6.

va distribui uniform pe fiecare sferă și înseamnă că acest exemplu se încadrează în cap. 11. În exteriorul sferei mari, câmpul este egal cu cel creat de o sarcină punctiformă egală cu  $Q_1 + Q_2$ , astfel încât potențialul  $\varphi_1$  al sferei exterioare este:

$$\frac{(Q_1 + Q_2)}{R_1}.$$

Potențialul sferei interioare este dat de

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{Q_1 + Q_2}{R_1} + \int_{R_1}^{R_2} -\frac{Q_2}{r^2} dr = \\ &= \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} - \frac{Q_2}{R_1} = \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}. \end{aligned} \quad (6)$$

$\varphi_2$  este, de asemenea, potențialul în toate punctele din interiorul sferei mici. L-am fi putut găsi pe  $\varphi_2 = \left(\frac{Q_1}{R_1}\right) + \left(\frac{Q_2}{R_2}\right)$  pe baza principiului superpoziției:

$\frac{Q_1}{R_1}$  este potențialul din interiorul sferei mai mari, dacă ar fi singură,  $\frac{Q_2}{R_2}$  este potențialul din interiorul sferei mici, dacă ar fi ea singură. Dacă sferile au sarcini egale și de semn contrar,  $Q_1 = -Q_2$ , doar în spațiul dintre ele câmpul electric ar fi diferit de zero.

\* Unul din cele mai simple sisteme, în care mobilitatea purtătorilor de sarcină în conductor devine evidentă, este format dintr-o sarcină punctiformă aflată în apropierea unui conductor plan. Să presupunem că planul  $xy$  reprezintă suprafața conductorului care se întinde pînă la infinit. Atribuim acestui plan potențialul zero. Să aducem, acum, o sarcină pozitivă  $Q$  pe axa  $z$ , la înălțimea  $h$  cm de plan, ca în figura 3.8, *a*. Care va fi aspectul câmpului și distribuția de sarcină? Ne așteptăm ca sarcina pozitivă  $Q$  să atragă sarcina negativă, dar nu putem presupune de fel că sarcina negativă se va fixa la piciorul perpendicularei coborîte din  $Q$ , unde concentrația este foarte mare. De ce? De asemenea, ne amintim că câmpul electric în apropierea suprafeței conductorului este întotdeauna perpendicular pe suprafață. Pe de altă parte, prezența conductorului plan în imediata apropiere a sarcinii punctiforme  $Q$  nu schimbă prea mult situația: liniile de câmp trebuie să iasă din  $Q$  radial, la fel ca dintr-o sarcină punctiformă. Prin urmare, ne putem aștepta la ceva asemănător calitativ cu situația redată în figura 3.8, *b*. Bineînțeles, totul este simetric față de axa  $z$ .

Dar cum rezolvăm efectiv problema? Răspunsul este — printr-un truc, un truc care este și instructiv și deseori, util. Găsim o altă problemă care se rezolvă simplu și a cărei soluție poate fi folosită la problema noastră în întregime sau parțial. În acest caz, alegem două sarcini punctiforme egale și de semn contrar  $Q$  și  $-Q$ . Câmpul electric este perpendicular în fiecare punct pe planul aflat la mijlocul distanței dintre cele două sarcini și a cărui secțiune



Fig. 3.8. (a) O sarcină punctiformă  $Q$  se află deasupra unui conductor plan infinit. (b) Cam acesta ar trebui să fie aspectul câmpului. (c) Câmpul unei perechi de sarcini de semne opuse.

transversală este reprezentată în figura 3.8, c prin dreapta  $AA$ . Dacă distanța de la  $Q$  la plan o luăm egală cu  $h$  din problema inițial pusă, jumătatea de sus a figurii 3.8, c corespunde tuturor condițiilor noastre: câmpul este perpendicular la suprafața conductorului și în apropierea lui  $Q$  se apropie de aspectul câmpului unei sarcini punctiforme.

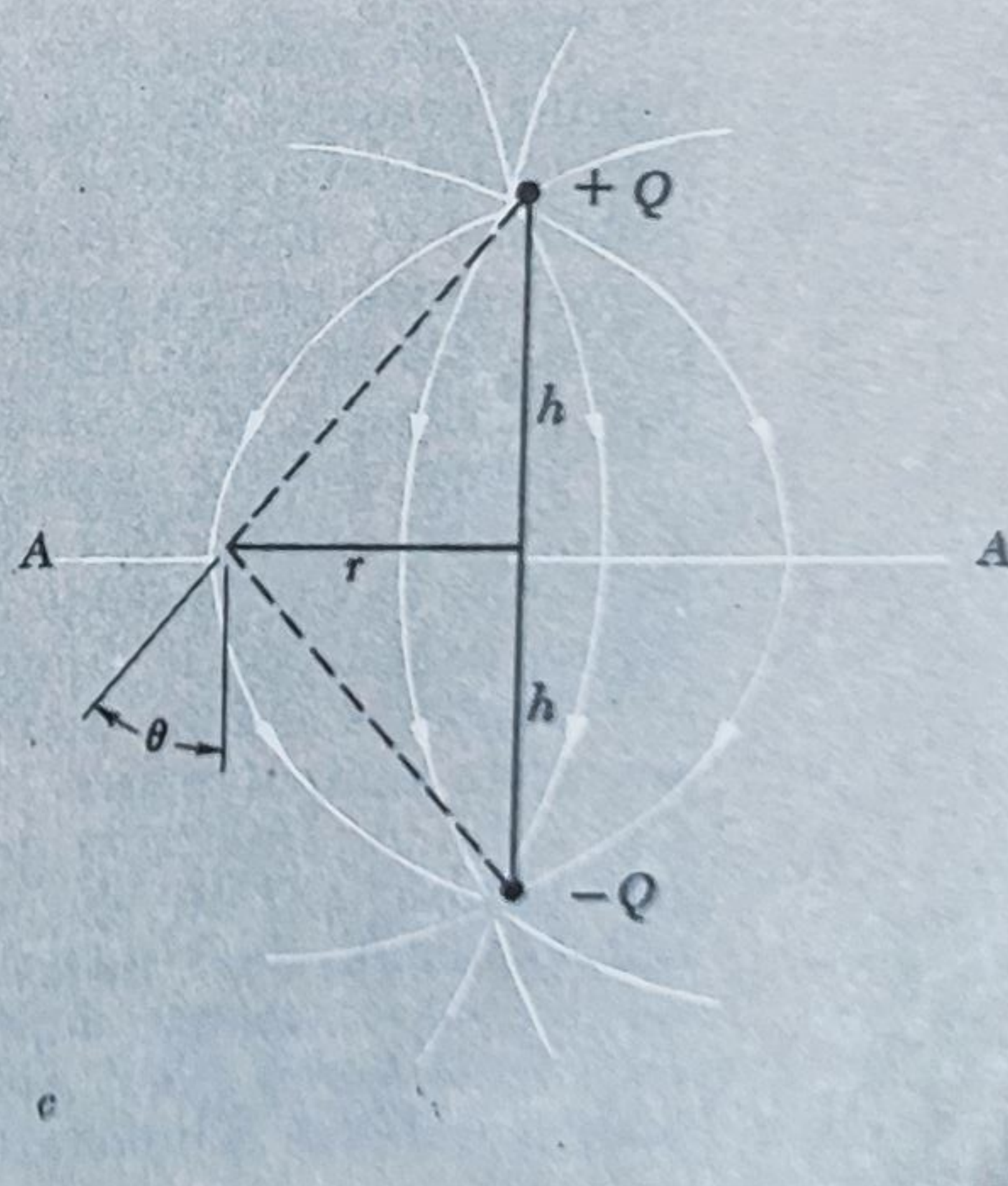
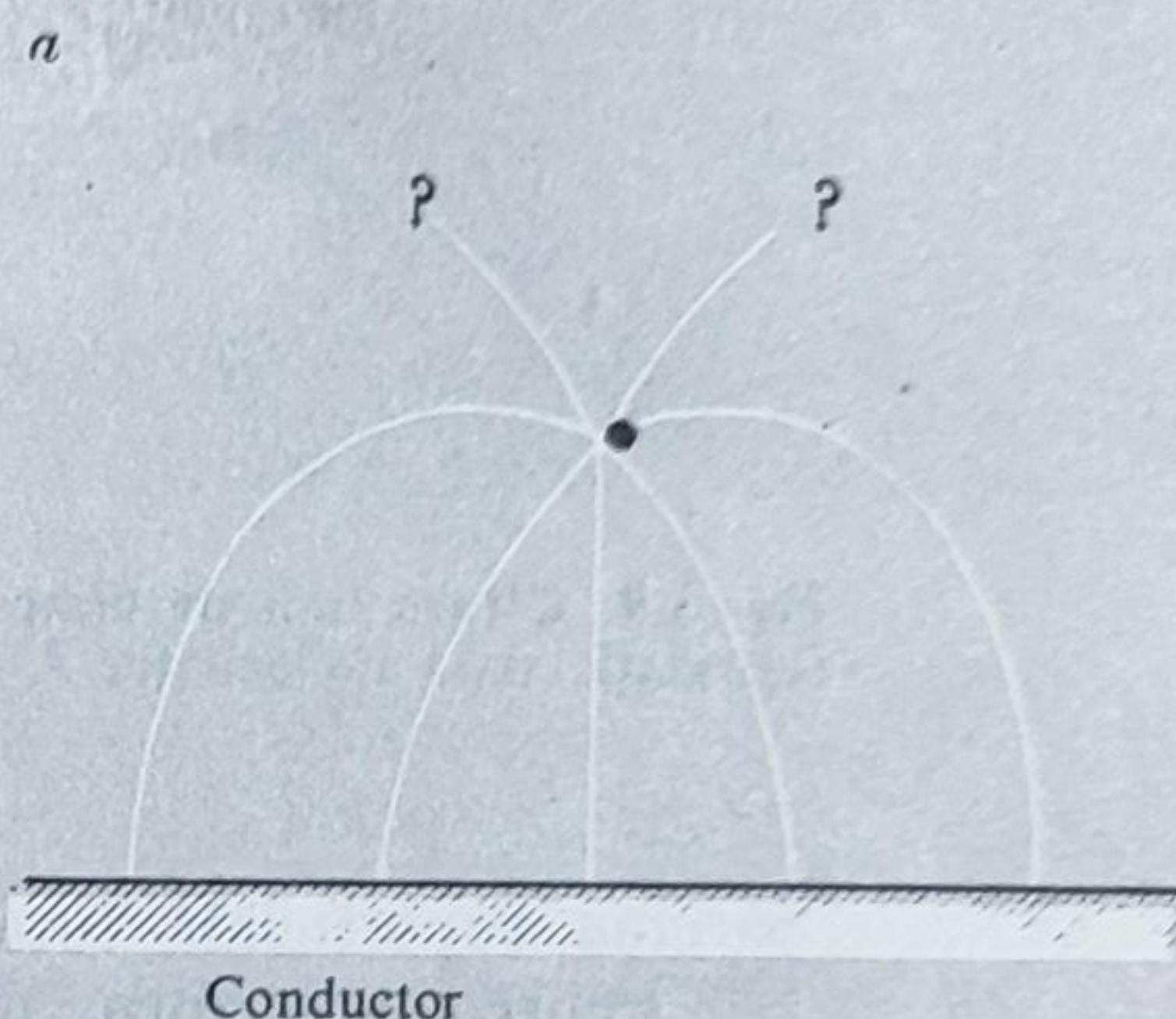
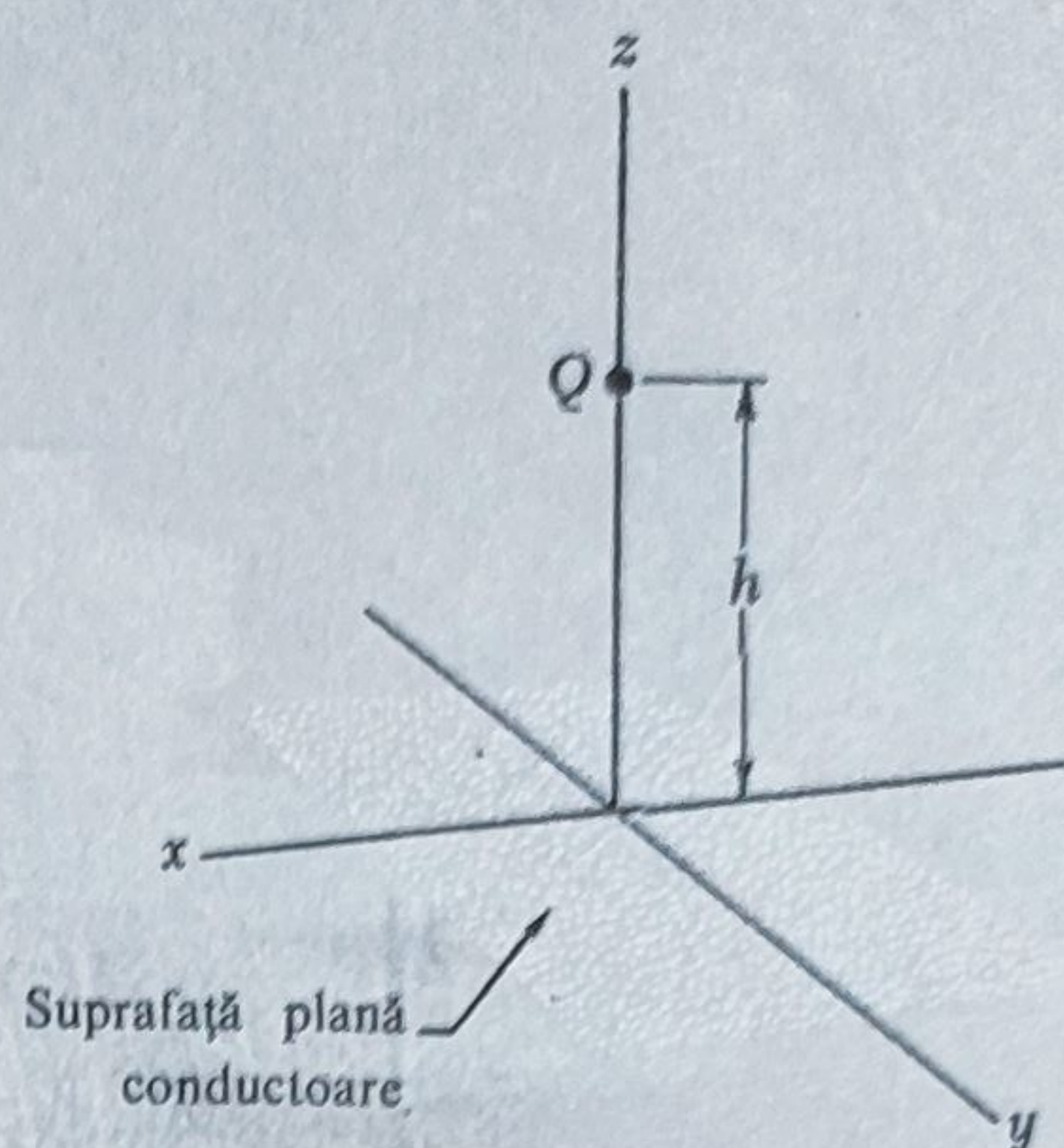
Condițiile la limită, în acest caz, diferă întrucâtva de condițiile la limită puse la teorema unicității din paragraful precedent. Potențialul conductorului este bine determinat, dar potențialul sarcinii punctiforme din sisteme tinde către infinit. Putem considera sarcina punctiformă ca un caz limită al unui conductor sferic mic cu sarcina totală  $Q$ . Chiar pentru aceste condiții la limită „combinată” — potențial dat pe unele suprafețe, sarcina totală pe altele — teorema unicității este valabilă. Și dacă soluția „împrumutată” satisface aceste condiții, rezultă că ea trebuie să fie soluția corectă.

În figura 3.9 este dată soluția finală pentru câmpul de deasupra planului, cu densitatea superficială de sarcină dată. Putem calcula intensitatea câmpului și direcția lui în orice punct, revenind la problema cu cele două sarcini (fig. 3.8, c) și folosind legea lui Coulomb. Să considerăm un punct de pe suprafață, aflat la distanța  $r$  de origină. Pătratul distanței de la acest punct la  $Q$  este  $r^2 + h^2$  și componenta  $z$  a intensității câmpului lui  $Q$  în acest punct este  $-Q \cos \theta / 4\pi\epsilon_0(r^2 + h^2)$ . „Sarcina imagine”  $-Q$ , aflată dedesubtul acestui plan, aduce o contribuție egală cu componenta  $z$ . Rezultă că intensitatea câmpului electric este dată de expresia

$$E_z = \frac{-2Q}{4\pi\epsilon_0(r^2 + h^2)} \cos \theta = \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0(r^2 + h^2)} \cdot \frac{h}{(r^2 + h^2)^{1/2}} = \frac{-Qh}{2\pi\epsilon_0(r^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

De aici putem obține densitatea superficială de sarcină:

$$\sigma = \epsilon_0 E_z = \frac{-Qh}{2\pi(r^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (8)$$





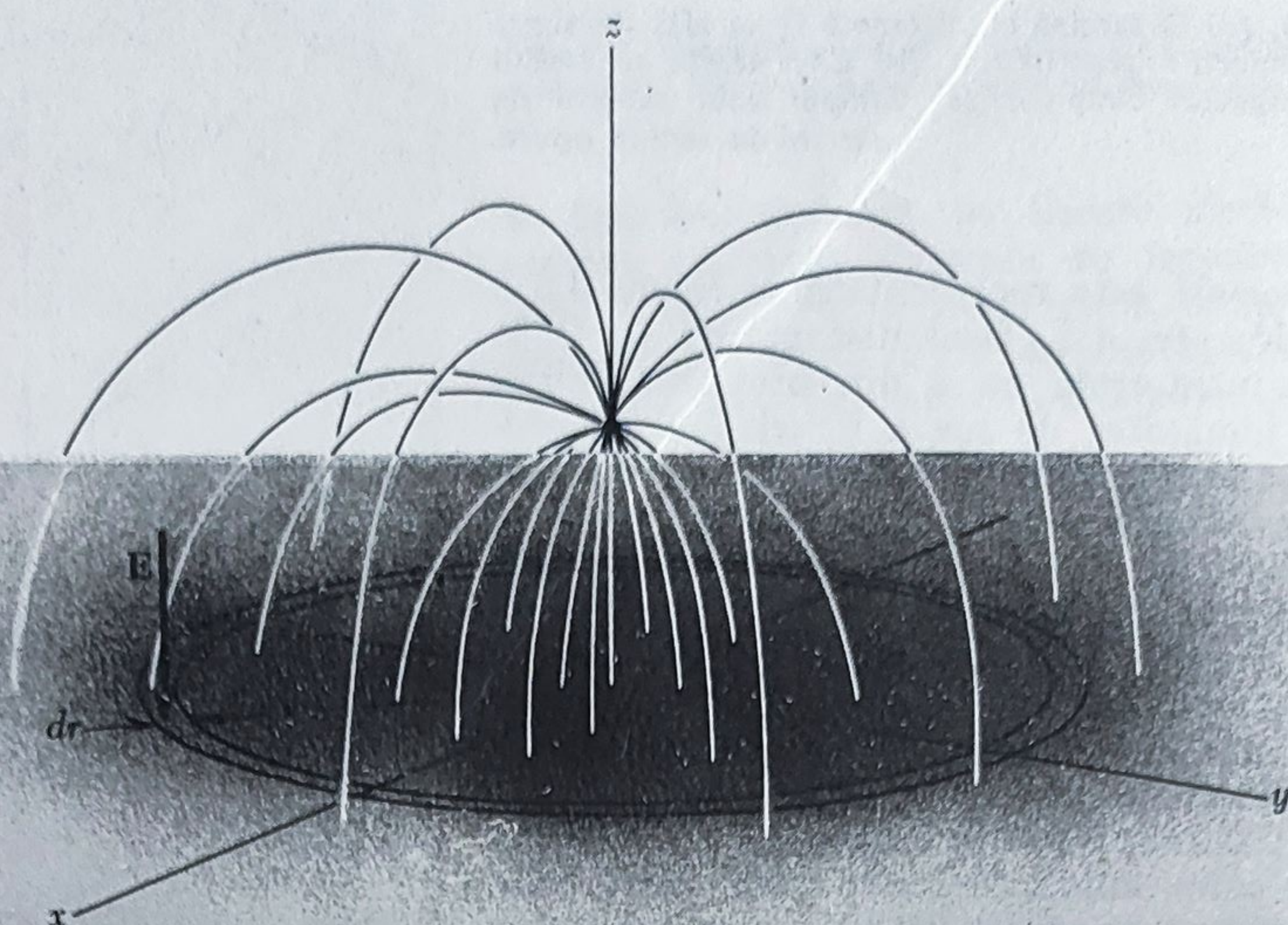


Fig. 3.9. Cîteva linii de cîmp ale sarcinii aflate deasupra planului. Intensitatea cîmpului la suprafață, dată de ecuația 7, determină densitatea superficială de sarcină  $\sigma$ .

Sarcina superficială totală ar trebui să fie  $-Q$ .

Pentru a verifica, putem integra pe toată suprafața și să vedem dacă obținem  $-Q$ :

$$\text{Sarcina superficială totală} = \int_0^\infty \sigma \cdot 2\pi r dr = -Q \int_0^\infty \frac{hr dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} = -Q. \quad (9)$$

Metoda folosită este cunoscută sub denumirea de „metoda imaginilor”. Sarcina negativă fictivă, dispusă la distanța  $h$  sub suprafața conductorului, spre care converg liniile de cîmp, poate fi considerată ca „ imaginea ” sarcinii punctuale  $Q$ , analog imaginii virtuale din dosul unei oglinzi. Forța electrică ce acționează asupra sarcinii  $Q$  datorită atracției exercitate de sarcina superficială, este egală cu forța pe care ar exercita-o sarcina imagine  $-Q$ . Observați că această forță se datorează sarcinii superficiale.

Totuși, această analogie cu imaginea într-o oglindă nu este foarte corectă și nici foarte utilă. Mai corect este să se considere această metodă ca un caz particular al unei metode mult mai generale, care ar putea fi numită „aproximarea condițiilor la limită”.

Pentru a lămuri mai bine ce înțelegem prin aceasta, să studiem cîteva suprafețe echipotențiale în cîmpul a două sarcini egale și de semn contrar (fig. 3.10, a). Doar una din aceste suprafețe este plană. Celelalte sînt suprafețe închise, nici una nu este chiar sferică, dar poziția oricăreia dintre ele o putem stabili, dacă este nevoie, printr-un calcul elementar. Dacă am putea alege două asemenea suprafețe, oricare dintre ele, și le-am confecționa din foite metalice cu exact aceleași dimensiuni și le-am amplasa exact la fel cum erau suprafețele echipotențiale una față de alta (fig. 3.10, a), am obține exact



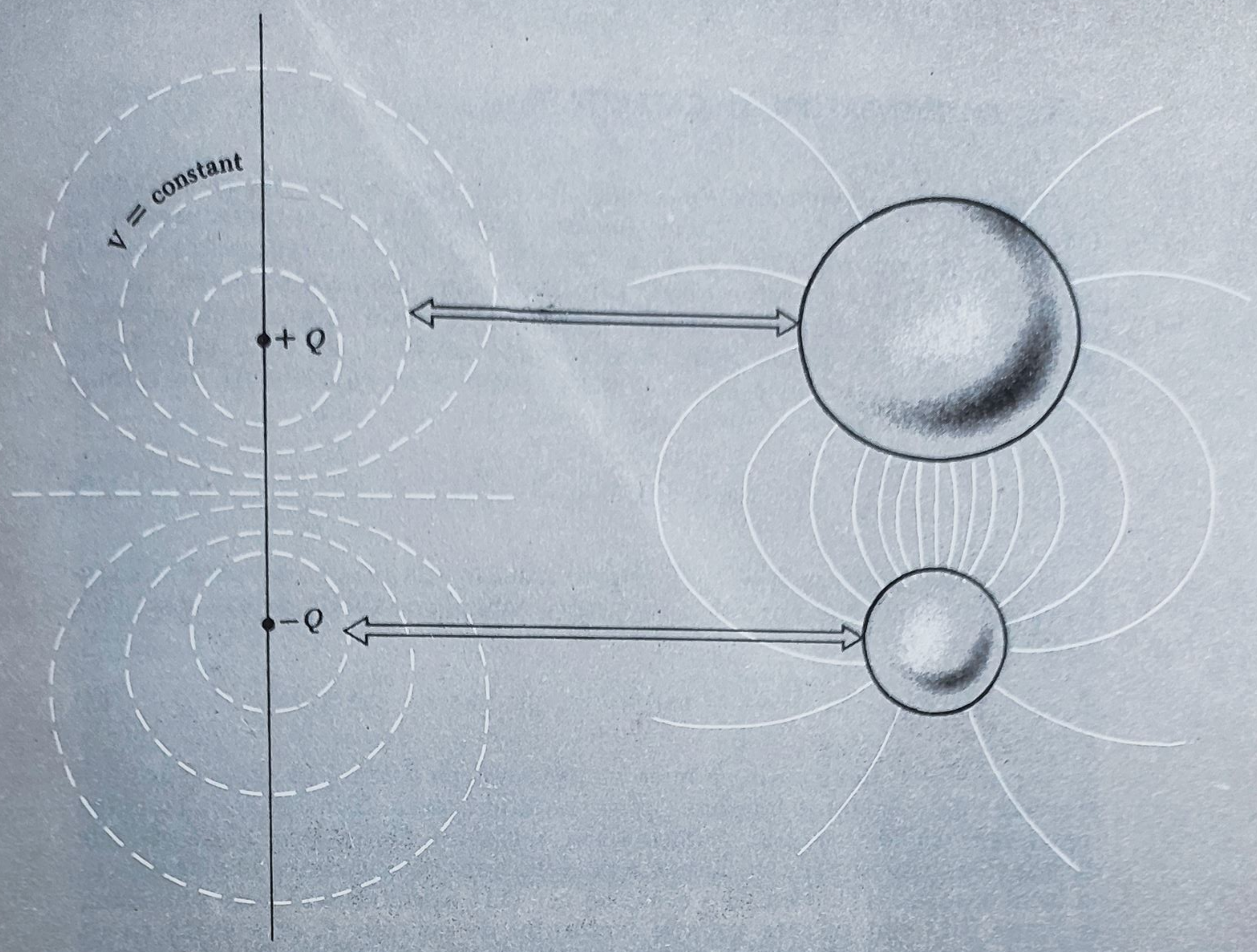


Fig. 3.10. (a) Secțiunile prin suprafețele echipotențiale a două sarcini punctiforme egale și de semn opus. (b) Două asemenea suprafețe realizate din metal. Doi conductori, care ar avea exact aceeași formă și s-ar afla la aceeași distanță unul de altul, cu sarcinile date  $Q$  și  $-Q$ , ar fi creat în punctele exterioare exact același câmp.

aceeași soluție ca în cazul câmpului electrostatic creat de doi asemenea conductori! Ea ar corespunde câmpului creat de două sarcini. Din păcate, este dificil de confecționat electrozi de exact aceeași formă pentru a găsi soluția. Totuși, folosirea electrozilor de formă sferică dă posibilitatea unei rezolvări aproximative care poate fi utilă uneori.

Studiul suprafețelor echipotențiale poate fi continuat prin studiul altor sisteme simple, urmărind exemple care ar putea fi mai utile. Am putea numi această metodă „o soluție în căutarea unei probleme“. Un exemplu, în această privință, este metoda folosită în problema 3.22. Maxwell a descris bine această situație: „Și astfel, problema găsirii formei conductorilor pentru un potențial dat, adică problema inversă de fapt, se rezolvă mult mai simplu decât problema directă a determinării potențialului când forma conductorilor este dată“.\*

\* James Clerk Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. I, cap. VII (ediția a 3-a, Oxford University Press, 1891, reeditată de ed. Dover, New York, 1954). Fiecare student în fizică trebuie să răsfoiască din când în când această carte. Problema ridicată de noi este bine tratată în cap. VII. La sfârșitul vol. I veți găsi câteva scheme minunate de câmp electric, și imediat după citatul dat, o scurtă explicație a motivului pentru care Maxwell dă aceste scheme. S-ar putea crede că pînă și el a fost încântat de construcția și eleganța lor.



### 3.5. CONDENSATORI ȘI CAPACITATE

Două plăci conductoare de același fel sînt dispuse paralel la distanța  $s$  una de alta (fig. 3.11, *a*). Aria fiecărei plăci este  $A$  și presupunem că sarcina pe una din plăci este  $Q$  și pe cealaltă  $-Q$ .  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  reprezintă valorile potențialelor de pe cele două plăci. Liniile de câmp ale acestui sistem în secțiune transversală sînt arătate în figura 3.11, *b*. Cu excepția marginilor, câmpul în regiunea dintre plăci este aproape uniform. Dacă îl considerăm uniform, intensitatea lui este  $(\varphi_2 - \varphi_1)/s$ . Densitatea superficială de sarcină corespunzătoare, pe fața interioară a uneia din plăci este

$$\sigma = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{s}. \quad (10)$$

Dacă neglijăm variația lui  $E$  și prin urmare și a lui  $\sigma$ , ce apare în apropierea marginilor plăcii, putem scrie pentru sarcina totală de pe una din plăci, o relație simplă:

$$Q = \epsilon_0 A \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{s} \text{ (neglijînd efectele de margine)}. \quad (11)$$

Ecuația (11) devine din ce în ce mai exactă, pe măsură ce raportul dintre distanța  $s$  între plăci și lungimea plăcii se micșorează. Bineînțeles că pentru rezolvarea exactă a acestei probleme electrostatice, ținînd cont și de efectele de margine, pentru plăci de formă bine determinată, folosim o relație exactă în locul ecuației (11). Pentru a arăta că ec. (11) aproximează bine problema, la figura 3.12 sînt trecute valorile factorului de corecție  $f$ , care arată cu cît diferă valoarea lui  $Q$  dată de ecuația (11) față de rezultatul exact, în cazul a două discuri conductoare aflate la distanțe diferite. Sarcina totală este întotdeauna puțin mai mare decît valoarea sarcinii determinate din ec. (11). Acest lucru pare firesc, dacă ne uităm la figura 3.11, *b*, în care faptul că la margini, și chiar pe fețele exterioare de la margine, are loc o concentrare suplimentară de sarcină, apare evident.

Pe noi ne interesează acum nu asemenea corecții, ci proprietățile generale ale unui sistem format din doi conductori. Perechea de plăci reprezintă un element des întîlnit în circuitele electrice și anume — *condensatorul*. Un condensator este format din doi conductori apropiați, aflați la potențiale diferite și avînd sarcini de semn contrar. Ne interesează relația dintre sarcina  $Q$  de pe una din plăci și diferența de potențial dintre ele. În cazul particular al sistemelor la care se aplică ec. (11), raportul  $Q/(\varphi_1 - \varphi_2)$  este egal cu  $\epsilon_0 A/s$ . Chiar în cazul în care această relație este aproximativă, este clar că relația exactă va depinde numai de dimensiunile și dispunerea geometrică a plăcilor. Rezultă că pentru o pereche de conductori fixați, raportul dintre sarcină și diferența de potențial va fi constant. Această constantă o numim *capacitatea* condensatorului și o notăm, de obicei, cu  $C$ .

$$Q = C(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (12)$$

Prin urmare, capacitatea condensatorului plan-paralel, neglijînd efectele de margine, este dată de

$$C = \frac{\epsilon_0 (8,85 \cdot 10^{-18} \text{ F/m}) A (\ln \text{ m}^2)}{s (\ln \text{ m})}. \quad (13)$$



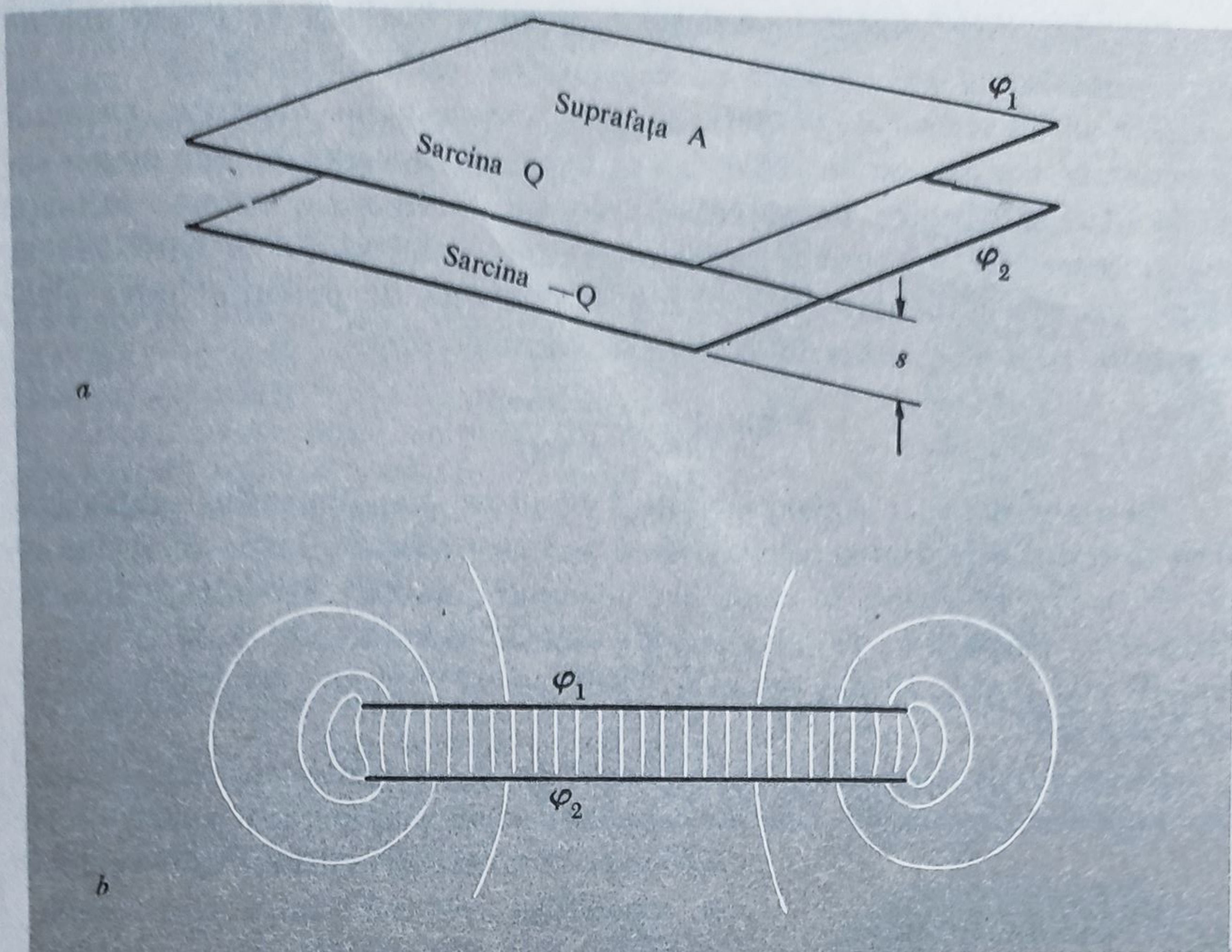


Fig. 3.11. (a) Un condensator plan-parallel. (b) Secțiune transversală prin (a) pe care sînt desenate liniile de cîmp.

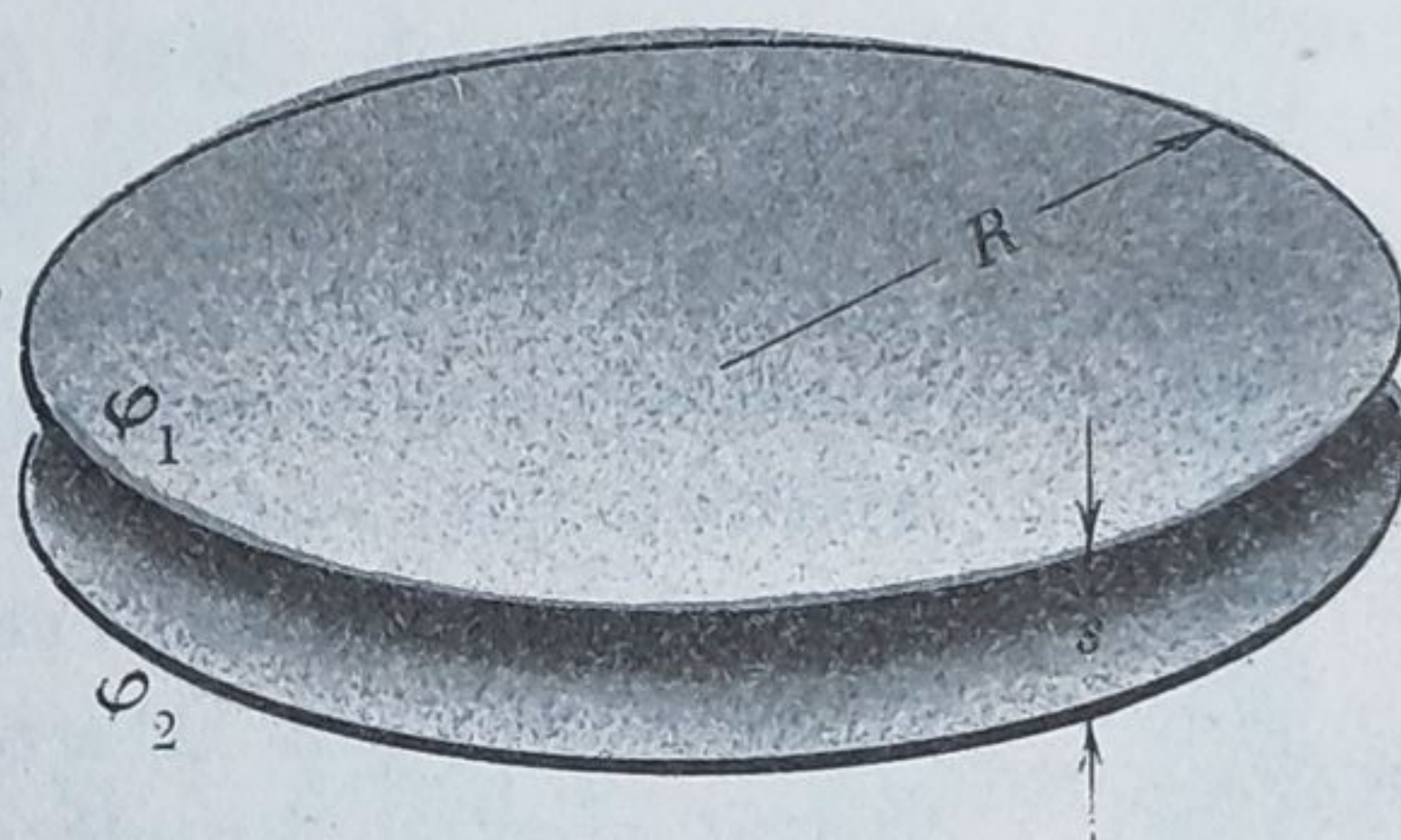


Fig. 3.12. Valoarea reală a capacității condensatorului circular plan paralel este comparată cu valoarea dată de ec. (11), pentru diferite valori ale raportului dintre distanța între plăci și raza plăcii. Corecția, ținînd cont de efectul de margine, poate fi introdusă în expresia lui  $Q$ :

$$Q = \frac{A\epsilon_0(\varphi_1 - \varphi_2)}{s} \cdot f$$

Pentru plăcile circulare, factorul  $f$  depinde de raportul  $s/R$  în modul următor:

$s/R$	$f$
0,2	1,286
0,1	1,167
0,05	1,094
0,02	1,042
0,01	1,023



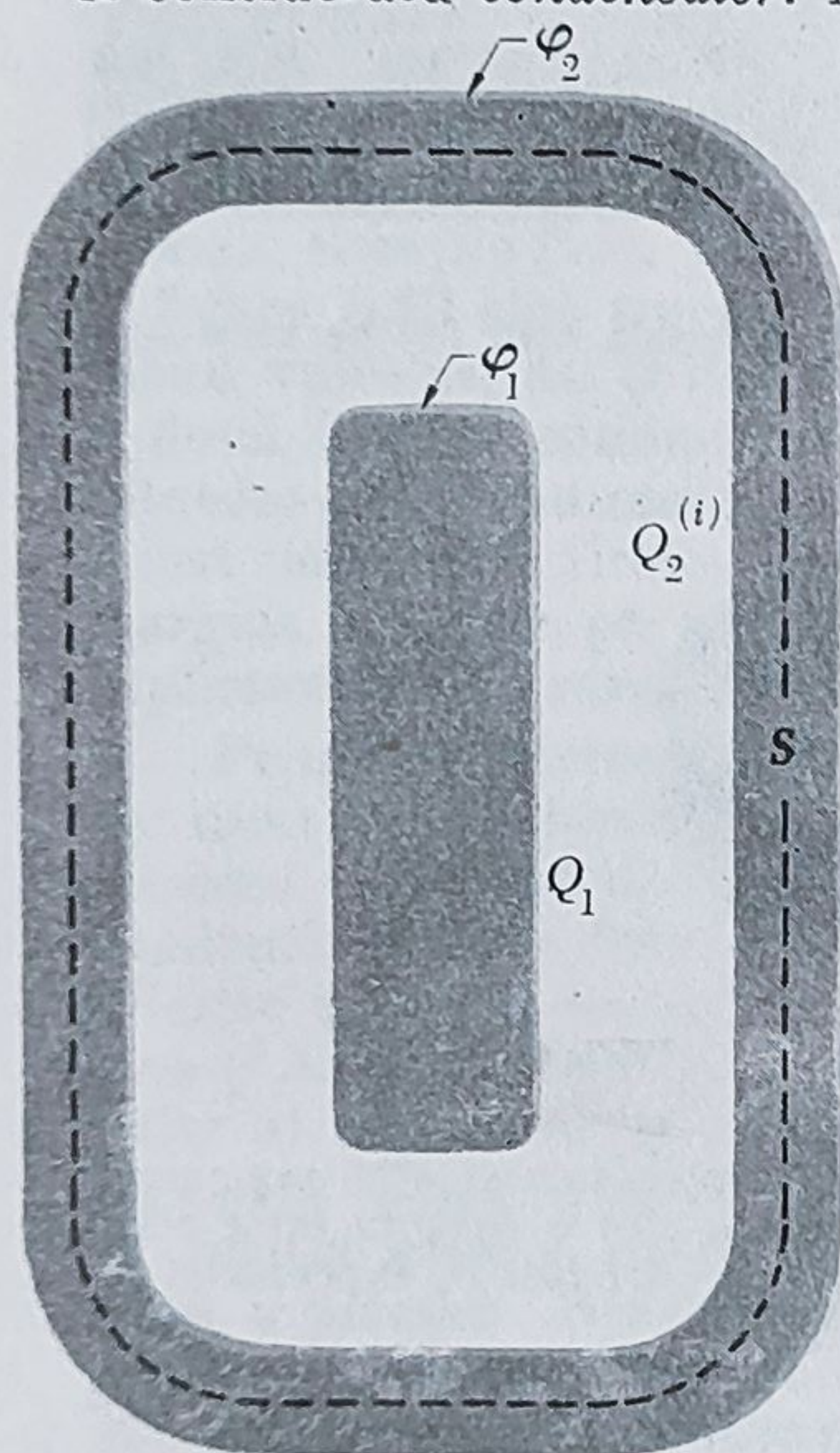
Două plăci cu aria de  $100 \text{ cm}^2$  fiecare, aflate la distanța de  $1 \text{ mm}$  una de alta, formează un condensator cu capacitatea egală cu  $88,33 \text{ pF}$ .

Într-un alt sistem de unități, cu care trebuie să ne obișnuim, sistemul „practic” de unități, sarcina electrică se exprimă în coulombi, sau amper-secundă (A.s) și unitatea de potențial este voltul. În acest sistem, unitatea pentru capacitate, reprezintă capacitatea unui condensator la care sarcina de pe una din plăci este un coulomb și diferența de potențial între plăci este egală cu  $1 \text{ volt}$ . Această unitate se numește *farad*.

$$1 \text{ farad} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ volt}}.$$

Un condensator cu capacitatea de  $1 \text{ farad}$  ar avea dimensiuni gigantice. Pentru ca distanța dintre plăci să fie  $1 \text{ mm}$ , suprafața plăcilor ar trebui să fie  $100 \text{ km}^2$ .\* Deoarece, în acest caz sistemul „practic” de unități duce la dimensiuni nepractice, se folosește, de obicei, *microfaradul* ( $\mu\text{F}$ ) și *micro-microfaradul* ( $\mu\mu\text{F}$ ). Ultima unitate, egală cu  $10^{-12}$  farazi, se mai numește *pico-farad* (pF).

Orice pereche de conductori, indiferent de forma și dispunerea lor, poate fi considerată *condensator*. Am ales condensatorul plan-parallel pentru că se



întâlnește frecvent și calculul aproximativ al capacității sale este mult mai simplu. În figura 3.13 sînt arătați doi conductori, dintre care unul se află în interiorul celui-lalt. Această dispunere poate fi numită, de asemenea, condensator. Din punct de vedere practic, conductorul din interior trebuie prins cumva, dar această chestiune nu ne privește. Pentru a transporta sarcinile electrice de pe un conductor pe celălalt, sînt necesare fire, care ele însele constituie conductori. Întrucît firul conductor 1, ce pleacă de la corpul din interior, intersectează neapărat spațiul dintre conductori, apare o oarecare perturbare a cîmpului electric în acest spațiu. Pentru a micșora efectul,

Fig. 3.13. Condensator, în care unul dintre conductori este înconjurat de celălalt.

\* Există, desigur, posibilități de a realiza condensatori mai compacți, cu o capacitate mare! Puteți cumpăra oricînd un condensator cu capacitate de  $1 \text{ microfarad}$ , pe care-l puteți transporta ușor. În substanțele biologice, pereții celulei constituie un strat electric izolator ce separă interiorul celulei de mediul lichid în care se găsește. Această membrană, din punct de vedere electric, se comportă ca un condensator de  $1 \mu\text{F}$  pe  $\text{cm}^2$  de membrană. Care trebuie să fie „distanța dintre plăci” în acest caz? (În realitate, capacitatea depinde, de asemenea, de constanta dielectrică, adică de polarizabilitatea electrică a mediului dintre plăci. Această chestiune se va discuta în cap. 9.)



putem presupune firul extrem de subțire sau că am îndepărtat firele înainte de a determina potențialele.

În acest sistem distingem trei sarcini:  $Q_1$  — sarcina totală pe conductorul interior,  $Q_2^{(i)}$  — sarcina de pe suprafața interioară a conductorului exterior,  $Q_2^{(e)}$  — sarcina de pe suprafața exterioară a conductorului din exterior. În primul rând observăm că  $Q_2^{(i)}$  este egal cu  $-Q_1$ . Noi știm acest lucru, deoarece suprafața  $S$  din figura 3.13 cuprinde numai aceste două sarcini, iar fluxul prin această suprafață este nul. Fluxul este zero, deoarece pe suprafața  $S$ , așezată ca în figură — în interiorul conductorului, câmpul electric este egal cu zero.

Evident, în spațiul dintre cei doi conductori, mărimea lui  $Q_1$  va determina în mod univoc câmpul electric și diferența de potențial  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Din această cauză, dacă aceste două corpuri le considerăm ca „plăci” ale condensatorului, pentru determinarea capacității ne trebuie doar sarcina  $Q_1$  sau sarcina egală cu ea  $Q_2^{(i)}$ . Capacitatea este egală cu

$$C = \frac{Q_1}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (14)$$

În acest caz, sarcina  $Q_2^{(e)}$  de care depinde potențialul  $\varphi_2$ , nu joacă nici un rol. De fapt, când un conductor este înconjurat (închis) de altul, capacitatea este independentă de sarcinile externe. Dacă am avea două plăci asimetrice de condensator, ca în figura 3.14, întrebarea: care din sarcini joacă rolul lui  $Q_1$  — cu ajutorul căreia determinăm capacitatea? — ne-ar pune în încurcătură. Răspunsul este următorul: este acea sarcină care trebuie transportată de la conductorul 1 pe conductorul 2 (suma sarcinilor de pe cei doi conductori fiind astfel menținută constantă) pentru a egala potențialele lor.

### 3.6. POTENȚIALE ȘI SARCINI PE DIFERIȚI CONDUCTORI

Am atins doar o parte dintr-o problemă mult mai generală și anume, relațiile dintre sarcinile și potențialele unui număr oarecare de conductori într-o configurație dată. Condensatorul format din doi conductori este doar un caz particular. Vă surprinde, poate, că s-ar putea scoate ceva util din cazul general. De fapt, tot ce putem scoate este *teorema unicității* și *principiul de superpoziție*. Să considerăm trei conductori înconjurați de o pătură conductoare ca în figura 3.15. Potențialul acestei pături îl putem alege nul; pentru o stare oarecare a sistemului, potențialele celor trei conductori sînt  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  și  $\varphi_3$ . Teorema unicității ne garantează că fiind date  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  și  $\varphi_3$ , câmpul electric este determinat în tot sistemul. Rezultă că și sarcinile  $Q_1$ ,  $Q_2$  și  $Q_3$  pe fiecare din conductori sînt, de asemenea, determinate în mod univoc.



Fig. 3.14. Un condensator asimetric.



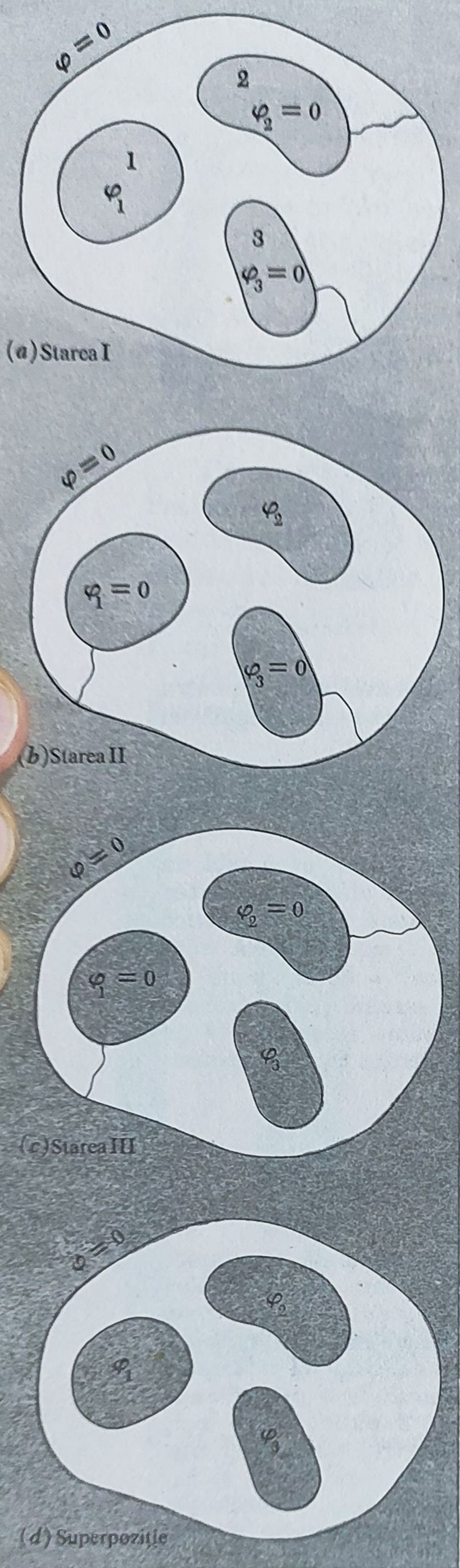


Fig. 3.15. Starea generală a acestui sistem poate fi studiată ca o *suprapunere* (d) de trei stări (a—c), în fiecare din ele toți conductorii, în afară de unul, aflându-se la potențialul zero.

Nu trebuie să ținem cont de sarcina de pe fața interioară a stratului înconjurător, întrucât ea este întotdeauna egală cu  $-(Q_1 + Q_2 + Q_3)$ . Dacă vrem, putem considera în locul stratului — „infiniul”, extinzându-l fără limită. L-am reprezentat în figură, pentru a urmări mai ușor procesul transferului de sarcină și pentru cazul în care e nevoie să facem unele conexiuni.

Între stările posibile ale acestui sistem există una, în care  $\varphi_2$  și  $\varphi_3$  sînt egale cu zero. Sistemul poate fi adus într-o asemenea stare, legînd conductorii 2 și 3 la stratul înconjurător care are potențialul zero (fig. 3.15, a). Ca și mai înainte, putem presupune firele de legătură atît de subțiri încît sarcinile rămase pe ele sînt neglijabile. De fapt, pe noi nu ne interesează cum aducem sistemul în starea respectivă. Într-o asemenea stare, pe care o vom numi starea I, intensitatea cîmpului electric în întreg sistemul și sarcina pe fiecare conductor, sînt determinate în mod univoc de valoarea lui  $\varphi_1$ . Mai mult decît atît, dacă  $\varphi_1$  se dublează, se dublează și intensitatea cîmpului peste tot și prin urmare și sarcinile  $Q_1$ ,  $Q_2$  și  $Q_3$  se dublează. Astfel, pentru  $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$ , fiecare din cele trei sarcini trebuie să fie proporțională cu  $\varphi_1$ . Să formulăm aceasta matematic:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Starea I} \\ \varphi_2 = \varphi_3 = 0 \end{array} \right\} Q_1 = C_{11}\varphi_1; \quad Q_2 = C_{21}\varphi_1; \quad Q_3 = C_{31}\varphi_1. \quad (15)$$

Cele trei constante  $C_{11}$ ,  $C_{21}$  și  $C_{31}$  depind doar de forma și dispunerea corpurilor conductoare.

Exact în același mod, putem analiza starea în care  $\varphi_1$  și  $\varphi_3$  sînt egale cu zero, numind-o starea II (fig. 3.15, b). Trebuie, din nou, să găsim o relație liniară între singurul potențial diferit de zero,  $\varphi_2$  — în acest caz, și diferitele sarcini:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Starea II} \\ \varphi_1 = \varphi_3 = 0 \end{array} \right\} Q_1 = C_{12}\varphi_2; \quad Q_2 = C_{22}\varphi_2; \quad Q_3 = C_{32}\varphi_2. \quad (16)$$



În fine, cînd  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  sînt egale cu zero, intensitatea cîmpului și sarcinile sînt proporționale cu  $\varphi_3$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Starea III} \\ \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \end{array} \right\} Q_1 = C_{13}\varphi_3; \quad Q_2 = C_{23}\varphi_3; \quad Q_3 = C_{33}\varphi_3. \quad (17)$$

Și suprapunerea stărilor I, II și III este, de asemenea, o stare posibilă. Intensitatea cîmpului electric în orice punct este suma vectorială a intensității cîmpurilor electrice în acest punct în cele trei cazuri studiate, iar sarcina de pe un conductor este suma sarcinilor pe care le avea conductorul în cele trei cazuri. În această nouă stare, nu este nevoie ca vreunul din potențialele  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  și  $\varphi_3$  să fie egal cu zero. Pe scurt, aceasta este cea mai generală stare. Relațiile ce leagă sarcinile și potențialele se obțin, pur și simplu, prin adunarea ecuațiilor (15), (16) și (17).

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + C_{13}\varphi_3 \\ Q_2 &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + C_{23}\varphi_3 \\ Q_3 &= C_{31}\varphi_1 + C_{32}\varphi_2 + C_{33}\varphi_3 \end{aligned} \quad (18)$$

S-ar părea că comportarea electrică a acestui sistem este caracterizată de nouă constante  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ , ...,  $C_{33}$ . De fapt, sînt necesare doar șase constante, putînd demonstra că în orice sistem  $C_{12} = C_{21}$ ,  $C_{13} = C_{31}$  și  $C_{23} = C_{32}$ . Deocamdată nu este evident de ce este așa. În problema 3.27 se sugerează o demonstrație care se bazează pe legea conservării energiei, dar înainte de asta trebuie să parcurgem paragraful 3.7. Constantele  $C$  din ecuațiile (18) se numesc *coeficienți de capacitate*. Evident, demonstrația noastră este valabilă pentru un număr oarecare de conductori. Mărimea fizică determinată ca fiind *capacitatea* condensatorului format din două plăci, nu este aceeași cu  $C_{11}$  (sau  $C_{22}$  sau  $C_{33}$ ) dar, bineînțeles, este legată de ele.

Sistemul de ecuații (18) poate fi rezolvat în funcție de  $\varphi$  pentru sarcinile date  $Q$ . Ne vom folosi de un sistem echivalent de ecuații liniare de forma:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 + P_{13}Q_3 \\ \varphi_2 &= P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 + P_{23}Q_3 \\ \varphi_3 &= P_{31}Q_1 + P_{32}Q_2 + P_{33}Q_3 \end{aligned} \quad (19)$$

Mărimile  $P$  sînt numite *coeficienți de potențial*; ele pot fi calculate cunoscînd coeficienții  $C$  și invers.

Asemenea ecuații pot fi folosite în rezolvarea oricărui sistem fizic *liniar*. Ele se întîlnesc în studiul structurilor mecanice (legînd deformările de solicitări), în analiza circuitelor electrice (leagă tensiunile și curenții), și în general vorbind, în orice caz în care poate fi aplicat principiul superpoziției.

### 3.7. ENERGIA ÎNMAGAZINATĂ ÎNTR-UN CONDENSATOR

Să considerăm un condensator de capacitate  $C$ , avînd diferența de potențial între plăci  $\varphi_{12}$ . Sarcina  $Q$  este egală cu  $C\varphi_{12}$ . Sarcina de pe o placă este  $Q$  și pe cealaltă  $-Q$ . Presupunem că *mărim* sarcina de la  $Q$  la  $Q + dQ$ , transportînd o sarcină pozitivă  $dQ$  de la placa negativă la cea pozitivă și efectuînd un lucru mecanic împotriva diferenței de potențial  $\varphi_{12}$ . Lucrul



mecanic efectuat este  $dW = \varphi_{12}dQ = QdQ/C$ . Prin urmare, pentru a încărca un condensator neîncărcat pînă la o sarcină finală oarecare  $Q_f$  este necesar un lucru mecanic

$$W = \frac{1}{C} \int_{Q=0}^{Q_f} QdQ = \frac{Q_f^2}{2C}. \quad (20)$$

Aceasta reprezintă energia „înmagazinată” într-un condensator. Ea mai poate fi scrisă sub forma

$$U = \frac{1}{2} C \varphi_{12}^2. \quad (21)$$

Capacitatea condensatorului plan-paralel, cu aria plăcii egală cu  $A$  și distanța dintre plăci  $s$ , este  $C = \epsilon_0 A/s$ , iar intensitatea cîmpului electric  $E = \varphi_{12}/s$ . Ca urmare, ecuația (21) se va scrie

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_0 A}{s} \right) (Es)^2 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} As = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \cdot \text{volum}. \quad (22)$$

Această expresie este în concordanță cu formula generală (2.36) pentru energia înmagazinată în cîmpul electric.\*

### 3.8. ALTE ASPECTE ALE PROBLEMEI LA LIMITĂ

Ar fi greșit să credem că nu există metode generale pentru problemele la limită ale lui Laplace. În același timp, nu avem posibilitatea unui studiu amănunțit al acestei probleme în cadrul cursului; vom menționa trei aproximații utile și interesante, cu care vă veți întîlni în studiul fizicii sau matematicii aplicate.

Prima metodă este o metodă elegantă a analizei, numită metoda reprezentărilor conforme, care se bazează pe teoria funcțiilor de variabilă complexă. Din păcate, ea poate fi aplicată numai pentru sistemele bidimensionale. Există sisteme în care  $\varphi$  depinde doar de  $x$  și  $y$ , de exemplu, cazul conductorilor cilindrici a căror suprafețe sînt paralele cu axa  $z$ . În acest caz, ecuația lui Laplace se reduce la

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (23)$$

cu condițiile la limită date pe unele drepte sau curbe din planul  $xy$ . În practică, se întîlnesc multe asemenea sisteme sau asemănătoare cu ele, metoda prezentînd, din acest punct de vedere, interes practic chiar dacă nu prezintă interes matematic. De exemplu, soluția exactă pentru potențialul din apropierea a două plăci lungi paralele se obține ușor prin metoda reprezentărilor conforme. Liniile de cîmp și suprafețele echipotențiale sînt reprezen-

\* Toate acestea se aplică unui „condensator cu aer”, la care între plăcile conductoare se găsește aer. După cum știți din practică, majoritatea condensatorilor utilizați în circuitele electrice au între plăci un izolator sau un „dielectric”. Asemenea condensatori vor fi studiați în capitolul 9.



tate în secțiune transversală în figura 3.16. Desenul ne lămurește de ce în cazul oricărui condensator plan-paralel, a cărui lungime este mare în comparație cu distanța dintre plăci, apare câmpul de margine. Câmpul reprezentat în figura 3.11, *b*, a fost construit pe baza unei asemenea soluții. Veți putea folosi această metodă după ce veți aprofunda studiul funcțiilor de variabilă complexă.

A doua metodă, este o metodă numerică pentru găsirea soluțiilor aproximative ale potențialului electrostatic cu condiții la limită date. Această metodă, deosebit de simplă și aproape universal valabilă, se bazează pe acea proprietate specială a funcțiilor armonice cu care ne-am familiarizat: valoarea funcției într-un punct este egală cu valoarea medie a funcției în regiunea din jurul acestui punct. În această metodă, funcția potențială  $\varphi$  ia valori numai într-un șir discret de puncte, în care sînt incluse și punctele discrete de pe frontieră. Valorile funcției în punctele ce nu se află pe frontieră, se ajustează pînă cînd ele devin egale cu media valorilor învecinate. În principiu, acest lucru se realizează prin rezolvarea simultană a unui mare număr de ecuații, al căror număr este egal cu numărul punctelor interioare. Dar o soluție aproximativă se poate obține mult mai simplu, schimbînd sistematic fiecare valoare, pentru a o apropia de valoarea medie a funcțiilor învecinate și prin repetarea acestui proces pînă cînd variațiile devin neglijabile. Această metodă se numește *metoda relaxării*. Singurul neajuns al acestei metode este procesul greoi de calcul, care se elimină prin folosirea actuală a calculatoarelor rapide, la care această metodă se pretează ideal. O asemenea aplicație o găsiți în problemele 3.29 și 3.30.

A treia metodă de rezolvare aproximativă a problemei la limită este *metoda variațională*. La baza acestei metode stă o idee care se întîlnește în multe capitole ale fizicii, începînd de la dinamica newtoniană pînă la optică și mecanică cuantică. În elec-

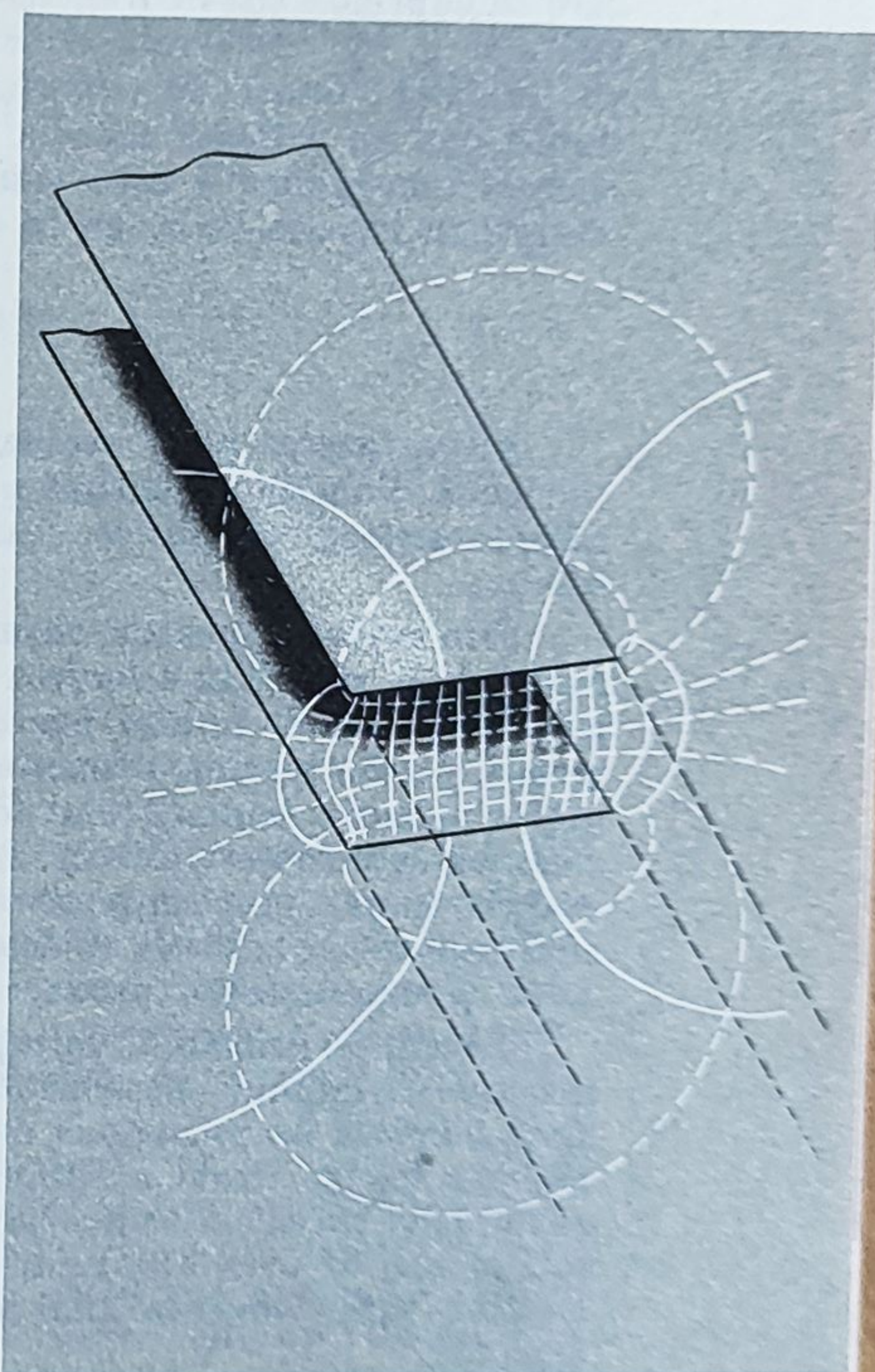


Fig. 3.16. Linii de câmp și suprafețe echipotențiale pentru două benzi conductoare infinite de lungi.



trostatică acest principiu se exprimă în modul următor: cunoaştem că energia totală a câmpului electrostatic este

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dv. \quad (24)$$

Dacă aţi rezolvat problema 2.19, ştiţi că în acest caz foarte simplu, sarcina se distribuie pe frontiera conductoare de potenţial constant (formată din două sfere legate printr-un fir) astfel încît valoarea energiei înmagazinată în tot câmpul să fie *minimă*. Aceasta este o regulă generală. În orice sistem de conductori, pentru valori diferite date ale potenţialelor, sarcina se distribuie pe fiecare din conductori astfel încît valoarea energiei înmagazinate în câmp să devină minimă. Aceasta devine destul de evident, dacă ţinem seama de faptul că orice micşorare a energiei totale este însoţită de efectuarea unui lucru mecanic de redistribuire a sarcinii.\* Suprafaţa plană a apei într-un vas se explică, în principiu, în acelaşi fel.

Să considerăm, acum, funcţia potenţială  $\varphi(x, y, z)$  într-o regiune oarecare ce cuprinde cîteva frontiere cu potenţiale date. Valoarea exactă a funcţiei  $\varphi(x, y, z)$ , adică soluţia ecuaţiei  $\nabla^2 \varphi = 0$  ce satisface potenţialele date pe frontieră, diferă de toate celelalte funcţii care îndeplinesc condiţiile la limită dar nu satisfac ecuaţia lui Laplace, de exemplu  $\psi(x, y, z)$ , întrucît energia înmagazinată este *mai mică* pentru  $\varphi$  decît pentru  $\psi$ . Exprimăm energia în funcţie de  $\varphi$ , ca în ecuaţia (2.38),

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\nabla \varphi|^2 dv. \quad (25)$$

Acum, putem pune problema la limită în alt fel, fără să ne referim la laplacean. Funcţia potenţială  $\varphi$  este acea funcţie care, *dintre toate funcţiile ce satisfac aceleaşi condiţii la limită, înlocuită în ecuaţia integrală (25) dă un minim*.

Prin urmare, metoda obţinerii unei soluţii aproximative a problemei la limită date, constă în a încerca o mulţime de funcţii cu valorile la limită date şi alegerea acelei funcţii pentru care valoarea lui  $U$  este minimă. De asemenea, putem încerca o funcţie cu unul sau doi parametri ajustabili pentru a obţine valoarea minimă a lui  $U$ . Metoda este bună mai ales pentru evaluarea energiei, care deseori, este mărimea necunoscută cea mai importantă. Întrucît energia  $U$  este minimă pentru o valoare exactă a lui  $\varphi$ , ea nu variază sensibil pentru abaterile de la această valoare. Problema 3.32 ilustrează simplitatea şi rigurozitatea metodei variaţionale.

Faptul că principiul variaţional reprezintă o *altă formulare* a legii fundamentale a câmpului electrostatic, prezintă mai mare importanţă pentru noi decît folosirea lui ca metodă de calcul. Este verificat faptul că deseori, reformularea legilor fizicii cu ajutorul principiilor variaţionale este foarte utilă şi nu prea dificilă. Profesorul R.P. Feynman, cunoscut pentru strălucitele sale lucrări în acest domeniu, expune într-un stil intuitiv şi elementar ideile metodei variaţionale în unul din capitolele cărţii „Fizica modernă”, vol. II, cap. 19.

\* Raţionînd în acest mod, înseamnă că distribuţia sarcinii este însoţită de o disipare de energie. Ceea ce se şi întîmplă în mod obişnuit. În caz contrar, sistemul, care iniţial nu se găseşte în stare de echilibru, n-ar putea ajunge în această stare, scăpînd de surplusul de energie. Ce credeţi că s-ar întîmpla în acest caz?



## PROBLEME

**3.1.** Un observator, avînd un dispozitiv pentru măsura intensității cîmpului electric  $E$ , se află la o distanță oarecare de o sarcină punctiformă fixă  $q$ . Sarcina punctiformă se introduce într-un tub metalic scurt neîncărcat, suspendat de un fir izolator. În ce măsură este afectată intensitatea cîmpului electric măsurată de observator? Dacă v-ați găsi în laborator, într-o cutie mare de cupru, ați putea spune ceva despre purtătorii de sarcină ce se mișcă în exteriorul ei?

(Convingeți-vă că înțelegeți toate aspectele acestei probleme.)

**3.2.** Un conductor sferic  $A$  conține două cavități sferice. Sarcina totală pe conductor este nulă. Totuși, în centrul uneia din cavități se află o sarcină punctiformă  $q_b$ , iar în centrul celeilalte — o sarcină  $q_c$ . O altă sarcină  $q_d$  se află la o distanță foarte mare  $r$  de conductor. Ce forță acționează asupra fiecăruia din cele patru obiecte:  $A$ ,  $q_b$ ,  $q_c$ ,  $q_d$ ? Care din răspunsuri este numai aproximativ și valabil pentru  $r$  relativ mare?

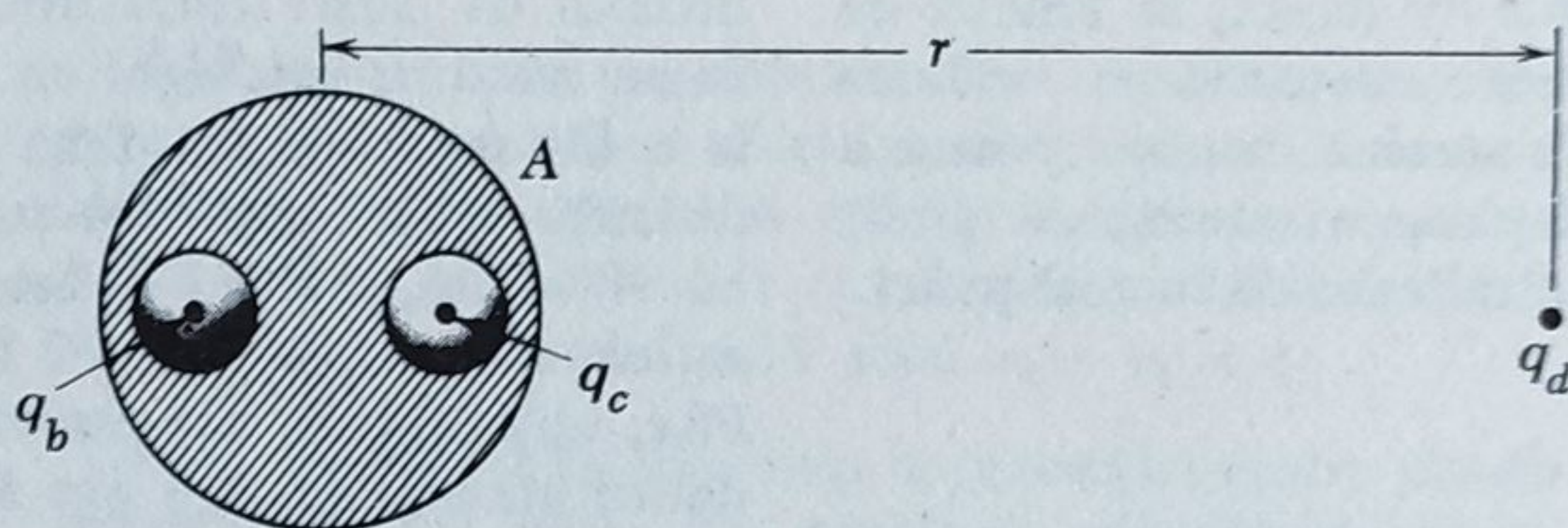


Fig. la problema 3.2.

**3.3.** Presupunem că după atingerea stării din figura 3.1,  $c$ , corpul devine din nou neconductor, lăsînd purtătorii de sarcină „înghețați” la locul lor. După aceasta, straturile încărcate pozitiv și negativ — care au creat cîmpul electric inițial — se îndepărtează. Cum va arăta cîmpul electric din interiorul și exteriorul corpului?

**3.4.** Ecranul gravitațional, ce ar „ecrana” cîmpul gravitațional, la fel cum o foiță metalică „ecranează” cîmpul electric, constituie visul multor inventatori ignoranți și este o ficțiune. Gîndiți-vă la deosebirea dintre sursa gravitațională și sursele electrice. Observați că pereții cutiei din figura 3.6 nu ecranează cîmpul surselor externe, ci permit doar sarcinilor superficiale să creeze un cîmp compensator. De ce nu ne putem imagina ceva asemănător pentru cîmpul gravitațional? De ce am avea nevoie, în acest caz?



## PROBLEME

**3.1.** Un observator, avînd un dispozitiv pentru măsura intensității cîmpului electric  $E$ , se află la o distanță oarecare de o sarcină punctiformă fixă  $q$ . Sarcina punctiformă se introduce într-un tub metalic scurt neîncărcat, suspendat de un fir izolator. În ce măsură este afectată intensitatea cîmpului electric măsurată de observator? Dacă v-ați găsi în laborator, într-o cutie mare de cupru, ați putea spune ceva despre purtătorii de sarcină ce se mișcă în exteriorul ei?

(Convingeți-vă că înțelegeți toate aspectele acestei probleme.)

**3.2.** Un conductor sferic  $A$  conține două cavități sferice. Sarcina totală pe conductor este nulă. Totuși, în centrul uneia din cavități se află o sarcină punctiformă  $q_b$ , iar în centrul celeilalte — o sarcină  $q_c$ . O altă sarcină  $q_d$  se află la o distanță foarte mare  $r$  de conductor. Ce forță acționează asupra fiecăruia din cele patru obiecte:  $A$ ,  $q_b$ ,  $q_c$ ,  $q_d$ ? Care din răspunsuri este numai aproximativ și valabil pentru  $r$  relativ mare?

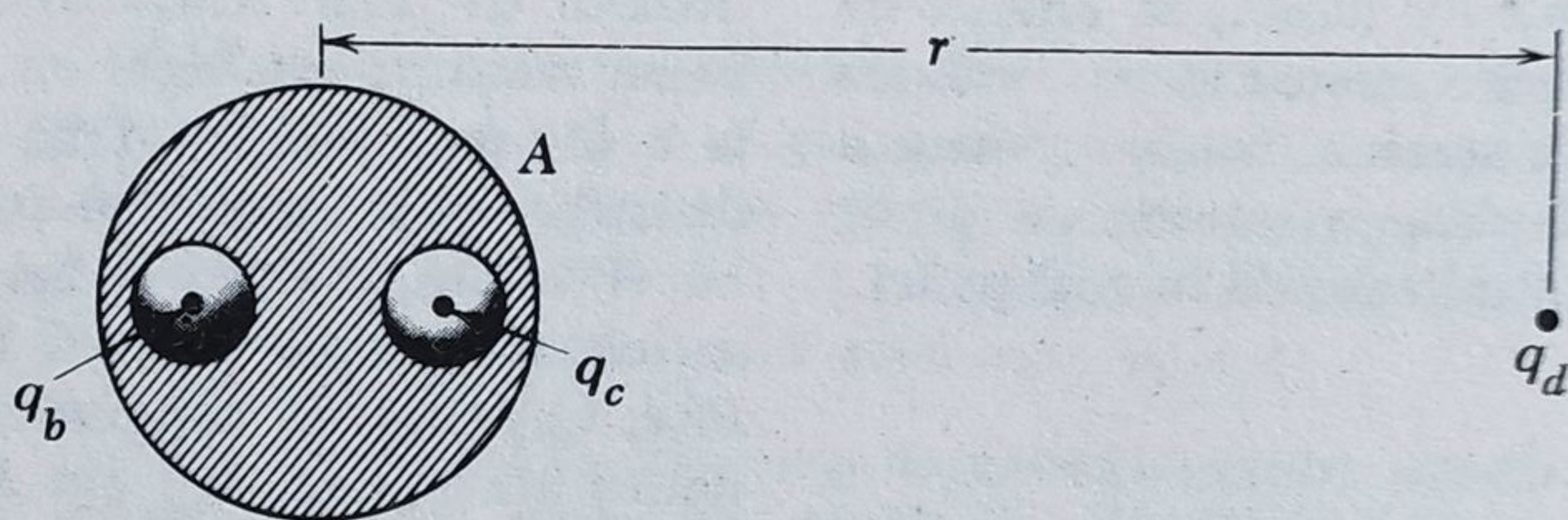


Fig. 1a problema 3.2.

**3.3.** Presupunem că după atingerea stării din figura 3.1,  $c$ , corpul devine din nou neconductor, lăsînd purtătorii de sarcină „înghețați” la locul lor. După aceasta, straturile încărcate pozitiv și negativ — care au creat cîmpul electric inițial — se îndepărtează. Cum va arăta cîmpul electric din interiorul și exteriorul corpului?

**3.4.** Ecranul gravitațional, ce ar „ecrana” cîmpul gravitațional, la fel cum o foiță metalică „ecranează” cîmpul electric, constituie visul multor inventatori ignoranți și este o ficțiune. Gîndiți-vă la deosebirea dintre sursa gravitațională și sursele electrice. Observați că pereții cutiei din figura 3.6 nu ecranează cîmpul surselor externe, ei permit doar sarcinilor superficiale să creeze un cîmp compensator. De ce nu ne putem imagina ceva asemănător pentru cîmpul gravitațional? De ce am avea nevoie, în acest caz?



3.5. În câmpul sarcinii punctiforme de deasupra planului (fig. 3.9), urmărim o linie de câmp, ce pleacă din sarcina punctiformă, în direcție orizontală, paralel cu planul; unde va întâlni suprafața conductorului? (Pentru rezolvare, folosiți legea lui Gauss și o integrare simplă.)

Un sistem construit, pe baza principiului de superpoziție, din conductori punctiformi și plani.

3.6. Rezolvând problema sarcinii punctiforme și a conductorului plan am rezolvat, de fapt, orice problemă legată de ele pe baza principiului superpoziției. Să presupunem, de exemplu, că avem un conductor rectiliniu uniform încărcat cu  $\frac{1}{3} \mu\text{C}$  și care este întins paralel

cu Pământul la înălțimea de 5 m. Care este intensitatea câmpului la suprafața Pământului, imediat sub conductor? Cu ce este egală forța electrică ce acționează pe unitatea de lungime a conductorului? Puteți imagina alte configurații electrostatice simple formate din aceste elemente?

Lucrul mecanic efectuat la deplasarea unei sarcini de pe un conductor. (Indicație: Definiți potențialul electric într-un punct, în funcție de lucrul mecanic pe unitatea de sarcină, necesar pentru a deplasa o sarcină de probă infinitezimală în acel punct.)

3.7. O sarcină  $Q$  se află la înălțimea  $h$  deasupra unui conductor plan ca în figura 3.8, a. Doi studenți trebuiau să răspundă la întrebarea, care este valoarea lucrului mecanic efectuat la deplasarea acestei sarcini la o distanță infinită de plan? Unul din studenți a răspuns că acest lucru mecanic este egal cu cel efectuat pentru a separa la o distanță infinită două sarcini  $Q$  și  $-Q$ , aflate la o distanță egală cu  $2h$  cm una de alta și anume este egal cu  $W = 2\pi\epsilon_0 Q^2/h$ . Al doilea student a calculat forța ce acționează asupra sarcinii în mișcarea sa și a integrat  $Fdx$ , obținând un alt rezultat. Ce rezultat a obținut al doilea student și care din ei are dreptate?

3.8. Trei plăci conductoare sînt dispuse paralel ca în figură. Plăcile din margine sînt legate printr-un fir. Placa din mijloc este izolată și poartă o sarcină egală cu  $3,3 \text{ n C/cm}^2$ . Să se găsească raportul dintre densitatea superficială de sarcină  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$  de pe cele două fețe ale plăcii din mijloc.

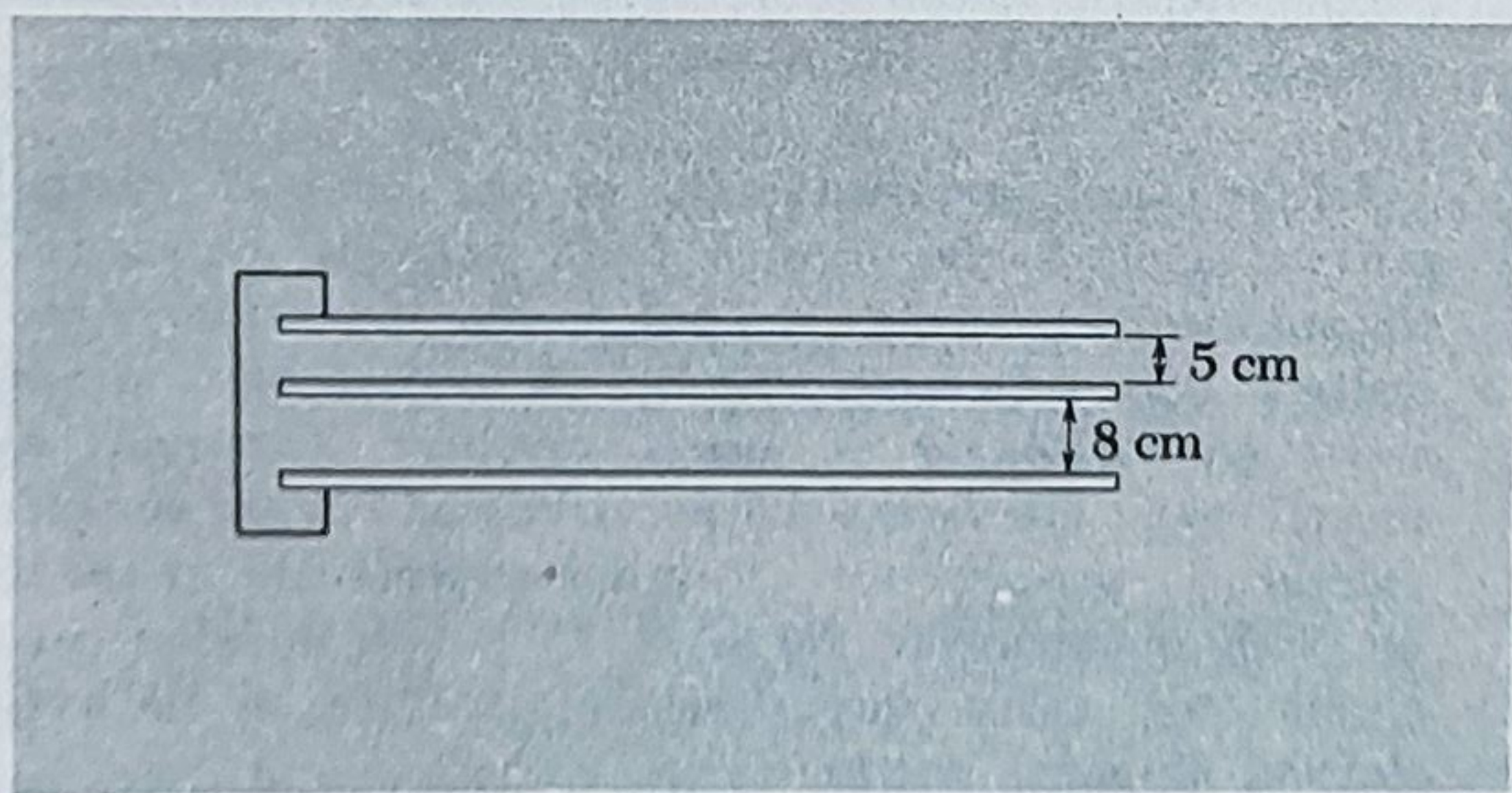


Fig. la problema 3.8



O extindere a „metodei imaginilor“.

Doi condensatori legați în paralel.

Condensatorul sferic.

Energia în câmpul unui condensator sferic.

Capacitatea unei sfere izolate.

O problemă de stabilitate mecanică.

3.9. Dispuneți două sarcini egale  $+q$  și două sarcini egale  $-q$ , fiecare în colțul unui pătrat, astfel încât, sarcinile de același semn să se afle pe diagonală. Să se arate că există două suprafețe echipotențiale care sînt plane. Obțineți și reprezentați calitativ câmpul unei singure sarcini punctiforme, aflată pe bisectoarea unghiului interior, format prin îndoirea unei foițe metalice într-un unghi drept. Ce alte configurații de plane și sarcini punctiforme pot fi rezolvate prin această metodă și care nu? Ce se poate spune despre o sarcină punctiformă aflată pe bisectoarea unghiului diedru de  $120^\circ$  dintre două plane conductoare?

3.10. O piesă metalică subțire este așezată între plăcile unui condensator plan-paralel, paralel cu ele. Cum este influențată capacitatea? Ce se întîmplă dacă piesa este legată printr-un fir de una din plăci?

3.11. Un condensator de  $100 \text{ pF}$  este încărcat pînă la o diferență de potențial de  $100 \text{ V}$ . După deconectarea bateriei de încărcare, condensatorul se leagă în paralel cu un alt condensator. Dacă diferența de potențial finală este de  $30 \text{ V}$ , care este capacitatea celui de-al doilea condensator? Cîtă energie s-a pierdut și ce s-a întîmplat cu ea?

3.12. Care este capacitatea  $C$  a unui condensator format din două plăci sferice concentrice, cu raza interioară  $r_1$  și cea exterioară  $r_2$ ? Verificați-vă, comparînd rezultatul cu cel obținut în cazul unui condensator plan-paralel pentru cazul limită cînd  $r_2 - r_1 \ll r_1$ .

3.13. Notăm cu  $\varphi_{12}$  diferența de potențial dintre plăcile condensatorului sferic din problema precedentă. Găsiți o expresie pentru câmpul electric, în funcție de rază. Calculați energia totală a câmpului,

$$\int (\epsilon_0 E^2 / 2) dv, \text{ și arătați că ea este egală cu } \frac{1}{2} C \varphi_{12}^2.$$

3.14. Prin capacitatea unui conductor singular izolat înțelegem raportul dintre sarcina conductorului și potențialul său, dacă potențialul, la o distanță infinită față de conductor, este zero. Arătați că capacitatea unui conductor sferic este egală cu  $4\pi\epsilon_0 R$  (unde  $R$  este raza sferei). Care este capacitatea Pămîntului exprimată în microfarazi?

3.15. Imaginați-vă că un condensator sferic, ca cel descris în problema 3.12, se rotește ca satelit pe o orbită în jurul Pămîntului. Între pătura sferică interioară și exterioară nu există nici o legătură mecanică. Vidul este perfect și frecarea pe sfera exterioară neglijabilă. Cu alte cuvinte, avem situația unei „căderi libere“ ideale. Presupunem că pe sfera interioară există o sarcină oarecare și este dispusă concentric în raport cu sfera exterioară.



O extindere a „metodei imaginilor“.

3.9. Dispuneți două sarcini egale  $+q$  și două sarcini egale  $-q$ , fiecare în colțul unui pătrat, astfel încât, sarcinile de același semn să se afle pe diagonală. Să se arate că există două suprafețe echipotențiale care sînt plane. Obțineți și reprezentați calitativ cîmpul unei singure sarcini punctiforme, aflată pe bisectoarea unghiului interior, format prin îndoirea unei foițe metalice într-un unghi drept. Ce alte configurații de plane și sarcini punctiforme pot fi rezolvate prin această metodă și care nu? Ce se poate spune despre o sarcină punctiformă aflată pe bisectoarea unghiului diedru de  $120^\circ$  dintre două plane conductoare?

3.10. O piesă metalică subțire este așezată între plăcile unui condensator plan-paralel, paralel cu ele. Cum este influențată capacitatea? Ce se întîmplă dacă piesa este legată printr-un fir de una din plăci?

Doi condensatori legați în paralel.

3.11. Un condensator de  $100 \text{ pF}$  este încărcat pînă la o diferență de potențial de  $100 \text{ V}$ . După deconectarea bateriei de încărcare, condensatorul se leagă în paralel cu un alt condensator. Dacă diferența de potențial finală este de  $30 \text{ V}$ , care este capacitatea celui de-al doilea condensator? Cîtă energie s-a pierdut și ce s-a întîmplat cu ea?

Condensatorul sferic.

3.12. Care este capacitatea  $C$  a unui condensator format din două pături sferice concentrice, cu raza interioară  $r_1$  și cea exterioară  $r_2$ ? Verificați-vă, comparînd rezultatul cu cel obținut în cazul unui condensator plan-paralel pentru cazul limită cînd  $r_2 - r_1 \ll r_1$ .

Energia în cîmpul unui condensator sferic.

3.13. Notăm cu  $\Phi_{12}$  diferența de potențial dintre plăcile condensatorului sferic din problema precedentă. Găsiți o expresie pentru cîmpul electric, în funcție de rază. Calculați energia totală a cîmpului,

$$\int (\epsilon_0 E^2/2) dv, \text{ și arătați că ea este egală cu } \frac{1}{2} C \Phi_{12}^2.$$

Capacitatea unei sfere izolate.

3.14. Prin capacitatea unui conductor singular izolat înțelegem raportul dintre sarcina conductorului și potențialul său, dacă potențialul, la o distanță infinită față de conductor, este zero. Arătați că capacitatea unui conductor sferic este egală cu  $4\pi\epsilon_0 R$  (unde  $R$  este raza sferei). Care este capacitatea Pămîntului exprimată în microfarazi?

O problemă de stabilitate mecanică.

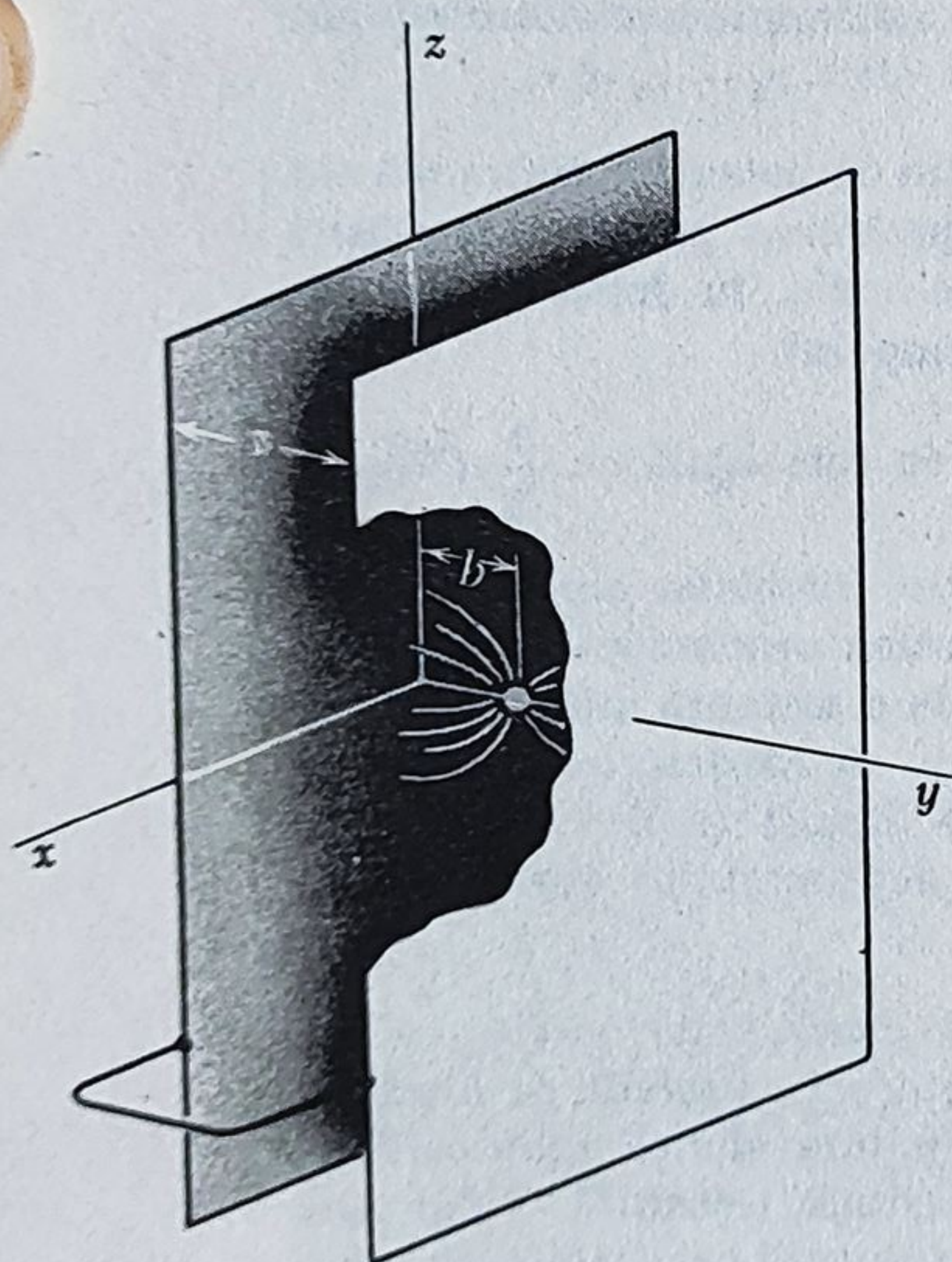
3.15. Imaginați-vă că un condensator sferic, ca cel descris în problema 3.12, se rotește ca satelit pe o orbită în jurul Pămîntului. Între pătura sferică interioară și exterioară nu există nici o legătură mecanică. Vidul este perfect și frecarea pe sfera exterioară neglijabilă. Cu alte cuvinte, avem situația unei „căderi libere“ ideale. Presupunem că pe sfera interioară există o sarcină oarecare și este dispusă concentric în raport cu sfera exterioară.



Este aceasta o stare stabilă? (Determinați cum se schimbă energia sistemului dacă sfera interioară se deplasează din centru. Pentru a stabili semnul acestei schimbări, puteți studia cum variază capacitatea dacă veți *apropia* foarte mult sfera interioară de cea exterioară.)

Forța ce acționează asupra plăcii unui condensator.

Distribuirea sarcinii induse.  
(Rezolvați întâi problema 3.8 sau cel puțin gândiți-vă la ea.)



**3.16.** Calculați forța ce acționează asupra unei plăci a condensatorului plan-paralel. Diferența de potențial dintre plăci este de 3 000 V, iar plăcile reprezintă pătrate cu latura de 20 cm fiind separate de o distanță de 3 cm. Dacă plăcile sînt izolate, astfel încît sarcina nu poate varia, ce lucru mecanic extern este necesar pentru a apropia plăcile? Este acest lucru mecanic egal cu energia înmagazinată inițial în cîmpul electric?

**3.17.** Două plăci paralele sînt legate printr-un fir, astfel încît ajung la același potențial. Una din plăci coincide cu planul  $xz$  și cealaltă cu planul  $y = s$ . Distanța  $s$  dintre plăci este mult mai mică decît dimensiunile plăcii. O sarcină punctiformă  $Q$  se găsește între plăci la distanța  $y = b$  (v. figura). Care este mărimea sarcinii superficiale totale pe suprafața interioară a fiecărei plăci? Sarcina superficială totală pe suprafața interioară a ambelor plăci trebuie, evident, să fie  $-Q$  (de ce?), și putem presupune că cea mai mare parte din această sarcină se va găsi pe placa mai apropiată de sarcină. Dacă sarcina s-ar fi aflat foarte aproape de placa din stînga,  $b \ll s$ , prezența plăcii din dreapta n-ar influența prea mult. Totuși, vrem să știm exact, cum se distribuie sarcina. Dacă încercați să aplicați metoda „imaginii“, vă veți convinge că e nevoie de un șir infinit de imagini, în ambele părți, asemănător cu șirul de imagini pe care-l vedeți în oglinzile de pe ambii pereți ai unei frizerii. Nu este ușor de calculat cîmpul rezultat într-un punct oarecare de pe una din aceste suprafețe. Nu-i mai puțin adevărat că problema care ne interesează poate fi rezolvată printr-un calcul foarte simplu pe baza principiului de superpoziție. (*Indicații:* Rezolvarea problemei va fi mult simplificată datorită următoarelor observații. Adăugarea unei alte sarcini  $Q$  oriunde pe suprafața  $y = b$ , dublează sarcina superficială pe fiecare placă; de fapt, sarcina superficială totală, indusă de un număr oarecare de sarcini de pe acest plan, este independentă de poziția sarcinilor pe plan. Dacă pe această suprafață s-ar găsi un *strat* uniform încărcat, cîmpurile electrice ar fi simple și am putea rezolva problema folosind legea lui Gauss. Porniți de aici).

Fig. la problema 3.17



## Capitolul 4

# Curenți electrici

4.1. Transport de sarcină și densitate de curent	128
4.2. Curenți staționari	130
4.3. Conductibilitatea electrică și legea lui Ohm	132
4.4. „Mecanismul” conductibilității electrice	134
4.5. Când apar abateri de la legea lui Ohm?	139
4.6. Conductibilitatea electrică a metalelor	140
4.7. Rezistența conductorilor	143
4.8. Circuite și elemente de circuit	144
4.9. Disiparea energiei la trecerea curentului	149
4.10. Tensiunea electromotoare și elementul voltaic	150
4.11. Curenți variabili în condensatori și rezistori	154
Probleme	157



#### 4.1. TRANSPORT DE SARCINĂ ȘI DENSITATE DE CURENT

Curentul electric se datorează mișcării purtătorilor de sarcină. Curentul electric dintr-un conductor măsoară\* sarcina ce trece printr-o secțiune oarecare a conductorului în unitatea de timp. Unitatea de curent este amperul, care corespunde sarcinii de un coulomb transportată într-o secundă. Un curent de un amper este echivalent cu  $6,2 \cdot 10^{18}$  electroni pe secundă. Bineînțeles, se ține cont de sarcina totală transportată, luând în considerație semnul. Se poate spune că mișcarea unui corp neutru implică un transport de sarcină uluitor de mare (aproximativ de  $10^5$  coulombi pe gram de substanță!), dar nu există curent deoarece exact același număr de particule elementare pozitive și negative se mișcă cu exact aceeași viteză medie.

În cazul mai general, curentul sau transportul de sarcină este legat de mișcarea purtătorilor de sarcină într-un spațiu tridimensional. Pentru a descrie această mișcare, avem nevoie de noțiunea de *densitate de curent*. Întrucât purtătorii de sarcină sînt particule discrete, lucrăm cu valori medii. Ca și la definirea densității de sarcină  $\rho$ , trebuie să presupunem că ordinul de mărime a distanțelor este de așa natură încît, în orice regiune mică în care mediem, numărul de particule de orice fel conținut în acest domeniu este încă foarte mare.

Să studiem, la început, un caz special în care numărul de particule într-un  $\text{cm}^3$  este în medie  $n$ , toate mișcîndu-se cu aceeași viteză  $u$  și avînd aceeași sarcină  $q$ . Să ne imaginăm o suprafață dreptunghiulară de arie  $a$ , cu o orientare bine determinată în spațiu (fig. 4.1, *a*). Care este numărul de particule ce trece prin suprafață în intervalul de timp  $\Delta t$ ? Numărul respectiv de particule este cuprins într-o prismă oblică (fig. 4.1, *b*), cu aria bazei egală cu  $a$  și lungimea muchiei egală cu  $u \Delta t$  — distanța parcursă de fiecare particulă în timpul  $\Delta t$ . Particulele aflate în afara prismei trec pe lîngă suprafața respectivă sau nu ajung la ea. Volumul prismei este egal cu produsul dintre suprafața bazei și înălțime, sau  $au\Delta t \cos \theta$ , care poate fi scris ca:  $a \cdot u\Delta t$ . Numărul de particule cuprins în acest volum este, în medie,  $na \cdot u\Delta t$ . Prin urmare, *viteza medie* de trecere a sarcinii prin elementul de suprafață, adică curentul prin elementul de suprafață, pe care-l notăm cu  $I(a)$ , este egal cu

$$I(a) = \frac{q(na \cdot u\Delta t)}{\Delta t} = nqa \cdot u. \quad (1)$$

\* De fapt intensitatea curentului (n.t.).

tipur  
sau  
buie  
supra  
parti  
sarcin  
medie  
pe ce  
primă

Mărim  
ecuați  
losind  
adică  
densit  
pe cer

S  
sitatea  
tori de  
se pot  
conduc  
mișcă  
și mări  
valori.  
troni.  
grupe,  
au apr  
loarea  
tronii,  
însu  
număr  
grup și  
Se obți

Mediere  
ec. (4)  
tronilor  
mată si



Presupunem că avem particule de diferite tipuri care diferă prin sarcină, prin viteză sau prin amândouă. Fiecare particulă contribuie în mod diferit la curentul ce trece prin suprafața  $a$ . Să notăm prin indicele  $k$  tipul particulei. Atunci fiecare particulă de tip  $k$  are sarcina  $q_k$ , se mișcă cu viteza  $u_k$  și densitatea medie a acestor particule este de  $n_k$  particule pe centimetru cub. Formal, aceasta se exprimă astfel:

$$I(a) = n_1 q_1 a \cdot u_1 + n_2 q_2 a \cdot u_2 + \dots = a \cdot \sum_k n_k q_k u_k. \quad (2)$$

Mărimea vectorială, care se înmulțește cu  $a$  în ecuația (2), o numim *densitate de curent*  $J$ . Folosind unitățile din sistemul practic de unități, adică coulombul pentru unitatea de sarcină, densitatea de curent va fi exprimată în amperi pe centimetru pătrat:

$$J = \sum_k n_k q_k u_k. \quad (3)$$

Să luăm în considerare contribuția la densitatea de curent a unui anumit tip de purtători de sarcină, electroni — de exemplu, care se pot mișca cu cele mai diferite viteze. Într-un conductor, distribuția vitezelor cu care se mișcă electronii este aproape haotică, direcția și mărimea lor variind într-un interval larg de valori. Să notăm cu  $N_e$  numărul total de electroni. Electronii pot fi împărțiți în mai multe grupe, fiecare din ele conținând electroni care au aproximativ aceeași viteză și direcție. Valoarea *vitezei medii* cu care se mișcă toți electronii, ca orice valoare medie, se calculează însumând pe toate grupele produsul dintre numărul electronilor și viteza lor pentru fiecare grup și împărțind la numărul total de electroni. Se obține astfel,

$$\bar{u} = \frac{1}{N_e} \sum_k n_k u_k. \quad (4)$$

Medierea se face după o distribuție, comparînd ec. (4) cu (3); observăm că contribuția electronilor la densitatea de curent poate fi exprimată simplu cu ajutorul vitezei medii a elec-

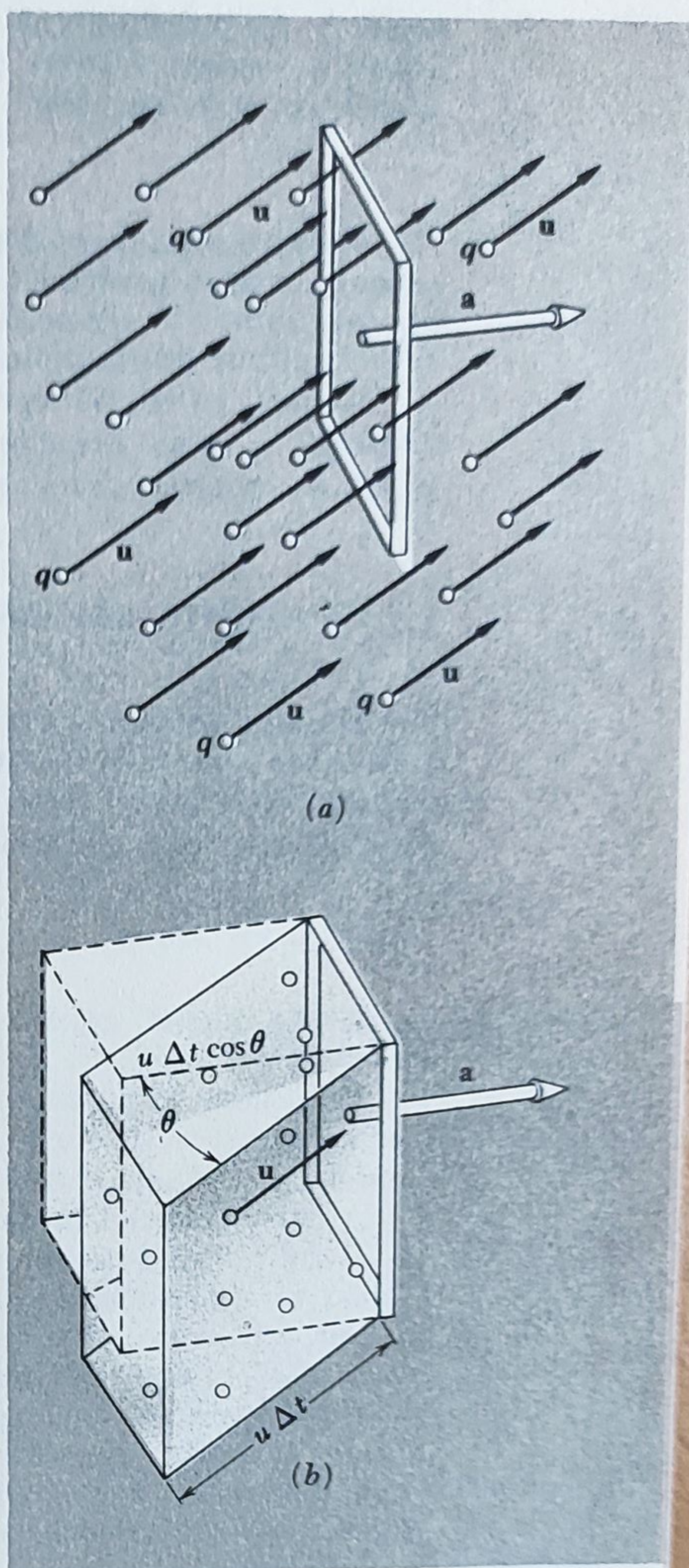


Fig. 4.1. Un fascicul de particule încărcate toate mișcându-se cu aceeași viteză  $u$ . Aria elementului de suprafață este  $a$ . Particulele ce trec prin elementul de suprafață în  $\Delta t$  secunde sînt cuprinse într-o prismă oblică (b). Suprafața bazei prisme este  $a$  și înălțimea  $u \Delta t \cos \theta$ , prin urmare volumul ei este  $a u \Delta t \cos \theta$  sau  $a \cdot u \Delta t$ .



tronilor. Amintindu-ne că pentru electroni  $q = -e$ , și folosind indicele  $e$  pentru a preciza că toate mărimile se referă la purtătorii de sarcină de același tip, se poate scrie

$$\mathbf{J}_e = -eN_e\bar{\mathbf{u}}_e. \quad (5)$$

Acest rezultat pare destul de evident, dar am prezentat toate etapele raționamentului, pentru a fi clar că curentul, printr-un element de suprafață, depinde numai de *viteza medie* a purtătorilor, care deseori reprezintă doar o mică fracțiune din mărimea vitezelor lor probabile.

Rețineți că ec. (4) reprezintă o medie vectorială; pentru o distribuție a vitezelor, în care toate direcțiile sînt la fel de probabile, ea este zero, indiferent de valorile vitezelor.

## 4.2. CURENȚI STAȚIONARI

Curentul într-un conductor lung, de exemplu printr-un fir, este bineînțeles egal cu integrala densității de curent  $\mathbf{J}$ , pe suprafața egală cu secțiunea transversală a firului. Într-adevăr, curentul  $I$  ce trece printr-o suprafață  $S$  oarecare este egal cu integrala de suprafață

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}. \quad (6)$$

$I$  este „fluxul” asociat vectorului  $\mathbf{J}$ ; denumirea, în acest caz, este fericit aleasă.

Dacă vectorul densitate de curent  $\mathbf{J}$  rămîne constant în timp, avem de-a face cu un sistem de curenți staționari. Curenții staționari satisfac legea conservării sarcinii. Să considerăm o regiune oarecare din spațiu, delimitată de o suprafață sferică  $S$ . Integrala de suprafață din  $\mathbf{J}$ , pe toată suprafața  $S$ , dă viteza cu care sarcinile părăsesc volumul delimitat de suprafața  $S$ . Ea va fi pozitivă dacă purtătorii de sarcini pozitive ies din volum, sau dacă purtătorii de sarcini negative intră în volumul respectiv ș.a.m.d. Dacă sarcinile continuă să se scurgă la infinit, mai devreme sau mai tîrziu volumul se va goli de sarcini — dacă nu se creează sarcini noi, lucru care nu se poate întîmpla. Rezultă că pentru o distribuție a curenților independentă de timp, integrala de suprafață din  $\mathbf{J}$  pe orice suprafață închisă trebuie să fie egală cu zero. Aceasta este echivalentă cu afirmația că în orice punct din spațiu

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \text{ (distribuție de sarcini independentă de timp)}. \quad (7)$$

Pentru a demonstra că ele sînt echivalente, să ne amintim teorema lui Gauss și definiția divergenței cu ajutorul integralei de suprafață pe o suprafață mică ce cuprinde punctul studiat.

Se poate face o afirmație mai generală decît ecuația (7). Presupunem că curentul nu este staționar,  $\mathbf{J}$  fiind funcție și de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  și de  $t$ . Atunci, întrucît  $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$  este viteza instantanee cu care sarcina părăsește volumul



închis, iar  $\int_V \rho dv$  — este sarcina totală din interiorul volumului în orice moment,

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dv. \quad (8)$$

Micșorînd volumul din jurul unui punct oarecare  $(x, y, z)$ , ec. (8) devine\*:

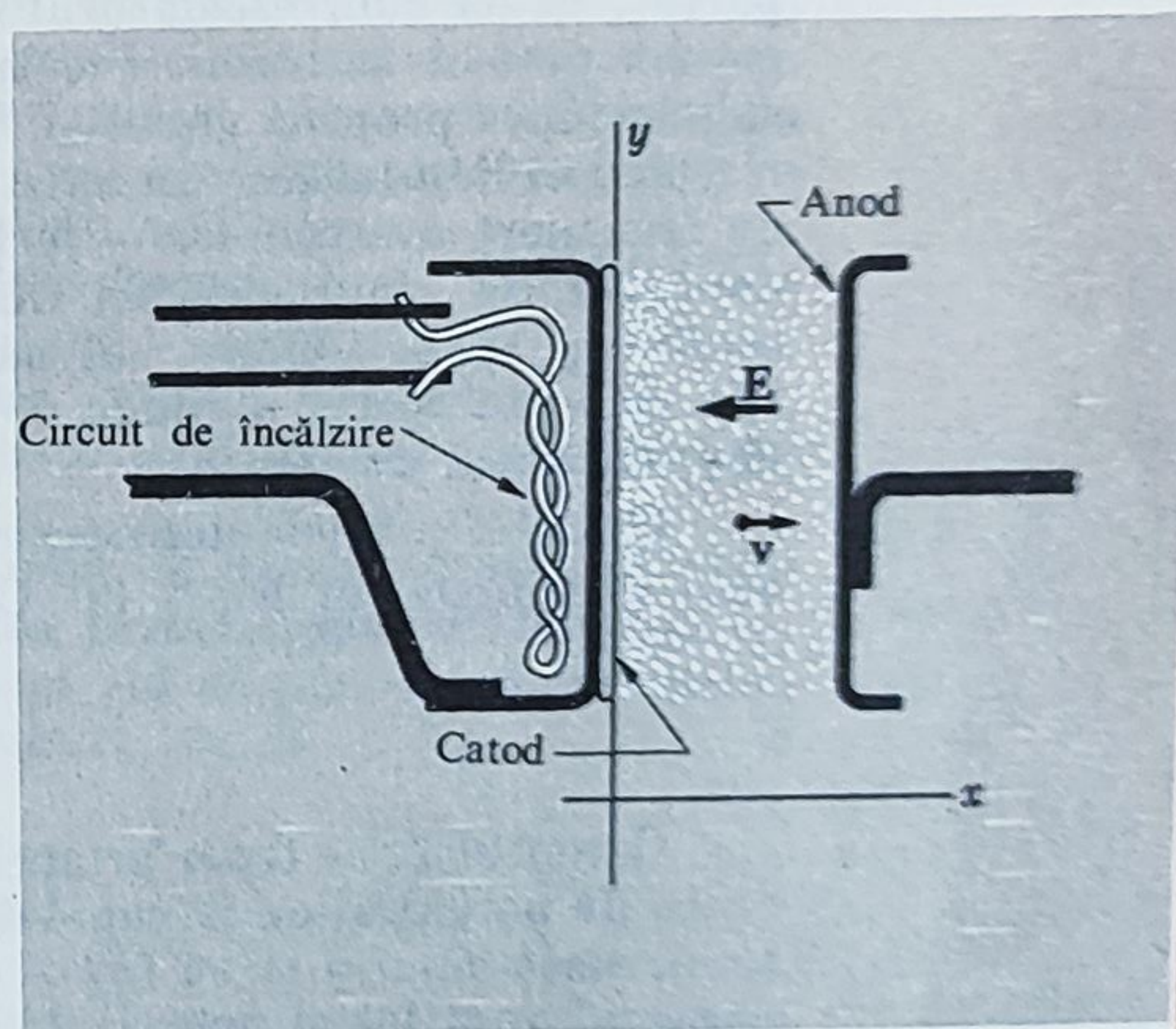
$$\text{div } \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{distribuție de sarcină independentă de timp}) \quad (9)$$

Derivata densității de sarcină  $\rho$  în raport cu timpul se scrie ca o derivată parțială întrucît  $\rho$  este, de obicei, funcție și de coordonatele de poziție și de timp. Ecuațiile (8) și (9) exprimă *conservarea sarcinii*; nici o sarcină nu se poate scurge dintr-un loc fără ca sarcina în acest loc să scadă.

Un exemplu instructiv a unei distribuții staționare de curent este cea dintr-o diodă plană a unei lămpi cu doi electrozi. Unul din electrozi, catodul, este acoperit cu un material cu emisie electronică mare cînd este încălzit. Celălalt electrod, anodul, este pur și simplu o plăcuță metalică. Cu ajutorul unei baterii, anodul este menținut la un potențial pozitiv față de catod. Electronii ies din acest catod fierbinte cu viteze foarte mici, dar sînt accelerați spre anodul pozitiv de către cîmpul electric dintre catod și anod. În spațiul dintre catod și anod curentul electric este format din acești electroni în mișcare. Circuitul exterior este închis prin curentul de electroni din conductorii, sau prin mișcarea ionilor în baterie ș.a.m.d. — dar asta nu ne interesează. În această diodă, densitatea locală de sarcină  $\rho$ , în orice regiune a spațiului, este pur și simplu —  $ne$ ,  $n$  reprezentînd densitatea locală a electronilor, exprimată în electroni/cm<sup>3</sup>. Densitatea locală de curent  $\mathbf{J}$  este, bineînțeles,  $\rho \mathbf{v}$  unde  $\mathbf{v}$  este viteza electronilor din acea regiune. În cazul diodei plan-paralele, se poate presupune că  $\mathbf{J}$  nu are componentele  $y$  și  $z$  (fig. 4.2).

Dacă condițiile sînt staționare, rezultă că  $J_x$  nu depinde de  $x$ , deoarece dacă  $\text{div } \mathbf{J} = 0$  — după cum rezultă din ec. (7) — și dacă  $J_y = J_z = 0$ , înseamnă că și  $(\partial J_x / \partial x)$  trebuie să fie zero. Acest lucru este destul de evident: într-un curent

Fig. 4.2. O diodă cu vid cu catodul și anodul plan-paralele.



\* Dacă trecerea de la ecuația (8) la (9) nu vă pare evidentă, revedeți definiția divergenței din cap. 2. Întrucît volumul din jurul punctului se micșorează putem, eventual, scoate pe  $\rho$  înafara integralei de volum din dreapta. Integrala de volum se ia într-un moment bine determinat de timp. Derivata ei în raport cu timpul este determinată de diferența integralelor de volum la  $t$  și  $t + \Delta t$ . Singura diferență dintre ele constă în variația lui  $\rho$ , întrucît contururile volumului rămîn pe loc.



staționar de electroni, care se mișcă numai pe direcția  $x$ , orice suprafață aflată între catod și anod este străbătută de același număr de electroni pe secundă. Rezultă că  $\rho v$  este constant. Observăm, însă, că  $v$  *nu* este constantă; ea variază cu  $x$  deoarece electronii sînt accelerați de cîmp. Deci nici  $\rho$  nu este constant. Într-adevăr, densitatea sarcinilor negative este mare în apropierea catodului și mică în apropierea anodului, la fel cum densitatea mașinilor pe o șosea este mare pe porțiunile unde se circulă cu viteză mică și mică pe porțiunile unde se circulă cu viteză mare.

Curentul într-o diodă poate fi limitat printr-un efect interesant: densitatea sarcinilor negative („sarcina spațială”) poate influența cîmpul electric și prin urmare, accelerația și viteza electronilor, revenind astfel din nou la densitatea de sarcină. Problema 4.25 analizează comportarea unei diode „cu limitarea curentului de către sarcina spațială” și se arată cum poate fi dedusă o relație interesantă între tensiuni și curent care guvernează această comportare. Relația prezintă importanță pentru electronică, nu numai în construcția și utilizarea diodelor, dar și construcția tunurilor electronice pentru tuburile cu raze catodice și alte construcții de acest fel.

### 4.3. CONDUCTIBILITATEA ELECTRICĂ ȘI LEGEA LUI OHM

Există multe posibilități de punere în mișcare a sarcinilor, printre ele numărîndu-se și „transportul” mecanic al purtătorilor de sarcină. În generatorul electrostatic Van de Graaff (v. probl. 4.3), unei benzi izolate i se transmite o sarcină superficială, pe care banda o transportă la un electrod îndepărtat, la fel cum escalatorul ridică oameni. În acest mod, ia naștere un curent perfect sesizabil. Picăturile de apă încărcate din atmosferă, căzînd sub acțiunea propriei greutate, formează o componentă a sistemului de curenți electrici ai Pămîntului. În acest paragraf vom studia un mod mult mai comun de transport a sarcinilor — forța exercitată asupra unui purtător de sarcină de către un cîmp electric. Cîmpul electric pune în mișcare purtătorii de sarcină și, prin urmare, dă naștere unui curent electric. Dacă se întîmplă sau nu acest lucru, depinde de natura fizică a sistemului în care acționează cîmpul, adică de *mediu*.

Una din primele descoperiri în domeniul curenților electrici în substanță este exprimată în legea lui Ohm:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (10)$$

Curentul  $I$ , ce trece printr-un conductor, este proporțional cu  $U$  — diferența de potențial de la capetele conductorului. Pînă acum, am notat potențialul electric cu  $\varphi$  și cu  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  sau  $\varphi_{12}$  — diferența de potențial. În acest paragraf vom folosi notația  $U$  care este mult mai des întîlnită în circuitele electrice. (Am evitat pînă acum folosirea lui  $U$ , mai mult din cauza faptului că e folosit pentru notația mai multor noțiuni diferite).

Pentru o porțiune de conductor menținută la aceeași temperatură, rezistența  $R$  — constanta de proporționalitate din ecuația 10, nu depinde de valoarea curentului ce trece prin el. Rezistența depinde, în mod evident, de lungimea și secțiunea conductorului, fiind proporțională cu lungimea  $l$



și invers proporțională cu aria secțiunii transversale  $A$ . Ea depinde, de asemenea, de materialul din care este confecționat conductorul, și toate acestea se exprimă printr-o formulă simplă:

$$R = \rho \frac{l}{A}. \quad (11)$$

Factorul  $\rho$  se numește rezistența specifică (de volum) sau rezistivitatea substanței. De obicei, rezistența se măsoară în ohmi, intensitatea curentului și diferența de potențial în legea lui Ohm măsurându-se, corespunzător, în amperi și volți. Unitatea de măsură corespunzătoare rezistivității este  $\text{ohm} \cdot \text{m}$ , dacă lungimile se măsoară în metri; de obicei în tabele, figurează această unitate.

Ecuatiile (10) și (11) sînt folosite de ingineri pentru calculul rezistențelor porțiunilor de circuite electrice și a relațiilor dintre tensiune și curent în aceste circuite. Pentru fizician — cu excepția cazurilor în care proiectează aparatura electrică — aceste ecuații reflectă proprietăți remarcabile și generale ale substanței, pe care el încearcă să le pătrundă. Esențialul, reflectat de aceste două ecuații, constă în următoarele: într-un material solid, omogen, densitatea de curent în orice punct este proporțională cu intensitatea cîmpului electric, iar constanta de proporționalitate depinde numai de natura substanței și nu de forma conductorului și anume

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (12)$$

unde  $\sigma$  este o constantă caracteristică substanței date.

În interiorul majorității conductorilor, toate cele trei direcții perpendiculare între ele sînt echivalente din punct de vedere fizic. De exemplu, în cupru, atomii formează o rețea cubică (cub cu fețe centrate). Dar chiar și atunci cînd aranjarea atomilor nu este cubică, ca în cazul unei bucăți de metal care este formată din multe cristale mici orientate oricum, cînd se mediază pe un volum mare toate direcțiile devin echivalente.

În toate substanțele, neexistînd direcții privilegiate,  $\mathbf{J}$  are aceeași direcție cu  $\mathbf{E}$  și constanta  $\sigma$  este un scalar.\* O numim *conductivitate electrică* a materialului. Conductivitatea  $\sigma$  este o mărime inversă a rezistivității  $\rho$ \*\*. Figura 4.3 rezumă aceste relații simple și arată cum rezultă ecuațiile (10) și (11) din ecuația (12).

Cîteva cuvinte despre unități și dimensiuni. Unitatea de măsură obișnuită pentru conductivitate derivă din unitatea practică pentru rezistență — ohmul. După cum știți, ohmul este un volt pe un amper. Conductivitatea este egală cu raportul care în unități practice va fi

$$\frac{\text{densitate de curent}}{\text{intensitatea cîmpului}},$$

$$\frac{\text{A/m}^2}{\text{V/m}} \text{ sau } (\Omega \cdot \text{m})^{-1},$$

\* În general, o relație liniară între doi vectori implică un *tensor*. În cap. 9 vom întîlni un exemplu de tensor. Există o serie de substanțe în care conductivitatea pe diferite direcții este diferită și trebuie tratată ca un tensor, dar noi nu ne vom ocupa de aceste cazuri.

\*\* Literale grecești  $\rho$  și  $\sigma$  sînt folosite, de obicei, pentru rezistivitate și conductivitate, deși ele sînt folosite, de asemenea, pentru densitate de sarcină volumică și densitate superficială de sarcină. Se pare că nu dispunem de prea multe litere!



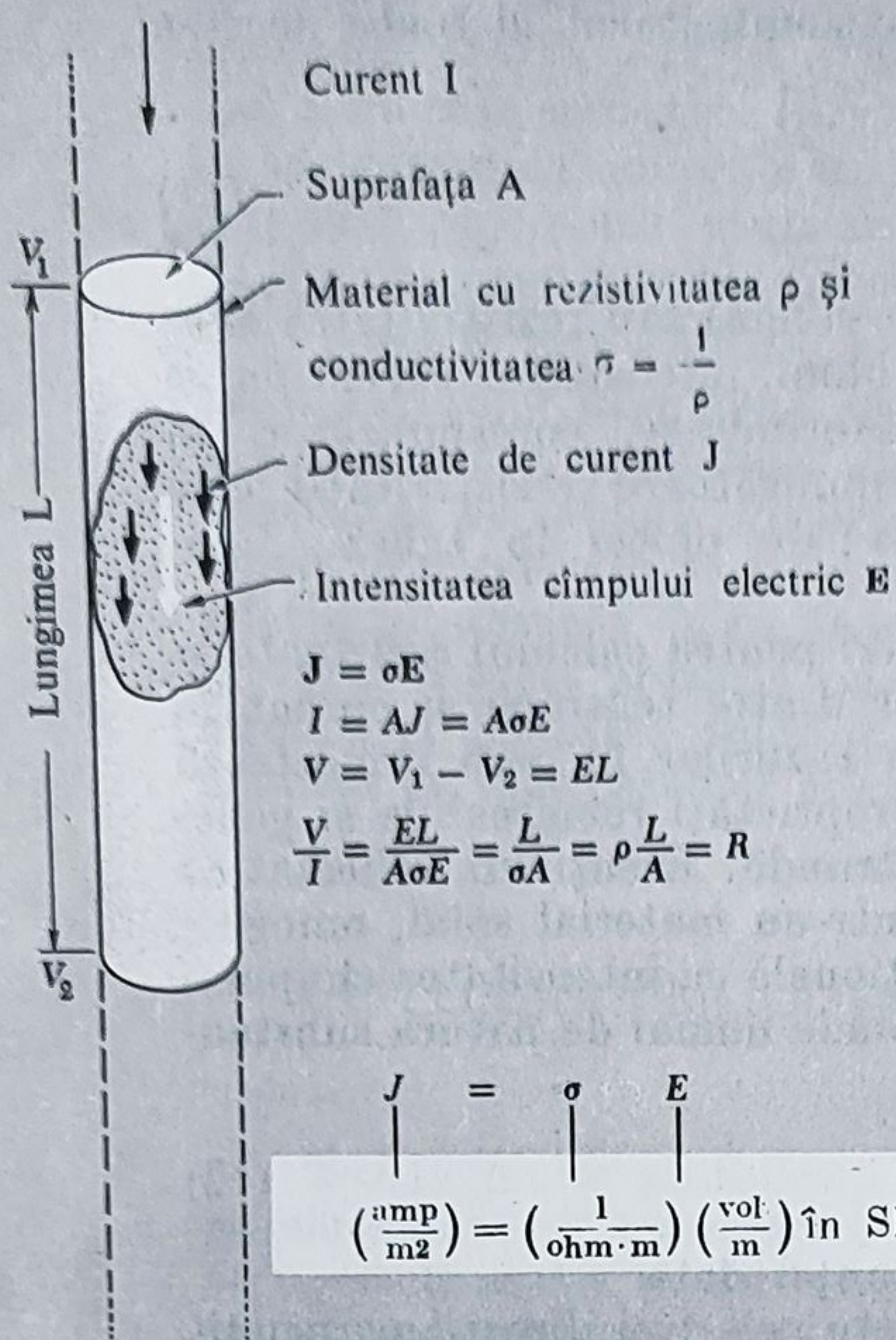


Fig. 4.3. Curgerea curentului printr-un conductor. Relația fundamentală dintre densitatea de curent  $J$  și intensitatea câmpului electric  $E$  implică legea lui Ohm,  $V = IR$ .

citită, deseori, ca „unu pe ohm · metru“. Și mai des, întâlnim inversul conductivității, numit *rezistivitate*. Unitatea practică de măsură este ohm-metru și simbolul  $\rho$ . Rezistivitatea unui bun conductor, la temperatura camerei este, de obicei, de aproximativ  $10^{-8}$  ohm · m. Astfel, cuprul pur, la temperatura camerei, are o rezistivitate de  $1,7 \cdot 10^{-8}$  ohm · m, sau o conductivitate de  $5,8 \cdot 10^7$  (ohm · m) $^{-1}$ . Care sînt dimensiunile rezistivității, de exemplu?

$$\begin{aligned} \text{Rezistivitatea} &= \\ &= \frac{\text{intensitatea câmpului}}{\text{densitatea de curent}} = \\ &= \left( \frac{\text{tensiune}}{\text{lungime}} \right) / \left( \frac{\text{curent}}{\text{lungime}^2} \right) \quad (13) \end{aligned}$$

$$\text{care dă } \frac{\text{tensiune}}{\text{curent}} \cdot \text{lungime} = \text{rezistența} \cdot \text{lungime}$$

#### 4.4. MECANISMUL CONDUCTIBILITĂȚII ELECTRICE

Ecuția (12) este mai mult o descriere a observațiilor făcute asupra comportării celor mai obișnuite substanțe în anumite condiții. N-o putem deduce din legile fundamentale ale câmpului electric. Pentru a-i înțelege semnificația, trebuie să studiem procesele ce au loc într-o anumită substanță cînd i se aplică un câmp electric. Aceste procese pot diferi mult de la substanță la substanță. Ceea ce este remarcabil la legea lui Ohm, este valabilitatea ei pentru varietatea de substanțe și pentru un domeniu larg de variație a intensității câmpului. (În unele cazuri ea este încălcată și chiar trebuie să fie încălcată și vom vedea de ce.) Vom încerca acum să descriem amănunțit procesul conductibilității electrice într-un sistem simplificat, dar destul de tipic pentru o clasă largă de conductori electrice, însă nu pentru toți.

Avem nevoie de purtători de sarcină, prin urmare, să ne imaginăm un mediu format dintr-un număr egal de purtători de sarcină pozitivă și negativă, să spunem,  $N$  din fiecare tip pe centimetru cub. Purtătorii pozitivi sînt ioni de masă  $M_+$  fiecare, purtînd sarcina  $e$ , în timp ce purtătorii negativi sînt ioni negativi de masă  $M_-$  fiecare și cu sarcina  $-e$ . Densitatea de curent  $J$  va fi determinată de vitezele medii ale acestor ioni.



Un câmp electric uniform  $E$ , constant în timp, se aplică acestui sistem, asupra fiecărui purtător de sarcină exercitându-se o forță. Pentru prima oară, întâlnim în acest volum o forță ce acționează asupra unei sarcini aflate în mișcare într-un câmp electric. Problema o vom trata mai atent în cap. 6. De fapt, forța exercitată este aceeași și dacă purtătorul de sarcină ar fi în repaus, acest lucru l-am folosit și în volumul I. Înseamnă că fiecare purtător de sarcină  $q$ , independent de mișcarea sa, se află sub acțiunea unei forțe constante  $qE$ .

Ne oprim aici, pentru a constata cu uimire că legea lui Ohm este totuși valabilă! O forță constantă ce acționează asupra unui purtător de sarcină liber determină o accelerație constantă. Dar densitatea de curent constantă este legată de viteza constantă și nu de accelerația constantă. Dacă în sistemul nostru, legea lui Ohm este într-adevăr valabilă, asta se întâmplă din cauză că viteza medie a purtătorilor noștri de sarcină este proporțională cu forța. Rezultă că purtătorii de sarcină nu se pot mișca liber; există ceva care împiedică mișcarea produsă de câmpul electric.

Nu trebuie să mergem prea departe, pentru a descoperi forțele de frecare ce împiedică mișcarea; ea apare datorită ciocnirii purtătorilor de sarcină între ei și cu oricare alte particule care s-ar afla în mediu.

Cum introducem această forță de frecare depinde de particularitățile modelului ales. Pentru a concretiza, să ne gândim la un gaz format din atomi neutri, ioni pozitivi și ioni negativi, cu valoarea concentrației apropiată de cea în condiții normale, adică în jur de  $10^{19}$  atomi/cm<sup>3</sup> (fig. 4.4). Să presupunem că atomii neutri predomină, ionii pozitivi și negativi fiind răspândiți printre ei. Distanța dintre particule, neutre sau încărcate, este mult mai mare decât raza atomului sau a ionului și ca urmare, în cea mai mare parte din timp, ionii nu se ciocnesc.

În absența câmpului electric, atomii și ionii se mișcă în toate direcțiile, iar vitezele lor sînt determinate de temperatură. Dacă am avea nevoie, teoria cinetică a gazelor ne poate da relația dintre temperatură și energia cinetică medie a unei particule. Dacă am putea observa un anumit ion, la un anumit timp, să spunem  $t = 0$ , am vedea că el se mișcă cu viteza  $u$ . Ce se va întâmpla apoi? Ionul se va mișca rectiliniu, cu viteză constantă, pînă cînd se va apropia de un atom, destul de aproape pentru ca forțele de scurtă distanță să intre în acțiune. În această ciocnire, energia cinetică totală și impulsul total al celor două corpuri se va conserva, dar viteza și direcția de mișcare a ionului se va schimba — poate doar puțin, poate radical — pînă la o valoare  $u'$ . Apoi va avea loc o nouă ciocnire, schimbînd valoarea vitezei la  $u''$ , ș.a.m.d. Se poate întâmpla, de asemenea, ca un alt ion, aflat în apropiere, interacționînd cu ionul nostru prin intermediul forțelor coulombiene de rază mare de acțiune, să-l devieze. Forțele cu rază mare de acțiune sînt importante în cazul inter-

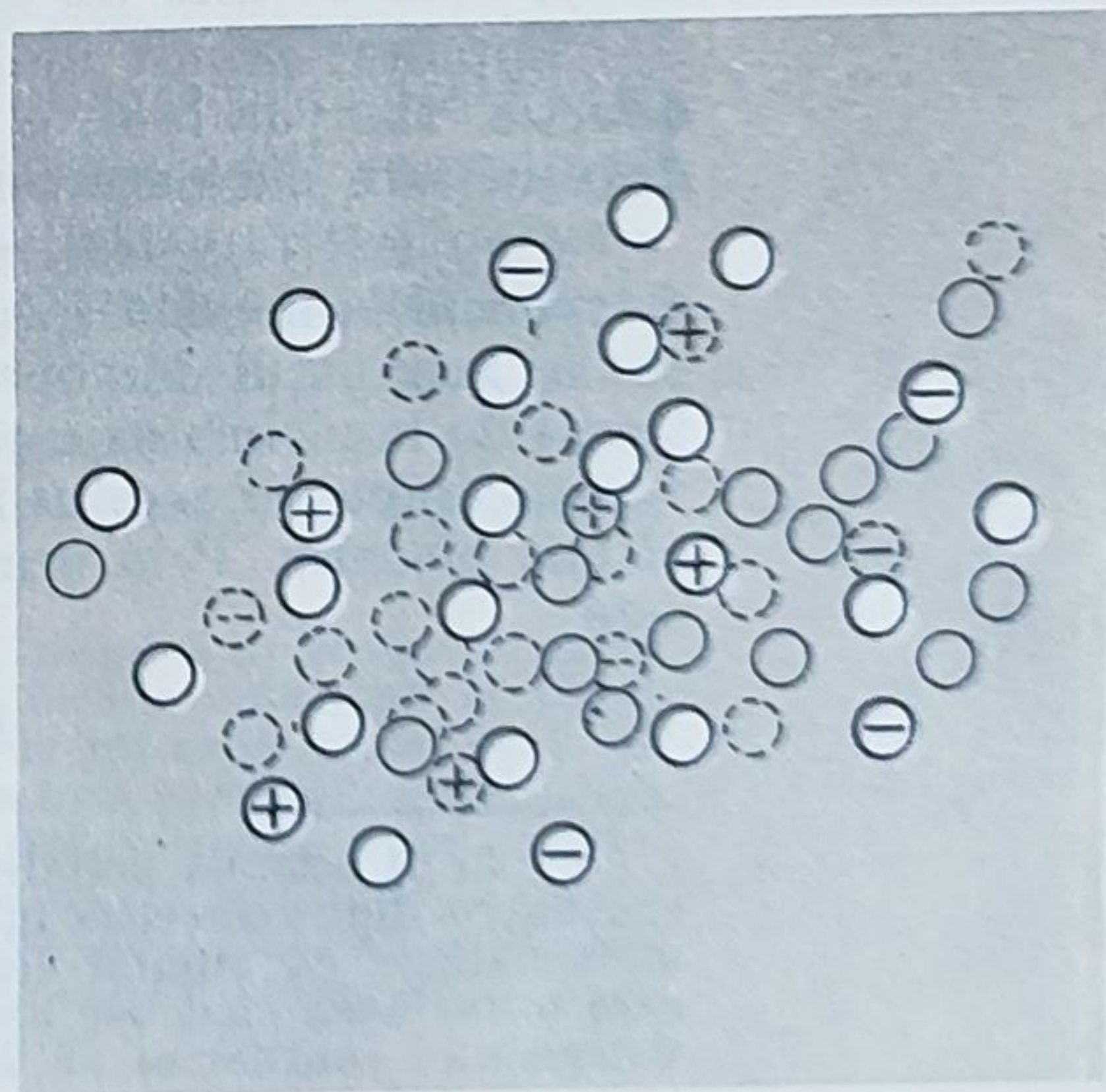


Fig. 4.4. Ioni pozitivi și negativi printre atomi neutri.



acțiunilor dintre ioni; în general, ele determină variații mici ale vitezei, dar efectul final este același.

Efectul final — și aici se află cheia problemei noastre — constă în faptul că orice relație (în mărime sau direcție) între viteza  $u$  a ionului la  $t = 0$  și viteza sa după un interval oarecare de timp, dispare. Asta înseamnă că după un timp oarecare  $t = \tau$ , orice direcție în spațiu a vectorului viteză a ionului, este la fel de probabilă, independent de direcția pe care o avea la momentul  $t = 0$ . Ionul și-a „uitat” direcția inițială. Cu alte cuvinte, dacă se iau 10 000 de ioni care se mișcă pe direcție orizontală spre sud, și dacă timp de  $\tau$  secunde îi urmărim pe fiecare în parte, direcțiile vitezelor lor finale vor fi uniform distribuite după o sferă. În funcție de natura interacțiunii — ce implică variații de impuls mai mari sau mai mici — pentru „uitarea” direcției inițiale, sînt necesare mai multe ciocniri sau doar cîteva.

Cazul limită îl constituie ciocnirea sferelor elastice tari, cînd doar în urma unei singure ciocniri se produce o completă „uitare” a direcției. Nu trebuie să ne îngrijoreze aceste nuanțe. Important este faptul că indiferent de mecanismul ciocnirilor, există un interval de timp  $\tau$ , caracteristic sistemului dat, după care în mare măsură, se pierde orice *corelație* între direcția inițială și finală a vitezei ionului din acest sistem\*. Acest timp caracteristic depinde de ion și de natura vecinilor lui; desigur, el va fi cu atît mai scurt cu cît ciocnirile vor fi mai frecvente, întrucît între ciocniri, cu ionul din gazul considerat, nu se va întîmpla nimic.

Acum, putem aplica sistemului un cîmp electric uniform  $E$ . Pentru simplificare, putem considera că pierderea memoriei asupra direcției are loc într-o singură ciocnire, ca în cazul sferelor tari. Concluziile noastre generale nu depind de această presupunere. Imediat după ciocnire, ionul se va mișca într-o direcție oarecare. Vom nota cu  $u^c$  viteza imediat după ciocnire. Forța electrică  $Ee$  ce acționează asupra ionului va mări continuu impulsul lui. Creșterea de impuls a ionului după timpul  $t$ , va fi  $Eet$  care, pur și simplu, se însumează vectorial cu impulsul inițial  $Mu^c + Eet$ . Dacă impulsul a variat puțin, în comparație cu  $Mu^c$ , înseamnă că viteza n-a variat prea mult și ne putem aștepta să aibă loc o altă ciocnire, după un timp, care va fi cam același cu cel scurs în absența cîmpului. Cu alte cuvinte, timpul mediu dintre ciocniri, pe care-l vom nota cu  $\bar{t}$ , este independent de intensitatea cîmpului  $E$ , dacă aceasta nu este prea mare.

Impulsul primit din partea cîmpului este tot un vector avînd aceeași direcție. Dar, de fapt, el se pierde treptat, întrucît în urma fiecărei ciocniri direcția este oarecare nedepinzînd de cea inițială.

*Care este impulsul mediu al tuturor ionilor pozitivi la un moment dat?* Răspunsul la această întrebare este neașteptat de simplu dacă se presupune că: la momentul dat oprim cronometrul și întrebăm fiecare ion cît timp a trecut de la ultima sa ciocnire. Presupunem că ionul numărul 1 dă timpul  $t_1$ . Atunci, impulsul acestui ion este  $eEt_1$  plus impulsul  $Mu^c$  avut imediat după ultima ciocnire. Prin urmare, impulsul mediu al tuturor ionilor pozitivi  $N$  este

$$M\bar{u}_+ = \frac{1}{N} \sum_j (Mu_j^c + eEt_j) \quad (14)$$

\* Ar fi posibilă definirea exactă a lui  $\tau$  pentru orice sistem cu ajutorul corelației cantitative dintre direcțiile inițiale și finale. Aceasta este o problemă de natură statistică, asemănătoare cu studiul corelației dintre greutatea șobolanilor nou-născuți și cea pe care o vor avea cînd vor ajunge la maturitate. Pentru analiza noastră însă asemenea determinări cantitative nu sînt necesare.



$u_j$  reprezintă viteza ionului  $j$  imediat după ultima sa ciocnire. Întrucât direcția acestor viteze este complet arbitrară, medierea asupra lor dă valoarea zero. Al doilea termen este produsul dintre  $eE$  și timpul mediu  $t_j$ , adică timpul mediu scurs de la ultima ciocnire. Acesta este egal cu timpul scurs pînă la următoarea ciocnire și ambele sînt egale cu timpul mediu scurs între două ciocniri  $\bar{t}$ . Ajungem la concluzia că viteza medie a unui ion pozitiv, într-un câmp constant  $E$  este egală cu:

$$\bar{u}_+ = \frac{Ee\bar{t}_+}{M_+}. \quad (15)$$

Rezultă că viteza medie a unui purtător de sarcină este direct proporțională cu forța aplicată. Este ca și cum mediul ar opune o rezistență proporțională cu viteza. Această rezistență este de aceeași natură cu cea pe care o simțim cînd învîrtim lingurița într-o dulceață bine legată — este o rezistență „viscoasă”. De fiecare dată cînd purtătorii de sarcină au o asemenea comportare, ne putem aștepta la ceva asemănător cu legea lui Ohm.

În ecuația (15) am scris  $\bar{t}_+$ , deoarece timpul mediu dintre ciocnirile ionilor pozitivi și negativi ar putea diferi foarte mult. Direcția vitezei ionilor negativi este opusă și ei fiind purtători de sarcină negativă, contribuția lor la densitatea de curent  $J$  se adaugă la cea a ionilor pozitivi. Dacă considerăm contribuția ambelor tipuri de ioni, ecuația (3.24) se scrie:

$$J = Ne \left( \frac{eE\bar{t}_+}{M_+} \right) - Ne \left( \frac{-eE\bar{t}_-}{M_-} \right) = Ne^2 \left( \frac{\bar{t}_+}{M_+} + \frac{\bar{t}_-}{M_-} \right) E. \quad (16)$$

Conform teoriei noastre, sistemul se supune legii lui Ohm. Într-adevăr, ecuația (16) este o relație liniară între  $E$  și  $J$ , celelalte mărimi fiind constante caracteristice mediului dat. Comparînd ec. (16) cu ec. (12), constanta  $Ne^2 \left( \frac{\bar{t}_+}{M_+} + \frac{\bar{t}_-}{M_-} \right)$  joacă rolul conductivității  $\sigma$  a mediului.

Studiind acest sistem, am făcut o serie de presupuneri cu totul speciale, cu toate acestea, se observă că ele nu sînt esențiale atîta timp cît relația liniară dintre  $E$  și  $J$  se menține. Dacă intensitatea câmpului electric  $E$  nu este prea mare, orice sistem cu o densitate constantă de purtători de sarcină liberi, în care poate avea loc frecvent o „rearanjare” a lor în urma ciocnirilor sau a altor interacțiuni, trebuie să se supună legii lui Ohm. Raportul dintre  $J$  și  $E$ , care reprezintă conductivitatea  $\sigma$  a mediului, este proporțional cu numărul purtătorilor de sarcină și timpul caracteristic  $\tau$  — timpul de pierdere a corelației direcționale. Aceasta este singura mărime care reprezintă toate detaliile complicate ale ciocnirilor în problema noastră. Construirea unei teorii detaliate a conductibilității unui sistem dat, presupunînd că se cunoaște numărul purtătorilor de sarcină, se reduce la construirea unei teorii pentru  $\tau$ .

\* Ați putea crede că timpul mediu scurs între două ciocniri ar putea fi suma dintre timpul mediu scurs de la ultima ciocnire și timpul mediu scurs pînă la următoarea ciocnire. Ar fi așa, dacă ciocnirile ar avea loc la intervale strict egale de timp, ceea ce nu se întîmplă. Ciocnirile sînt evenimente aleatorii independente și oricît ar părea de paradoxal, afirmația de mai sus este valabilă. Mai reflectați asupra acestei chestiuni. Deși problema nu influențează raționamentul nostru, vă îmbogățește cunoștințele de statistică. (Indicație: dacă o ciocnire nu afectează probabilitatea de a avea loc o alta — adică ele sînt independente — atunci, fie că declanșați cronometrul la un moment carecure, fie în momentul unei ciocniri, rezultatul este același.)



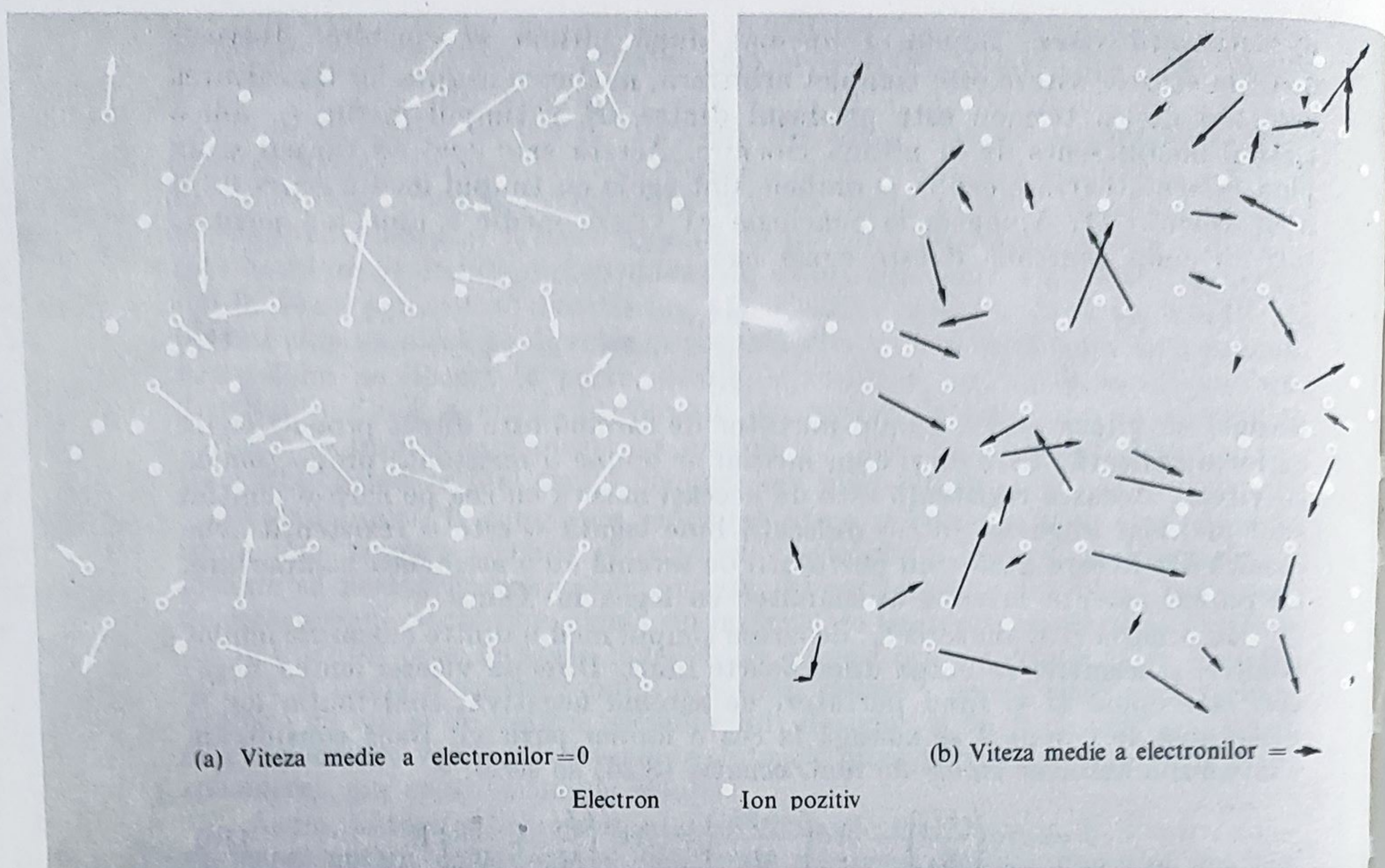


Fig. 4.5. a) O distribuție haotică a electronilor și ionilor pozitivi, fiind cam în același număr fiecare. Vitezele electronilor sînt reprezentate prin vectori și în (a) are o distribuție total haotică. În (b) există o mișcare de antrenare spre dreapta, reprezentată prin vectorul viteză. Acest vector s-a adunat la fiecare vector viteză, așa cum se vede în colțul din stînga, pentru unul din electroni.

În exemplul ales, această mărime a fost înlocuită cu  $\bar{t}$ , obținîndu-se un rezultat perfect determinat pentru conductivitatea  $\sigma$ . Introducînd mărimea  $\tau$ , mult mai generală și admitînd, de asemenea, posibilitatea existenței unui număr diferit de purtători de sarcină pozitivi și negativi, rezultatul obținut poate fi exprimat ca:

$$\sigma \approx e^2 \left[ \frac{N_+ \tau_+}{M_+} + \frac{N_- \tau_-}{M_-} \right]. \quad (17)$$

Semnul  $\approx$  arată că nu l-am definit în mod exact pe  $\tau$ , deși acest lucru poate fi făcut.

Pentru a sublinia faptul că, de obicei, conductibilitatea electrică reprezintă în mică măsură o mișcare de antrenare sistematică ce se suprapune peste mișcarea haotică a purtătorilor de sarcină, în figura 4.5 am reprezentat o mică porțiune a sistemului microscopic despre care am vorbit. Ionii pozitivi sînt reprezentați prin puncte albe, ionii negativi prin cercuri. Presupunem că aceștia din urmă sînt electroni care avînd masă mică sînt mult mai mobili decît ionii pozitivi și ca urmare, mobilitatea ionilor pozitivi este neglijabilă. În figura 4.5, a se vede că particulele, ca și vitezele electronilor sînt distribuite haotic. Pentru desen, în stabilirea poziției și semnului particulei, s-a folosit tabelul numerelor



aleatoare. Pentru vectorii viteză ai electronilor, s-a folosit distribuția maxwelliană a vitezelor moleculare într-un gaz. În figura 4.5, *b*, pozițiile sînt aceleași, dar vitezelor li s-a adăugat o creștere înspre dreapta. În acest fel, figura 4.5, *b* reprezintă o substanță ionizată în care există un curent mediu de sarcini negative de la stînga spre dreapta și corespunzător, un curent al sarcinilor pozitive spre stînga. În figura 4.5, *a*, curentul mediu este nul.

Evident, nu ne putem aștepta ca media vitezelor celor 46 de electroni din figura 4.5, *a* să fie nulă, întrucît ele sînt mărimi independente statistic. Un electron nu influențează comportarea celui alt. De fapt, chiar în absența unui cîmp exterior oarecare, se pot observa fluctuații aleatorii ale curentului electric ca urmare a fluctuațiilor statistice ale sumei vectoriale a vitezelor electronilor. Acest curent fluctuant spontan poate fi măsurat. El constituie sursa „zgomotului” din toate circuitele electrice și deseori este cel care, în ultimă instanță, determină sensibilitatea aparatelor ce înregistrează semnalele electrice slabe. În volumul V al acestui curs se spune mai mult referitor la această problemă.

#### 4.5. CÎND APAR ABATERI DE LA LEGEA LUI OHM

Să vedem acum cînd nu este valabilă legea lui Ohm. Presupunem că cîmpul electric  $E$  este atît de intens încît creșterea vitezei ionului între două ciocniri este comparabilă cu viteza medie de agitație termică. Aceasta influențează puternic timpul mediu dintre două ciocniri  $\bar{t}_+$  sau  $\bar{t}_-$  care apare în ec. 16. Aceste timpuri devin funcții de  $E$ , și nu mai sînt constante și ca urmare, ec. (16) nu mai este liniară. Asta înseamnă că, dacă intensitatea cîmpului electric  $E$  se dublează, densitatea curentului  $J$  nu se dublează dacă  $\bar{t}$  variază. Să vedem cînd apare o asemenea neliniaritate. Modelul ales ne reamintește de un gaz slab ionizat. Într-un gaz de densitate normală, drumul liber mediu al unui ion este de ordinul a  $10^{-8}$  m. Energia cinetică medie a mișcării dezordonate este aproximativ  $kT$ , unde  $k$  este constanta lui Boltzmann ce apare în teoria cinetică a gazelor. Pentru viteză, criteriul ar putea fi următorul: dacă creșterea energiei cinetice a ionului între ciocniri, datorită cîmpului, este comparabilă cu  $kT$ , ne putem aștepta la „neplăceri”. Egalînd aceste două energii:

$$eE \cdot 10^{-8} \text{ m} \approx kT \quad (18)$$

și înlocuind numeric, obținem  $E \approx 24$  kilovolți/cm. Pentru cîmpurile obținute în condiții de laborator acesta este un cîmp de intensitate moderată. Bineînțeles limitele intensității sînt direct dependente de drumul liber. În gazele ionizate aflate la presiuni joase, în care drumul liber mediu este foarte mare, apar abateri de la legea lui Ohm chiar în cîmpuri slabe.

Cîmpurile electrice foarte intense pot duce la schimbări și mai radicale, ca schimbarea numărului de purtători. Asta se și întîmplă în scînteia electrică. Purtătorii de sarcină deja prezenți, primesc de la cîmp atîta energie încît ciocnirile lor cu alți atomi sînt destul de violente, producînd alte ionizări, dînd astfel naștere altor purtători de sarcină. Avalanșa rezultată este o catastrofală abatere de la legea lui Ohm!

Ne putem aștepta la abateri, dacă nu de la legea lui Ohm, în orice caz de la una din părțile teoriei noastre. Să presupunem că cîmpul  $E$  este aplicat doar pentru un interval scurt de timp. Dacă acest interval este comparabil



sau mai mic decât timpul critic, este evident că trebuie să ne revizuiam punctul de vedere. Pentru mai multă claritate, să aplicăm un câmp electric alternativ a cărui perioadă este mai mică decât timpul dintre ciocniri. În acest caz, reacția purtătorilor este, în mare măsură, determinată de inerția lor ca corpuri libere. Pentru această problemă, care este interesantă și pe care s-ar putea s-o întâl- niți, indiferent de natura ei, teoria dezvoltată de noi nu este adecvată. Obser- văm, totuși, că în gazul ales ca exemplu, timpul mediu dintre ciocniri este de aproximativ  $(10^{-8} \text{ m/viteza moleculară})$ , adică de ordinul a  $10^{-10} \text{ s}$  — pentru ionii pozitivi, iar pentru electroni — chiar mai mic. Ca urmare, teoria noastră, chiar dacă a fost prelucrată pentru un câmp constant, trebuie să fie aplicabilă multor sisteme, chiar pentru cele în care câmpul variază foarte rapid.

Un exemplu de abatere de la legea lui Ohm îl constituie dioda vidată, descrisă în paragraful 4.2. În anumite condiții, când emisia electronilor este limitată de către catod, curentul este practic independent de tensiune dacă anodul se află la potențial pozitiv. Dacă anodul se află la potențial negativ, curentul este zero, întrucât anodul nu emite deloc electroni. Dioda lasă să treacă curent doar într-un singur sens. Ea este de obicei folosită ca redre- soare de curent alternativ. În cazul limitării curentului de către sarcina spațială (v. probl. 4.25), curentul în diodă este proporțional cu tensiunea la puterea  $3/2$  și nu la puterea întâia cum cere legea lui Ohm.

Juncțiunea dintre doi *semiconductori* sau dintre un semiconductor și un metal, poate fi în cel mai înalt grad „neohmică” și să prezinte chiar conduc- tibilitate într-un singur sens ca în cazul diodei. Dispozitivele neliniare sînt indispensabile atît în electronică cît și în alte domenii. Dacă legea lui Ohm ar fi general valabilă, tehnica electronică n-ar mai exista.

#### 4.6. CONDUCTIBILITATEA ELECTRICĂ A METALELOR

Dintre toți conductorii cunoscuți metalele sînt cele mai bune. Mecanismul simplu al conductibilității electrice, pe care l-am prezentat, a fost dezvoltat de Drude și alții la sfîrșitul sec. XIX, pentru a explica conductibilitatea metalelor. Lorentz a perfecționat mult teoria în detaliu și în anumite aspecte ea s-a dovedit a fi destul de fructuoasă. Evident că conductibilitatea ridi- cată a metalelor se datorează electronilor liberi, liberi în sensul că nu sînt legați de un atom anume și au posibilitatea să se miște în întreaga rețea cristalină. În acest sens, o dovadă convingătoare a constituit-o absența oricărui transport de substanță chimică într-un circuit metalic prin care trece curentul electric. Din chimia metalelor și teoria cuantică a structurii atomului, rezultă că atomii metalelor pierd ușor unul sau doi electroni din păturile exterioare. Dacă atomul este izolat, electronii sînt legați de acesta, dar cînd mai mulți asemenea atomi sînt foarte apropiați unul de altul în cris- tal, acești electroni devin liberi. În această situație, rețeaua este formată din ionii pozitivi rămași, fiind ordonați într-un anumit fel. „Electronii de conducție” rătăcesc prin această rețea de ioni. Chiar dacă doar un singur electron din atomul metalului ar deveni liber, densitatea purtătorilor de sarcină este imensă în comparație cu substanțele în care ionii sînt produși pe alte căi. Numărul de atomi dintr-un  $\text{m}^3$  de sodiu metalic este  $2,5 \times 10^{28}$ .

După cum am văzut, mobilitatea purtătorului de sarcină este determi- nată în cea mai mare parte de timpul  $\tau$ , după care capătă un impuls bine



determinat, datorită câmpului electric aplicat. Aceasta este valabil pentru orice proces posibil. Dacă presupunem că fiecărui atom de sodiu îi revine un purtător de sarcină și aceștia sînt electroni cu masa  $m_e$ , pentru a calcula pe  $\tau$  avem nevoie doar de coeficientul de conductibilitate al sodiului determinat experimental. Conductivitatea  $\sigma$  a sodiului la temperatura camerei, în unități SI, este de  $2,13 \cdot 10^7 (\Omega \cdot m)^{-1}$ . Neglijînd purtătorii de sarcină pozitivă din ec. (17), obținem:

$$\tau_- = \frac{\sigma m_e}{N_- e^2} = \frac{(2,13 \times 10^7) \times (9 \times 10^{-31})}{(2,5 \times 10^{28}) \times (2,56 \cdot 10^{-28})} \approx 3 \cdot 10^{-14} \text{ s.} \quad (19)$$

Timpul pare surprinzător de mare pentru ca un electron să se miște prin rețeaua cristalină fără să sufere vreo deviere observabilă. Conform teoriei cinetice, viteza termică a unui electron la temperatura camerei este aproximativ de  $10^5$  m/s astfel încît, în  $3 \cdot 10^{-14}$  s electronul parcurge o distanță de 30 Å — mai mare de 10 ori decît constanta rețelei.

De ce este rețeaua ionică atît de transparentă pentru electroni? Ne reamintim, referitor la dimensiuni, că într-o rețea compactă ionii aproape se ating. De asemenea, creșterile și scăderile potențialului electric, de-a lungul drumului străbătut în rețea, depășesc cu mult energia unui electron (în electron-volți) la temperatura camerei. Pe de altă parte, ce determină devierea electronului dacă nu ciocnirea cu un ion? La aceste întrebări cruciale nu se poate răspunde fără cunoașterea proprietăților ondulatorii ale electronului.

În general, înainte de punerea bazelor mecanicii cuantice, comportarea electronilor în metale ridică o serie de paradoxuri inexplicabile. Vom reveni la aceste chestiuni după ce veți acumula cîteva cunoștințe de mecanică cuantică. Deocamdată, folosim faptul că metalele prezintă o conductibilitate electrică deosebită, așa cum au făcut multe generații de fizicieni.

Putem, totuși, reține cîteva aspecte esențiale ale mecanismului de conducție. Curentul de conducție este purtat de electroni; el reprezintă un curent lent, ordonat de purtători (drift) ce se suprapune peste mișcarea mult mai rapidă și haotică a lor. De asemenea, chiar difracția sau devierea electronului de către rețea face ca viteza de drift să fie proporțională cu intensitatea câmpului și ca urmare, intensitatea curentului verifică legea lui Ohm.

Pentru majoritatea metalelor, legea lui Ohm se verifică întocmai pînă la valori ale densităților de curent ce depășesc cu mult valoarea densității ce poate fi menținută un timp mai îndelungat. Pînă acum, nu s-au obținut dovezi experimentale nete ale abaterilor de la legea lui Ohm. Conform unei ipoteze teoretice, pot apărea abateri de 1%, pentru o densitate de curent de  $10^9$  A/cm<sup>2</sup>. Această valoare este de un milion de ori mai mare decît densitatea de curent întîlnită în conductorii obișnuiți din circuitele electrice.

Conductivitatea metalelor pure crește cu scăderea temperaturii. Pe baza teoriei dezvoltate, o asemenea comportare este destul de dificil de explicat. Iar încercarea de a explica orice aspect al conducției în metale pe baza modelului „bilelor de biliard” apare ridicol în cazul fenomenului de supraconductibilitate. Multe metale, la temperaturi joase, prezintă o asemenea conductibilitate, încît rezultă că coeficientul de conductibilitate tinde către infinit! (Și nici măcar o asemenea presupunere nu reflectă îndeajuns comportarea electrică de-a dreptul fantastică a acestor metale).

Graficul din figura 4.6 arată cum variază cu temperatura conductivitatea diferitelor substanțe pure. Scopul este de a pune în evidență cît de diferit se comportă ele în funcție de valorile diferite ale conductivităților. Observați că în abscisă este trecută temperatura și în ordonată conductivitatea, ambele reprezentate în scară logaritmică.



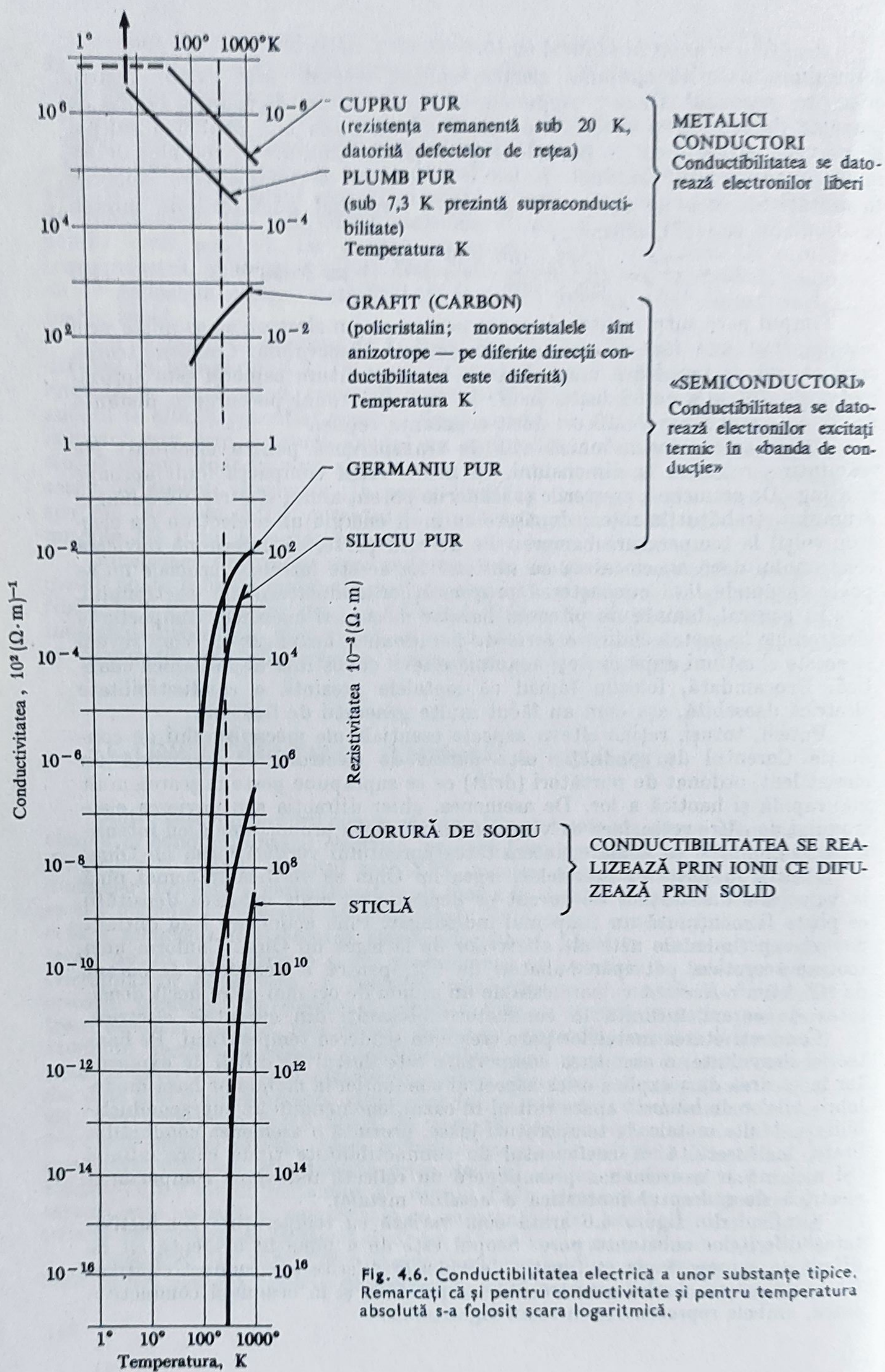


Fig. 4.6. Conductibilitatea electrică a unor substanțe tipice. Remarcați că și pentru conductivitate și pentru temperatura absolută s-a folosit scara logaritmică.



#### 4.7. REZISTENȚA CONDUCTORILOR

Cînd rezistivitatea materialului este dată, calcularea rezistenței  $R$ , a unui conductor uniform, este simplă. Scriem din nou ecuația (11):

$$R = \frac{\text{lungimea} \times \text{rezistivitatea}}{\text{aria secțiunii transversale}}. \quad (20)$$

Rezistența  $R$  are sens numai pentru un curent bine definit. În cazul unui conductor, prin urmare, rezistența are sens. În cazul mai general al distribuției în volum a curentului, nu putem vorbi de rezistență fără a preciza pe unde intră și pe unde iese curentul din sistem. Distribuția în volum a densității de curent, poate fi determinată pe baza relației fundamentale  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ .

Să luăm ca exemplu trecerea curentului prin corpul reprezentat în figura 4.7, *a* și *b*, format din doi cilindri de cupru, spațiul dintre ei fiind umplut cu grafit. Care este rezistența între cele două contacte? Dacă rezistența cilindrilor de cupru pentru curentul longitudinal este foarte mică în comparație cu rezistența grafitului pentru curentul radial, nu are importanță pe unde intră și pe unde iese curentul în cupru (sau unde sînt așezate contactele). În acest caz, putem presupune că fiecare tub de cupru este o suprafață echipotențială. Privind graficul din figura 4.6, observăm că la temperatura camerei, conductivitatea cuprului diferă de cea a grafitului de  $10^3$  ori, prin urmare, ipoteza făcută corespunde realității dacă tuburile de cupru nu sînt prea subțiri. Să presupunem că diferența de potențial dintre electrozii de cupru este  $V_0$ . Pentru a determina cîmpul electric în grafit, ne reamintim că cîmpul dintre doi cilindri încărcăți este proporțional cu  $1/r$ , și punînd  $E = \frac{k}{r}$ , determinăm constanta  $k$  din condiția:

$$V_0 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = k \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = k \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (21)$$

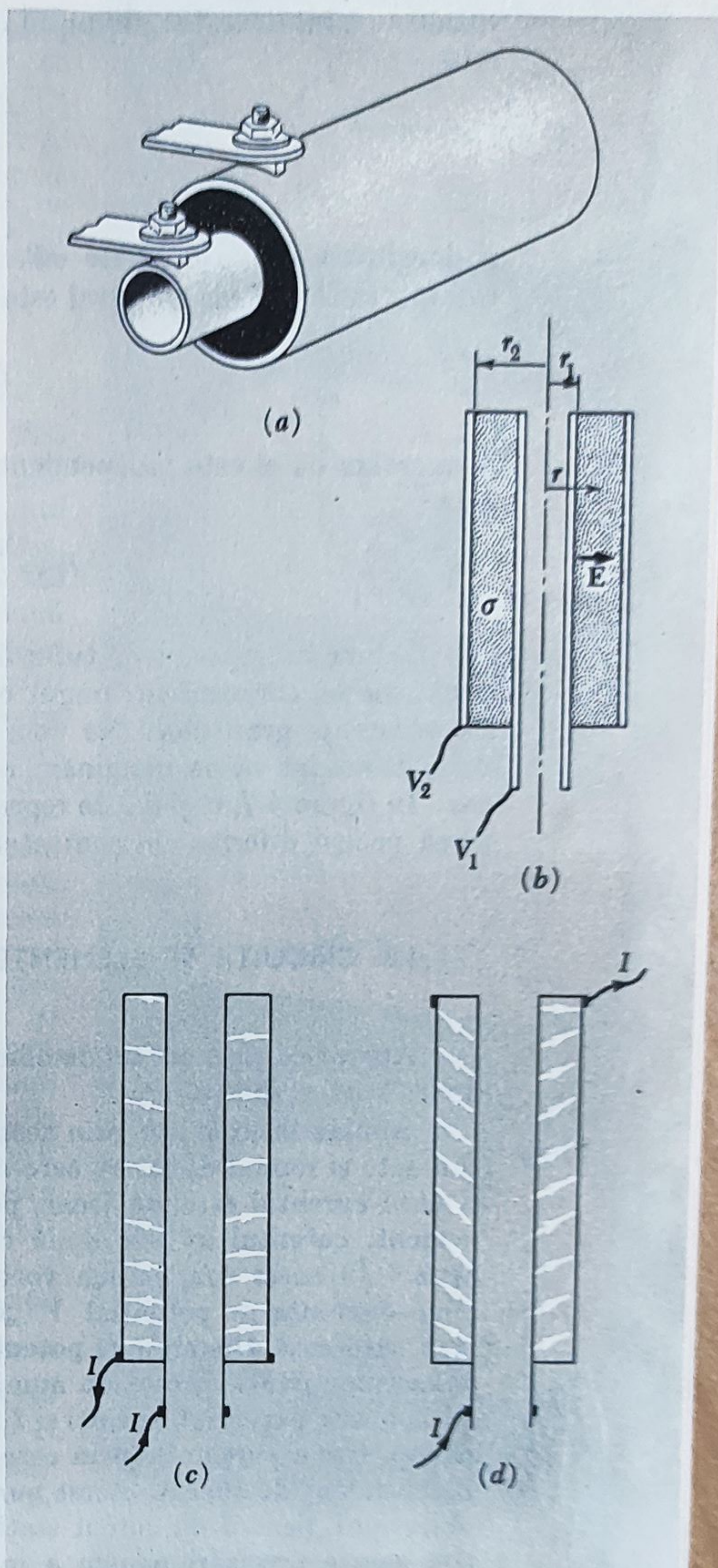


Fig. 4.7. Grafitul umple spațiul dintre cilindrii de cupru (*a*, *b*). Dacă rezistența tuburilor este neglijabilă, curentul trece radial prin grafit. În caz contrar, liniile de curent arată ca în (*c*) și (*d*) pentru două poziții diferite ale contactelor.



Rezultă că intensitatea cîmpului în grafit, pentru o valoare oarecare a razei  $r$  este

$$E = \frac{V_0}{r \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)} \quad (22)$$

și densitatea de curent este  $\sigma E$ . Suprafața totală, pentru această valoare a razei, prin care trece curentul este  $2\pi r L$ , astfel încît curentul total este egal cu

$$I = \frac{2\pi L \sigma V_0}{\ln(r_2/r_1)}. \quad (23)$$

Remarcăm că el este independent de  $r$ , așa cum și trebuie să fie. Rezistența este

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{2\pi L \sigma} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (24)$$

Ce s-ar întîmpla, dacă tuburile de cupru ar fi foarte subțiri și dacă rezistența lor la curentul în lungul cilindrului n-ar fi neglijabilă în comparație cu rezistența grafitului? Nu vom încerca să rezolvăm această problemă, dar este interesant să ne imaginăm cam cum ar arăta liniile de curent în acest caz. În figura 4.7,  $c$  și  $d$  este reprezentată distribuția liniilor de curent pentru două poziții diferite ale contactelor.

#### 4.8. CIRCUITE ȘI ELEMENTE DE CIRCUIT


Aparatele electrice au de obicei contactele, la care se pot conecta conductorii, bine stabilite.

Sarcina intră și iese prin aceste contacte. În particular, dacă există două contacte și numai două, de care sînt legate firele ce duc la un circuit extern și dacă curentul este staționar, potențialele fiind constante peste tot atunci, evident, curentul la cele două contacte (terminale) este același și de sens opus.\* În acest caz, putem vorbi despre un curent  $I$  ce trece prin circuit și de diferența de potențial  $V$  „dintre capete” sau „la capete”, care, de fapt, înseamnă diferența de potențial electric. Raportul  $V/I$  pentru o anumită valoare a curentului este un număr ce reprezintă unități de rezistență (ohmi, dacă  $V$  este exprimat în volți și  $I$  în amperi). Dacă legea lui Ohm este valabilă pentru toate porțiunile prin care trece curentul, acest număr este constant, independent de curent. Acest număr descrie complet comportarea electrică a obiectului, pentru un curent staționar („constant”) între capetele date. Folosim aceste precizări pentru a introduce noțiunea de *element al circuitului*.

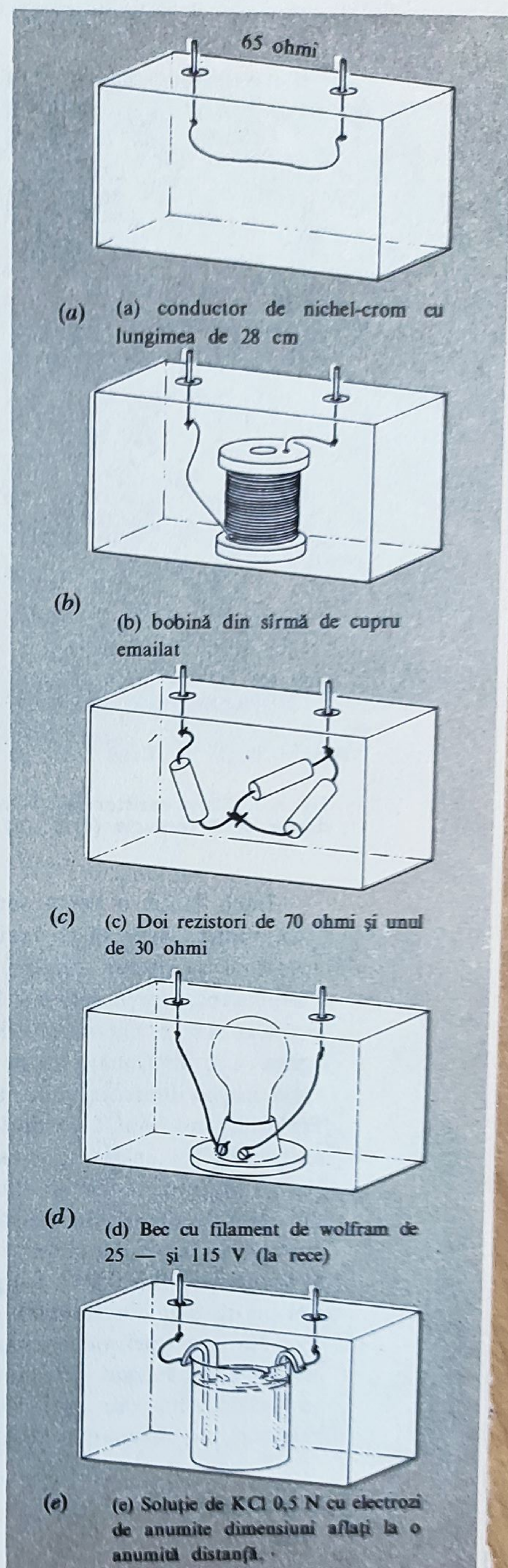
\* Este perfect posibil ca la unul din capete curentul care intră să aibă 4A și prin celălalt capăt curentul care iese să aibă 3A. În acest caz, însă, obiectul acumulează sarcină pozitivă cu viteza de 1 coulomb/s. Înseamnă că potențialul variază foarte rapid și asta nu poate dura mult. Prin urmare, un asemenea curent nu poate fi staționar, adică independent de timp.



Fig. 4.8. Diferite montaje care sînt echivalente pentru un curent continuu ce trece printr-un rezistor de 65 ohmi. a) Un conductor de nichel-crom cu lungimea de 28 cm. b) O bobină din cupru emailat cu firul de 301,4 m lungime și masa de 227 g. c) Doi rezistori de 70 ohmi și unul de 30 ohmi. d) Bec cu filament de wolfram de 25 W și 115 V (la rece); e) Soluție de KCl 0,5 N cu electrozi de anumite dimensiuni aflați la o anumită distanță.

Priviți cele cinci cutii din figura 4.8. Fiecare are două terminale iar în interior se află diferite obiecte. Dacă din fiecare din aceste cutii facem un element de circuit electric, prin legarea unor fire la terminale, raportul dintre diferența de potențial la cele două capete și curentul ce trece prin fire este de 65 ohmi. Spunem că rezistența fiecărei cutii între terminale este de 65 ohmi. Bineînțeles că această afirmație nu poate fi valabilă pentru toate valorile posibile ale curentului sau ale diferenței de potențial. Mărind diferența de potențial sau tensiunea între contacte, pot avea loc diferite schimbări în unele cutii mai devreme decît în celelalte, în urma cărora raportul tensiune/intensitate să se schimbe. Veți ghici, desigur, în care din cutii „neregulile” vor apărea mai devreme. Și totuși, există o anumită limită sub care comportarea tuturor este liniară și în acest domeniu, pentru curenți staționari, toate cutiile sînt identice. Sînt identice în sensul că dacă un circuit oarecare conține una din aceste cutii, indiferent care din cutii ar fi, circuitul se comportă la fel. Cutia este echivalentă cu un rezistor de 65 de ohmi.\* Se reprezintă prin simbolurile  și în circuitul în care unul din elemente este cutia, vom folosi acest simbol. Prin urmare, un circuit electric sau o rețea electrică se formează prin legarea unor asemenea elemente cu ajutorul unor fire de rezistență neglijabilă.

\* Termenul de *rezistor* este folosit pentru obiectul real desemnat special pentru acest scop. De exemplu, „un rezistor bobinat de 200 ohmi, 10 watti” este format dintr-o bobină, aflată pe un suport izolat, înfășurată cu un fir, ale cărei terminale vor fi astfel folosite încît puterea medie disipată să nu depășească 10 watti.





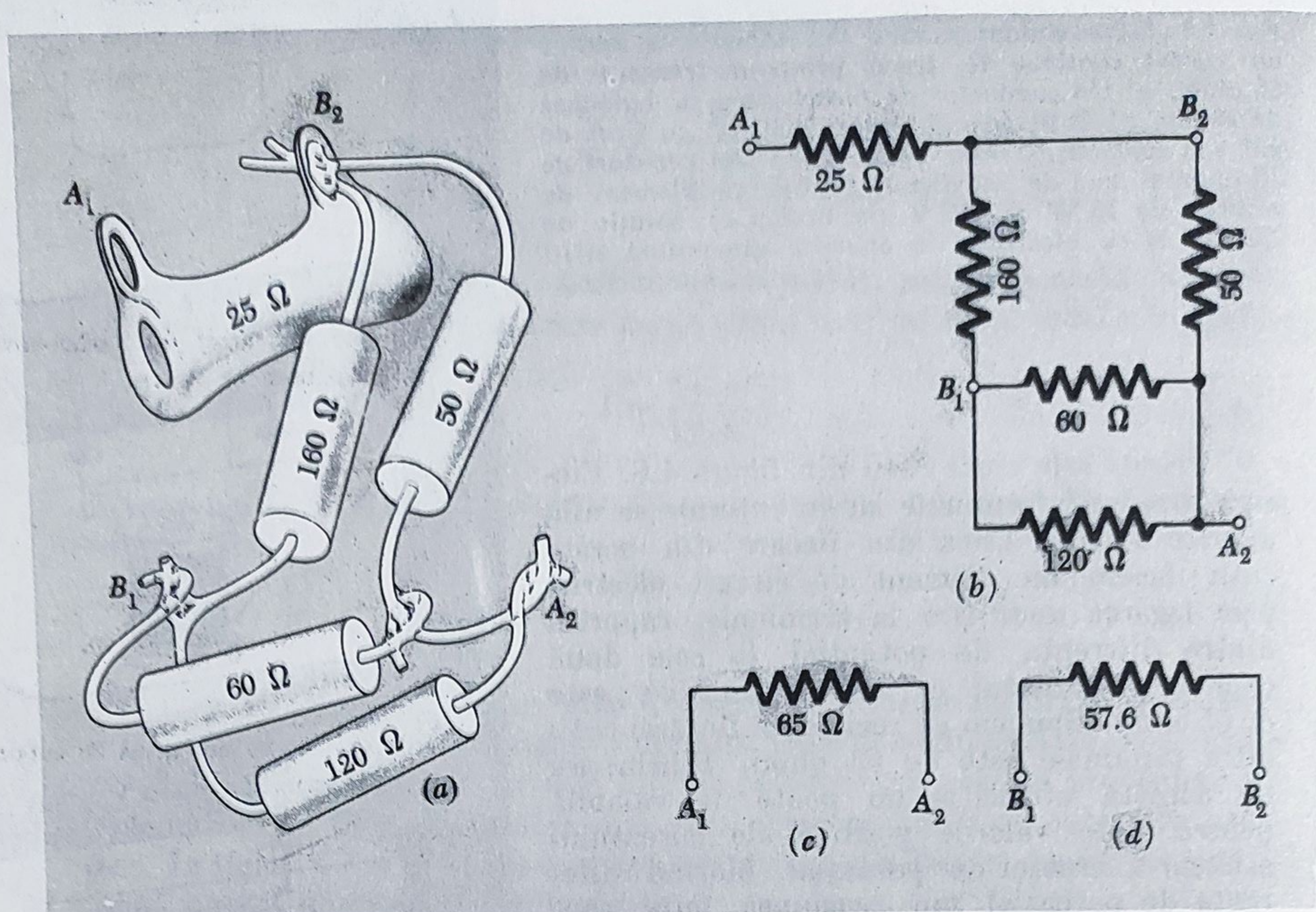


Fig. 4.9. Cîțiva rezistori legați între ei (a), schema circuitului (b) și rezistența echivalentă dintre două contacte (c) și (d).

Dacă luăm o rețea formată din multe asemenea elemente și alegem două puncte care să reprezinte capetele circuitului, putem echivala întregul circuit cu un singur rezistor. Circuitul obiectelor fizice din figura 4.9, a poate fi reprezentat prin schema 4.9, b, iar pentru capetele  $A_1A_2$  circuitul echivalent este 4.9, c. Circuitul echivalent pentru capetele  $B_1B_2$  este reprezentat în figura 4.9, d. Dacă punem totul într-o cutie lăsînd afară numai capetele, cutia nu se deosebește de un rezistor a cărui rezistență este de 57,6 ohmi. Trebuie ținut cont doar de faptul că sînt permise doar măsurătorile de *curent continuu*! Tot ce-am spus este valabil numai pentru curenți și cîmpuri invariabile în timp; dacă nu sînt constanți, comportarea unui element de circuit nu depinde numai de rezistența sa. Noțiunea de circuit echivalent poate fi extinsă de la aceste circuite de curent continuu la sistemele în care curentul și tensiunea variază în timp. În aceste cazuri ea este mult mai utilă. Însă noi nu sîntem deocamdată pregătiți pentru studiul acestui domeniu.

Ne vom opri puțin asupra metodelor de calcul a rezistenței echivalente a unui circuit format din mai multe elemente. Cazurile de grupări în serie și în paralel sînt simple. O combinație ca cea din figura 4.10 reprezintă doi rezistori, de rezistență  $R_1$  și  $R_2$ , legați în serie. Rezistența echivalentă este

$$R = R_1 + R_2 \quad (25)$$



Combinația din figura 4.11 reprezintă doi rezistori legați în paralel. Puteți demonstra singuri că, în acest caz, rezistența echivalentă  $R$  poate fi găsită din relația

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ sau } R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (26)$$

asta este tot ce trebuie să știm pentru a studia o schemă ca cea din figura 4.12, care oricât ar fi de complicată, poate fi redusă treptat la un circuit format din grupări în serie sau în paralel. Cu toate acestea, schema simplă din figura 4.13 nu poate fi astfel redusă, fiind necesară o metodă mai generală. Orice circuit posibil format din rezistori, prin care trece un curent constant, trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

1) Intensitatea curentului ce trece prin fiecare element trebuie să fie egală cu raportul dintre tensiunea elementului și rezistența sa.

2) Într-un *nod* al rețelei — punctul în care se întâlnesc trei sau mai mulți conducători — suma algebrică a intensităților curentilor din nod trebuie să fie nulă. (Aceasta este binecunoscuta lege de conservare a sarcinii — ec. 7 — în limbaj circuitistic.)

3) Suma diferențelor de potențial pe un contur oarecare al circuitului care începe și se termină în același nod este nulă. (În limbaj circuitistic aceasta este proprietatea generală a câmpului electrostatic:  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$  pentru orice contur închis.)

Aceste condiții exprimate algebric, pentru orice circuit, dau exact numărul de ecuații liniare independente necesare pentru obținerea unei singure soluții pentru rezistența echivalentă între două noduri alese. Facem această afirmație fără a o demonstra. Este interesant de remarcat că structura problemei pentru un circuit de curent constant depinde doar de *topologia* circuitului, adică de acele proprietăți ale schemei de legături care sînt independente de distorsiunile liniilor circuitului.

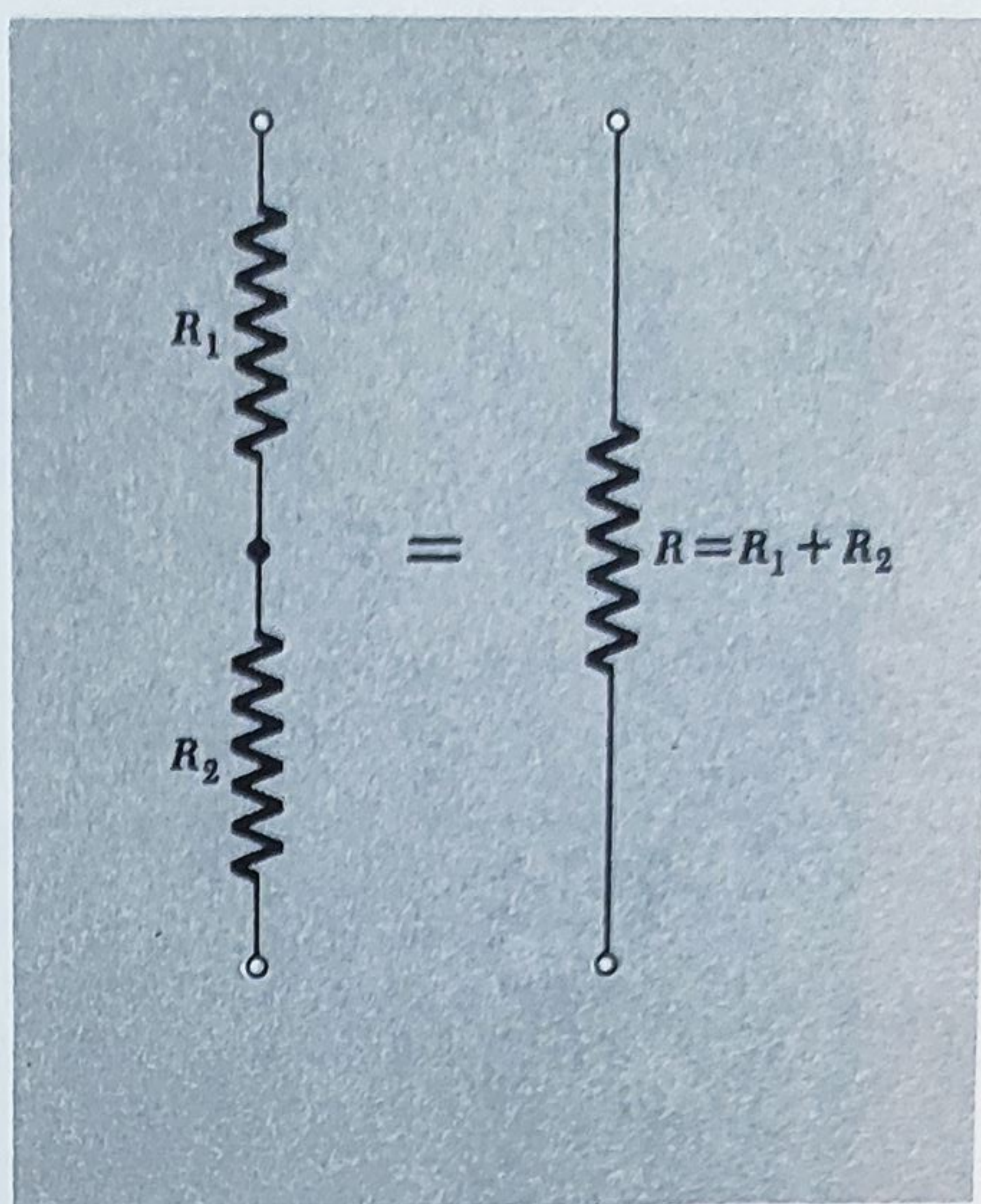


Fig. 4.10. Rezistori legați în serie.

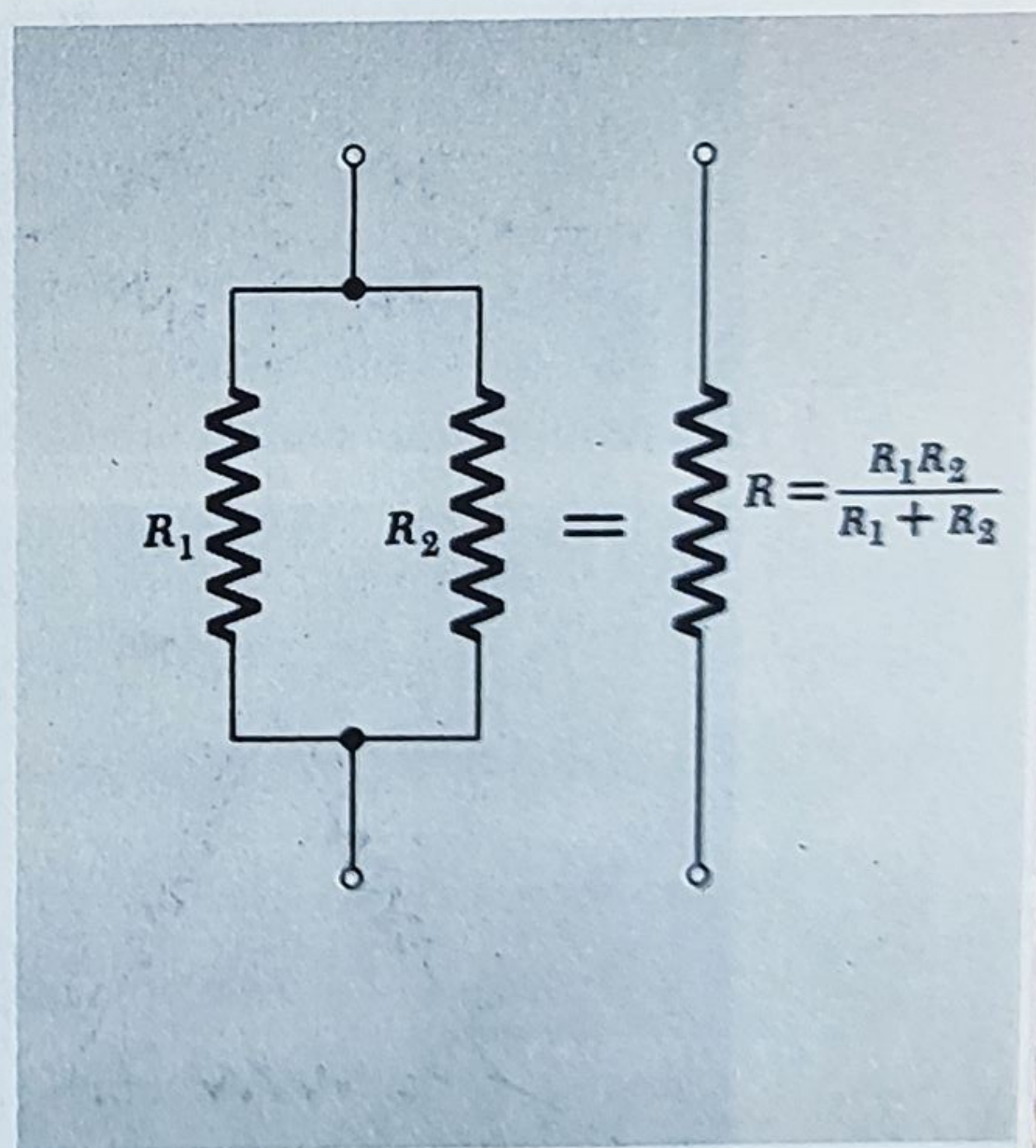


Fig. 4.11. Rezistori legați în paralel.



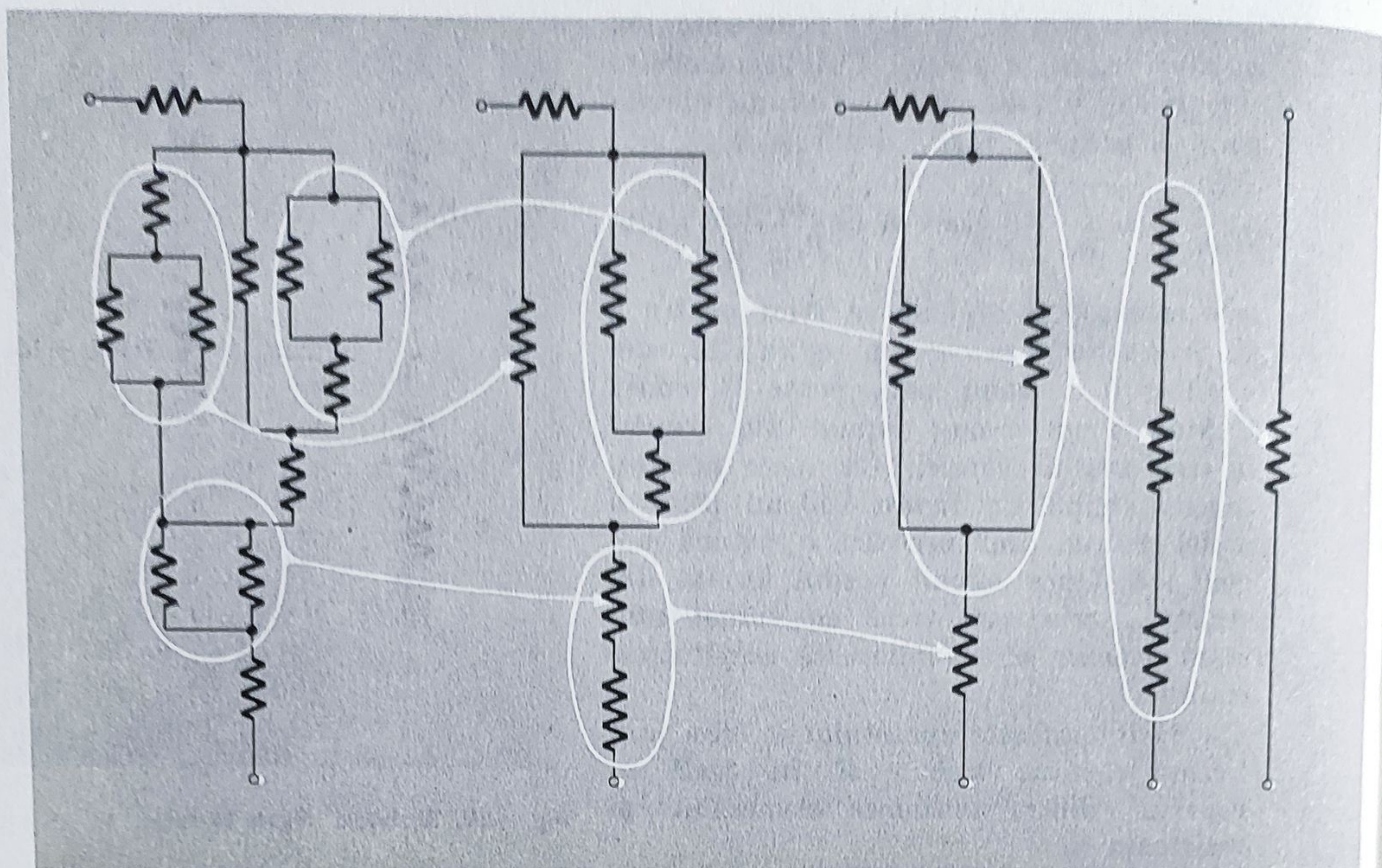


Fig. 4.12. Reducerea unei scheme complicate la un circuit ce conține grupări de rezistori legați numai în serie sau în paralel.

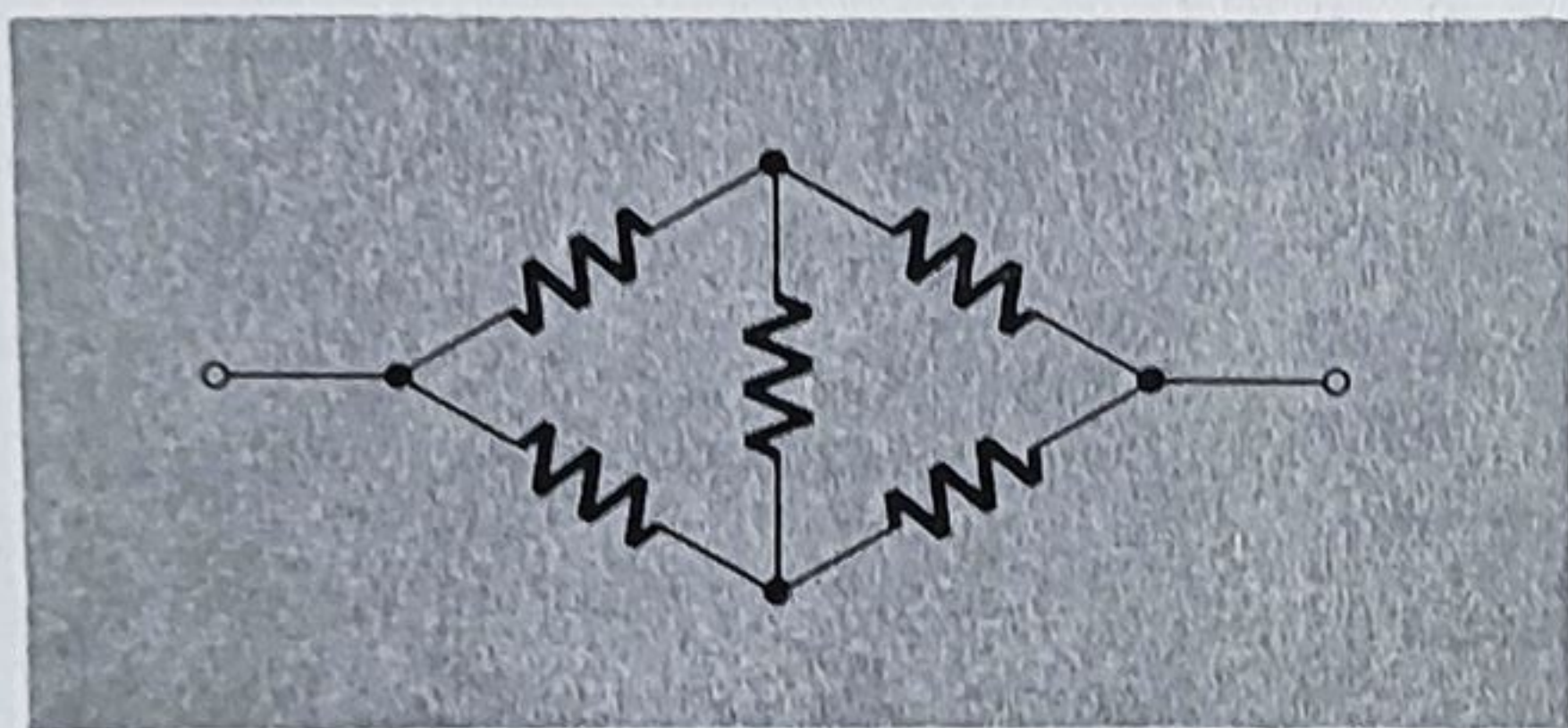


Fig. 4.13. O schemă simplă în punte. Ea nu poate fi redusă ca în fig. 4.12.

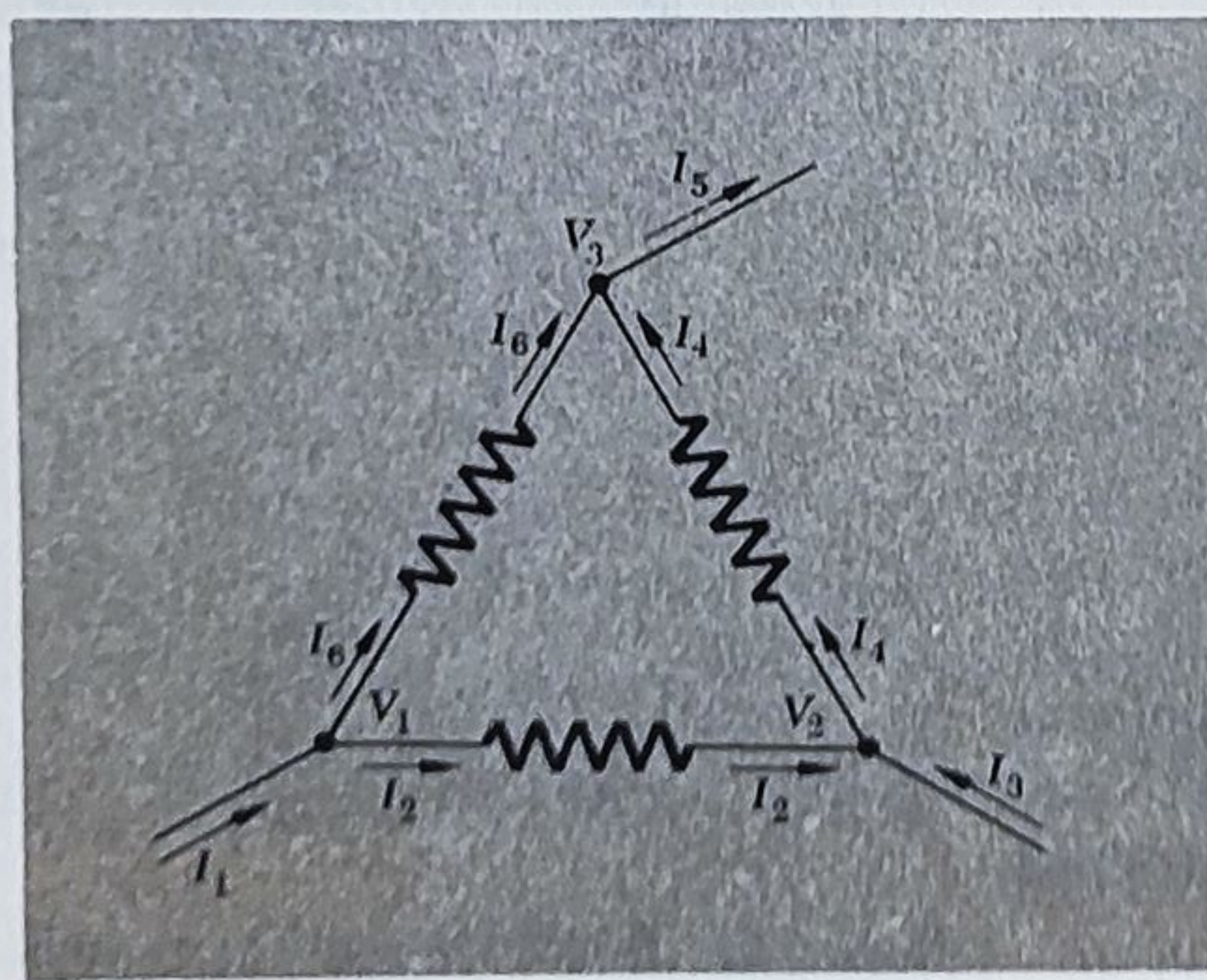


Fig. 4.14. Curenții și potențialele în nodurile circuitului.



Circuitul de curent continuu format din rezistori este un sistem liniar, tensiunile și curenții satisfac un sistem de ecuații liniare, care exprimă condițiile 1, 2 și 3. Prin urmare, și superpoziția diferitelor stări posibile ale rețelei este, de asemenea, o stare posibilă. În figura 4.14 este reprezentată o porțiune de circuit, prin conductorii căreia trec anumiți curenți  $I_1, I_2, \dots$ , iar nodurile au potențialele  $V_1, V_2, \dots$ . Dacă o altă stare posibilă a acestei porțiuni este descrisă de alți curenți și alte potențiale, să spunem  $I'_1, \dots, V'_1, \dots$ , atunci și  $(I_1 + I'_1), \dots, (V_1 + V'_1), \dots$  reprezintă, de asemenea, o stare posibilă a acestei porțiuni de circuit. Acești curenți și aceste tensiuni, care reprezintă o superpoziție satisfac, de asemenea, condițiile 1, 2 și 3. Unele teoreme generale ale circuitelor electrice se bazează pe această proprietate, fiind interesante și utile electrotehniștilor.

#### 4.9. DISIPAREA DE ENERGIE LA TRECEREA CURENTULUI

La trecerea curentului prin rezistor are loc o disipare de energie. Dacă forța necesară pentru deplasarea purtătorului de sarcină cu viteza medie  $v$  este  $F$ , atunci toți agenții care realizează această deplasare dau o putere  $F \cdot v$ . Dacă ionul de sarcină  $q$  se află sub acțiunea câmpului electric  $E$ ,  $F = qE$  și lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp este  $qE \cdot v$ . Energia cheltuită poate apărea sub formă de căldură. Pe baza modelului nostru de conducție ionică, modul cum se petrece acest lucru este destul de clar. Între ciocniri, ionul capătă o energie cinetică și un impuls suplimentar. După una sau mai multe ciocniri, impulsul se reorientează dar energia cinetică nu revine neapărat la valoarea normală. Pentru ca acest lucru să se întâmple, trebuie ca ionul să transfere energie cinetică obstacolului care-l deviază. Să presupunem că masa purtătorului de sarcină este mult mai mică decât cea a atomului neutru pe care-l ciocnește. La ciocnirea dintre o bilă de biliard și o bilă de popice, transferul mediu de energie cinetică este mic. Prin urmare, ionul (bila de biliard) va acumula energie suplimentară pînă cînd energia sa cinetică medie este atît de mare încît pierderea medie de energie într-o ciocnire este egală cu energia acumulată între ciocniri. În acest fel, după „încălzirea” inițială a purtătorilor de sarcină, lucrul mecanic efectuat de forța electrică la deplasarea purtătorilor este, în final, cedată mediului sub formă de energie cinetică a mișcării dezordonate sau de căldură.

Să presupunem că un curent staționar  $I$ , exprimat în amperi, trece printr-un rezistor de rezistență  $R$  ohmi. În fiecare secundă  $I$  coulombi de sarcină trec prin diferența de potențial  $V$ , exprimată în volți,  $V = IR$ . Prin urmare, lucrul mecanic efectuat într-o secundă este  $I^2 R$  jouli. ( $1 \text{ coulomb} \times 1 \text{ volt} = 1 \text{ joule} = 10^7 \text{ ergi}$ ). Unitatea de măsură pentru puterea  $P$  (viteza de efectuare a lucrului mecanic) este *watt*-ul ( $1 \text{ watt} = 1 \text{ joule/s}$ )

$$P = I^2 R. \quad (27)$$

Evident, curentul staționar din circuit trebuie să aibă o sursă de energie, capabilă să mențină câmpul electric ce mișcă purtătorii de sarcină. Pînă acum, am ocolit problema forței electromotoare, studiînd doar porțiuni dintr-un circuit; „bateria” n-am inclus-o în figură. În paragraful 4.10, vom studia cîteva surse de forță electromotoare.



#### 4.10. TENSIUNEA ELECTROMOTOARE ȘI ELEMENTUL VOLTAIC

Într-un circuit de curent continuu, originea forței electromotoare este un mecanism de transport de purtători de sarcină în direcție *opusă* celei în care câmpul electric încearcă să le transporte. Generatorul electrostatic Van de Graaff este un asemenea mecanism la scară mare (fig. 4.15). Dacă totul decurge staționar, curentul în circuitul exterior curge în direcția câmpului electric  $E$ , și energia disipată în el (sub formă de căldură), în unitatea de timp, este  $IV_0$  sau  $I^2R$ . Pe coloana interioară a mașinii există, de asemenea, un câmp electric îndreptat în jos. Aici, purtătorii de sarcină se pot mișca împotriva câmpului numai dacă se află pe o bandă izolatoare. Ei sînt așa de fixați de bandă încît nu pot aluneca pe bandă în jos, în direcția câmpului electric. (Ei pot fi luați de pe bandă de un câmp mult mai puternic, localizat pe peria de contact de la borne. Nu este neapărat necesar să ne ocupăm aici de modurile de așezare și de desprindere a purtătorilor de sarcină pe bandă.) Energia necesară mișcării benzii este luată, de obicei, de la un motor electric cuplat la o linie de putere, dar se poate folosi și un motor cu motorină sau poate fi pusă în mișcare de un om care rotește o manivelă. Generatorul Van de Graaff este de fapt o baterie cu o forță electromotoare care, în acest caz, este de  $V_0$  volți.

În bateriile obișnuite, purtătorii de sarcină se deplasează prin regiunea în care câmpul electric este opus curentului datorită energiei chimice. Adică, un purtător de sarcină pozitivă se poate deplasa spre un potențial electric mai ridicat, dacă participă la o reacție chimică și primește mai multă energie decît îi este necesar pentru a se „cătăra pe muntele de potențial“.

Pentru a înțelege mai bine acest mecanism, să examinăm un element voltaic. Sursa chimică de forță electromotoare a fost denumită inițial elementul lui Volta. Constrația picioarelor de broască, în faimoasele experiențe ale lui Galvani din jurul anului 1790, a pus în evidență producerea chimică a curentului electric. Volta a fost primul care a dovedit că sursa curentului nu era „electricitatea animală“ — așa cum credea Galvani, ci contactul a două metale diferite în circuit. Volta a mers mai departe construind prima baterie formată din mai multe elemente, fiecare constînd dintr-un disc de zinc și un disc de cupru separate printr-un strat de carton umed. „Pila“ lui

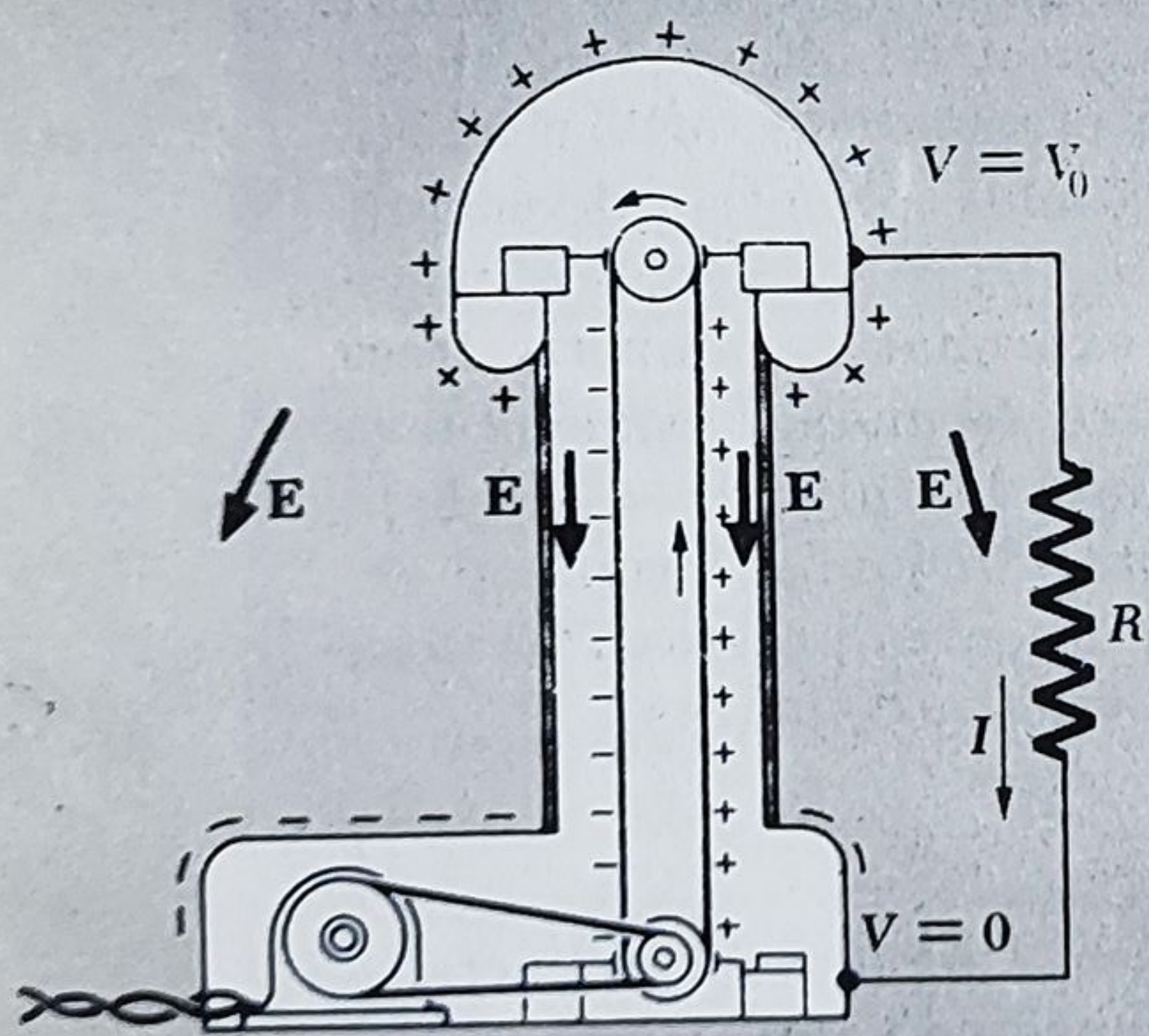
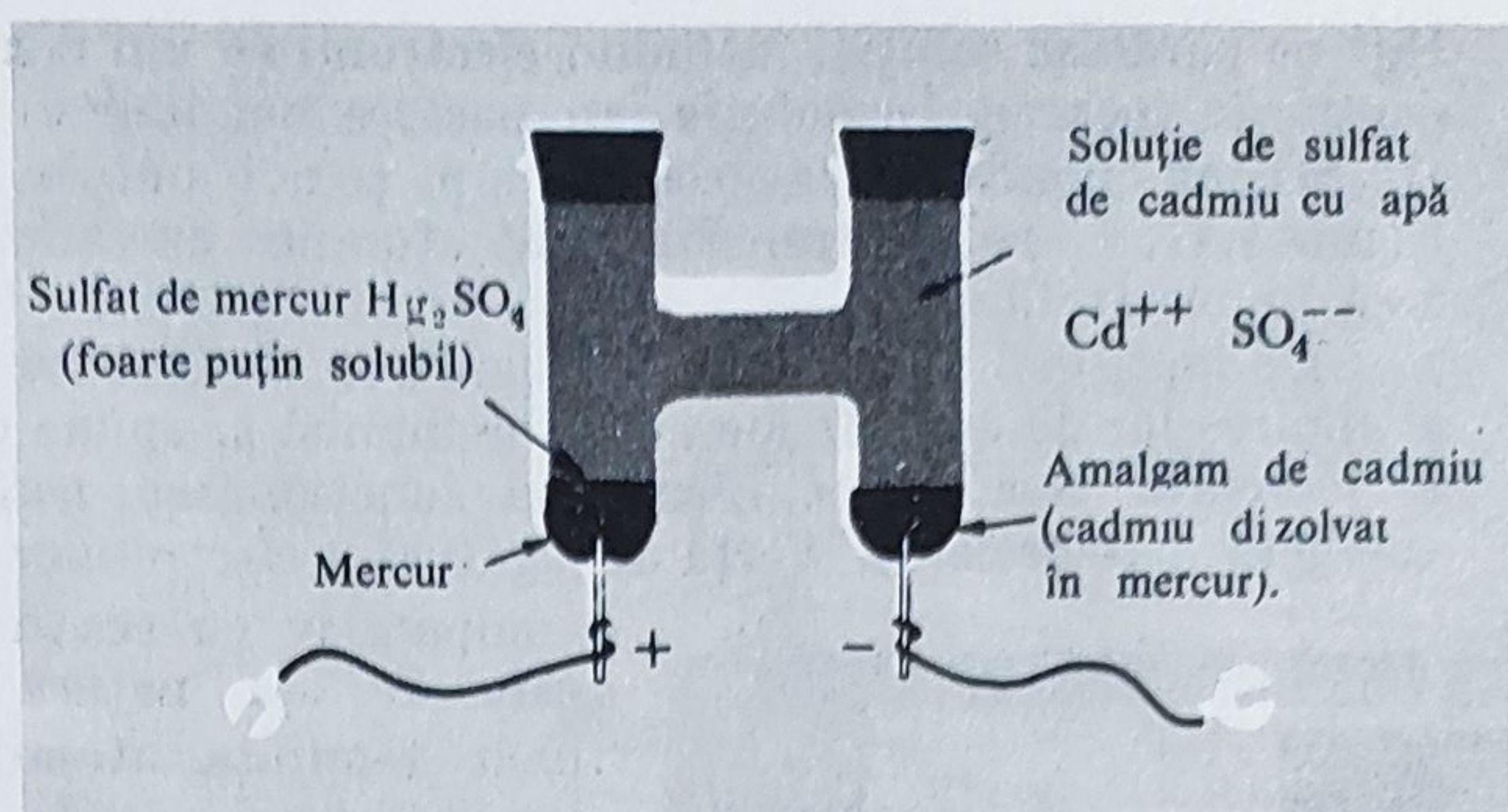


Fig. 4.15. În generatorul Van de Graaff, purtătorii de sarcină sînt transportați mecanic în sens opus celei în care i-ar mișca câmpul electric.



Fig. 4.16. Elementul Weston, utilizat ca etalon în măsurătorile de precizie ale tensiunilor. Acesta este un element „nesaturat”. În varianta „saturată” la fiecare electrod există un surplus de  $\text{CdSO}_4$  nedizolvat, în afară de ceilalți componenți.



Volta, cum a fost denumită, a fost prima sursă de curent continuu realizată în practică. Există mai multe tipuri de elemente galvanice, una din ele fiind și „elementul uscat”. Bateria de automobil de 12 volți constă din șase elemente plumb-acid sulfuric legate în serie. Vom descrie un alt element — elementul normal Weston — a cărei compoziție chimică este destul de simplă. Pe lângă aceasta, elementul Weston fiind etalon în măsurătorile precise de tensiune, este foarte utilizat în laborator.

Un tip de element Weston este reprezentat în figura 4.16. O incintă de sticlă în formă de *H* este umplută cu o soluție de sulfat de cadmiu ( $\text{CdSO}_4$ ) și apă. Prin fundul fiecărei ramuri se sudează un conductor extern care realizează contactul cu electrozii din interior. Electrocul din stînga constă din mercur pur și cel din dreapta din mercur în care s-a dizolvat cadmiu metalic. (Mai multe metale pot fi dizolvate în mercur; o asemenea soluție se numește *amalgam*). Deasupra mercurului din stînga se găsesc cîteva cristale de sulfat de mercur ( $\text{Hg}_2\text{SO}_4$ ) — un compus foarte slab solubil în apă. Între capetele conductorilor externi există o diferență de potențial, conductorul din stînga fiind încărcat pozitiv iar cel din dreapta negativ. (Aici, importantă este doar diferența, nu valoarea absolută a potențialului.) Cum se explică apariția acestei diferențe? O parte din ionii de cadmiu trec din amalgam în soluție, lăsînd în urmă fiecare doi electroni și astfel la electrodul din amalgam apare un surplus de sarcină negativă. Această trecere încetează atunci cînd surplusul de electroni de la electrod este atît de mare încît forțele de atracție exercitate împiedică ieșirea ionilor de cadmiu.

Dacă în acest moment se unesc capetele conductorilor printr-un rezistor, electronii se vor scurge, pe această cale externă, de la electrodul negativ spre cel pozitiv. În acest fel, ionii de  $\text{Cd}^{++}$  vor trece din nou în soluție, electronii rămași completînd sarcina negativă a acestui electrod. Un curent continuu va trece prin circuitul exterior în timp ce migrația ionilor încheie circuitul prin soluție. Să vedem ce se întîmplă în acest timp la celălalt electrod. În figura 4.17 se arată ce se întîmplă prin trecerea la fiecare din cele două suprafețe de separare electrod-soluție (electrolit). În figura 4.17, *a*, ionii de mercur,



$\text{Hg}^+$  ce părăsesc soluția, întâlnind electronii ce vin din exterior, devin atomi neutri de mercur. În soluție iau naștere noi ioni de  $\text{Hg}^+$ , prin dizolvarea  $\text{Hg}_2\text{SO}_4$  adăugându-se, în același timp, și noi ioni de sulfat în electrolit. În figura 4.17, *b* are loc transformarea atomilor de cadmiu în ioni de  $\text{Cd}^{++}$  ce trec în electrolit.

De fapt, în final, are loc desprinderea electronilor din atomii de cadmiu și alipirea lor de ioni de mercur. Un chimist ar spune că cadmiul se oxidează și mercurul este redus. Elementul funcționează pentru că acest schimb energetic este preferat. Forța de legătură a electronilor în atomul de cadmiu,

comparativ cu cea din atomul de mercur, este de așa natură — figurativ vorbind, încît tendința atomilor de mercur de a lega electronii depășește posibilitatea atomilor de cadmiu de a-i reține.

Remarcăm că la fiecare suprafață de separație, cîmpul electric se opune mișcării ionilor. Aceste straturi de separare, doar de cîțiva angströmi grosime, corespund benzii din generatorul Van de Graaff.

Să studiem, acum, variația potențialului electric în întreg sistemul atît în prezența curentului electric cît și în absența lui. În figura 4.18, variația potențialului electric de-a lungul circuitului, care este deschis într-un punct, este reprezentată pe verticală. Diferența de potențial la bornele circuitului deschis, reprezintă forța electromotoare a elementului, notată cu  $\mathcal{E}$ . Intensitatea cîmpului electric este egală cu minus gradientul potențialului. Ca în cazul oricărui cîmp electrostatic, integrala de linie din  $\mathbf{E}$  de-a lungul drumului este nulă. (Printre altele, nivelul ce reprezintă potențialul electrolitului este arbitrar — el neputînd fi măsurat direct).

În figura 4.19 este arătată distribuția potențialului la trecerea curentului printr-un rezistor extern. În interiorul electrolitului există un cîmp electric pe aceeași direcție cu direcția de curgere a curentului. Soluția de sulfat de cadmiu se comportă ca o rezistență ohmică obișnuită. Diferența de potențial

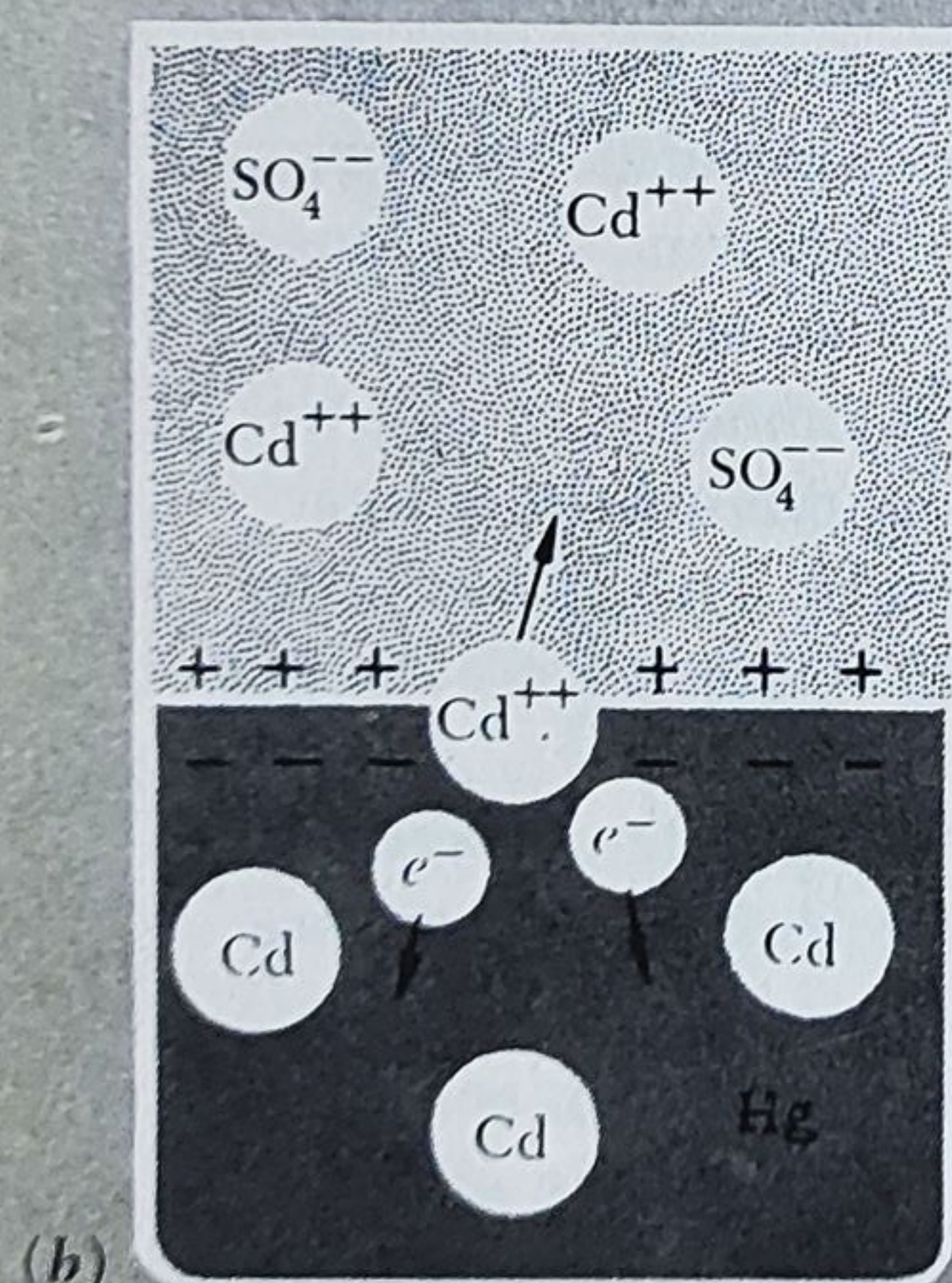
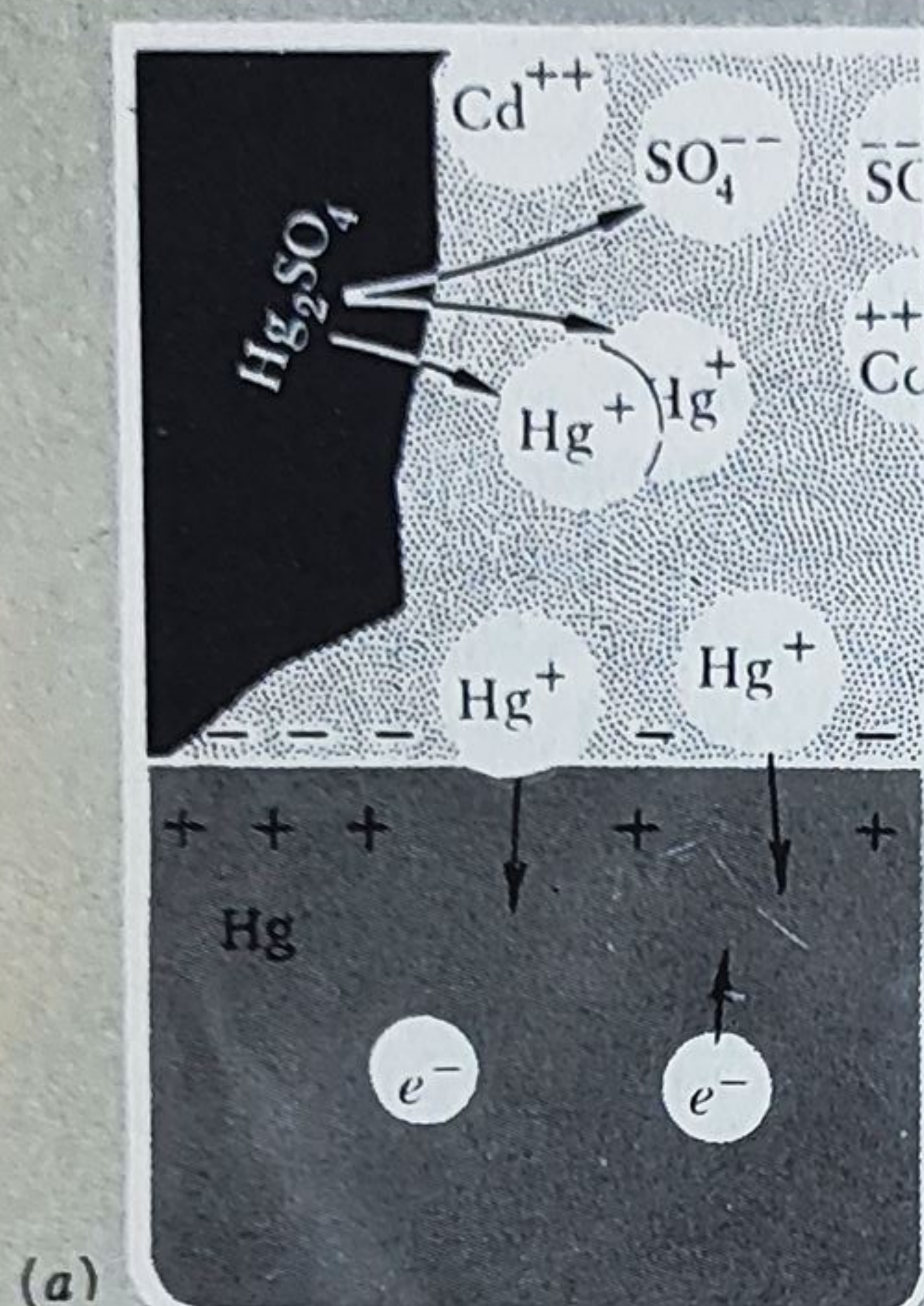


Fig. 4.17. Reprezentarea schematică a fenomenelor ce au loc la suprafața electrodului pozitiv (a) și la suprafața electrodului negativ (b), cînd elementul Weston este conectat la o sarcină exterioară.



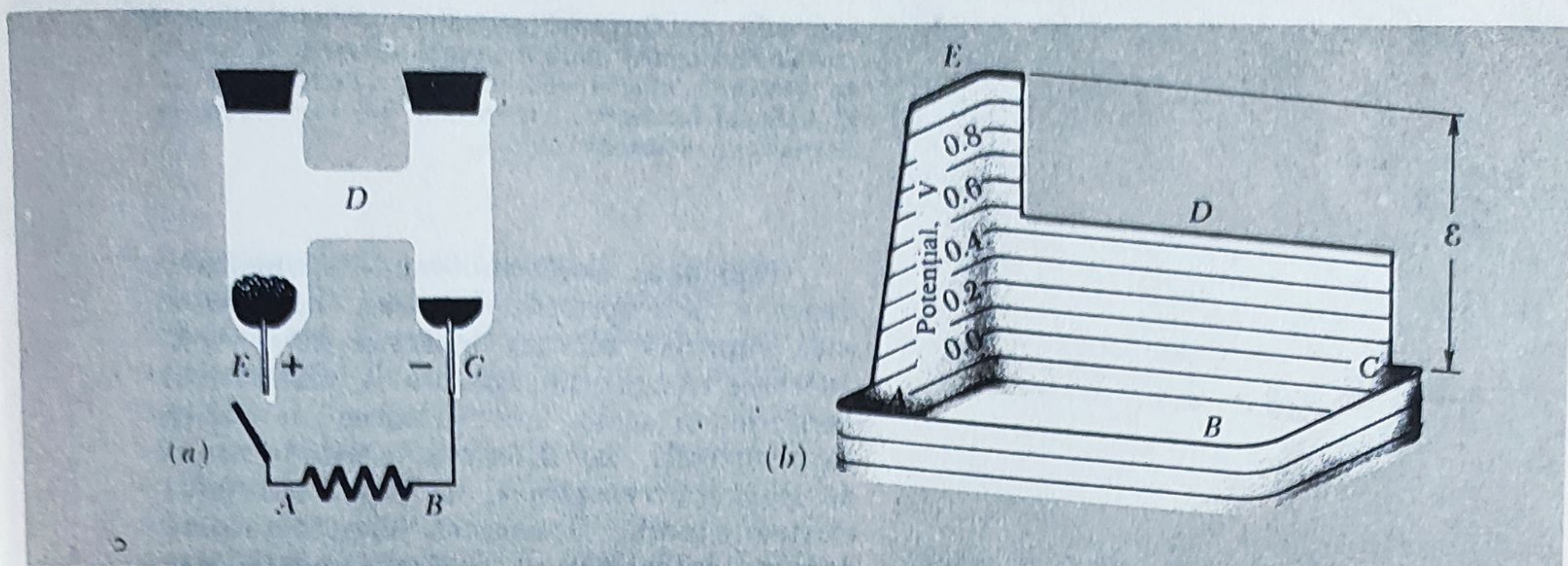
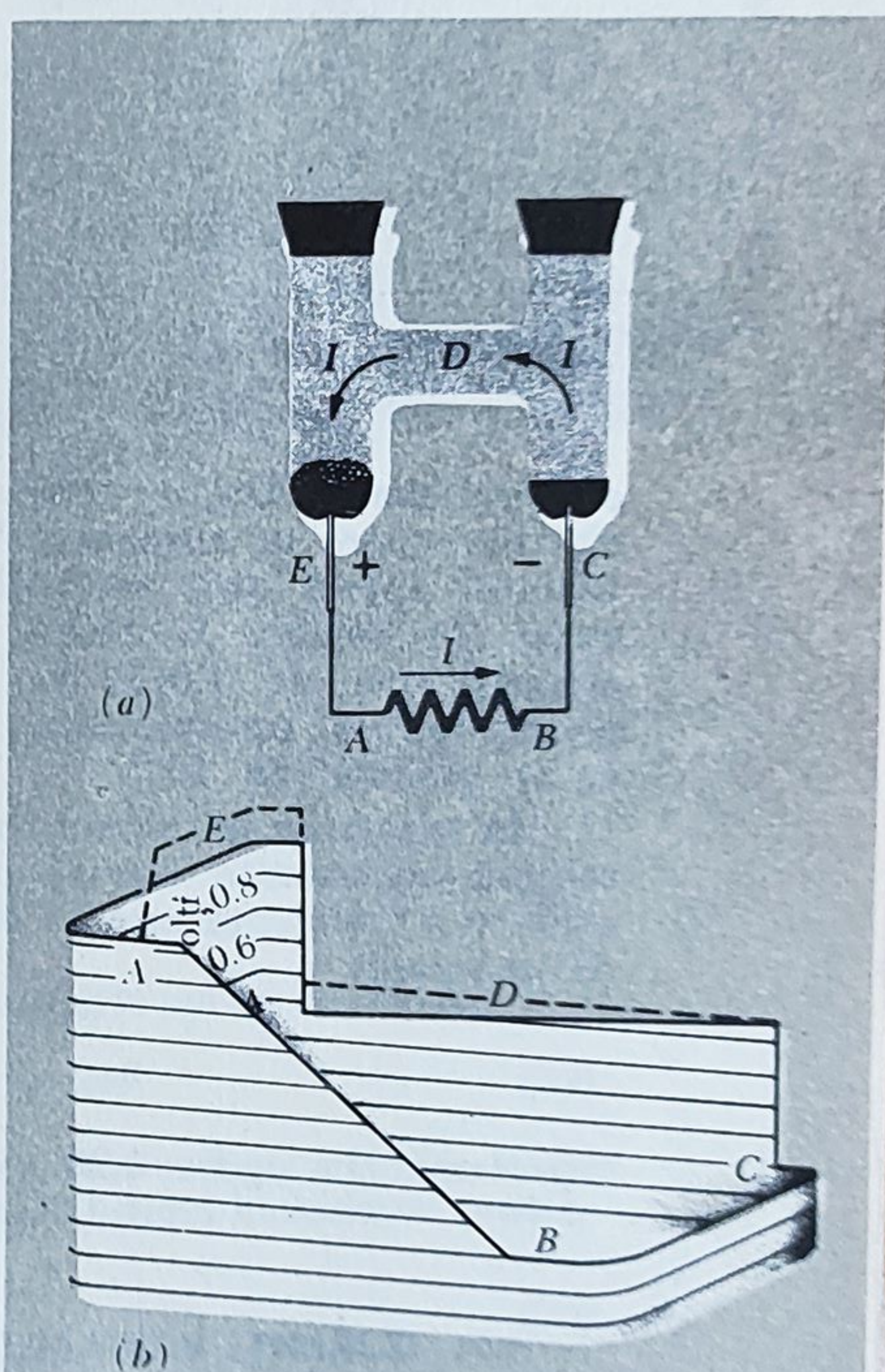


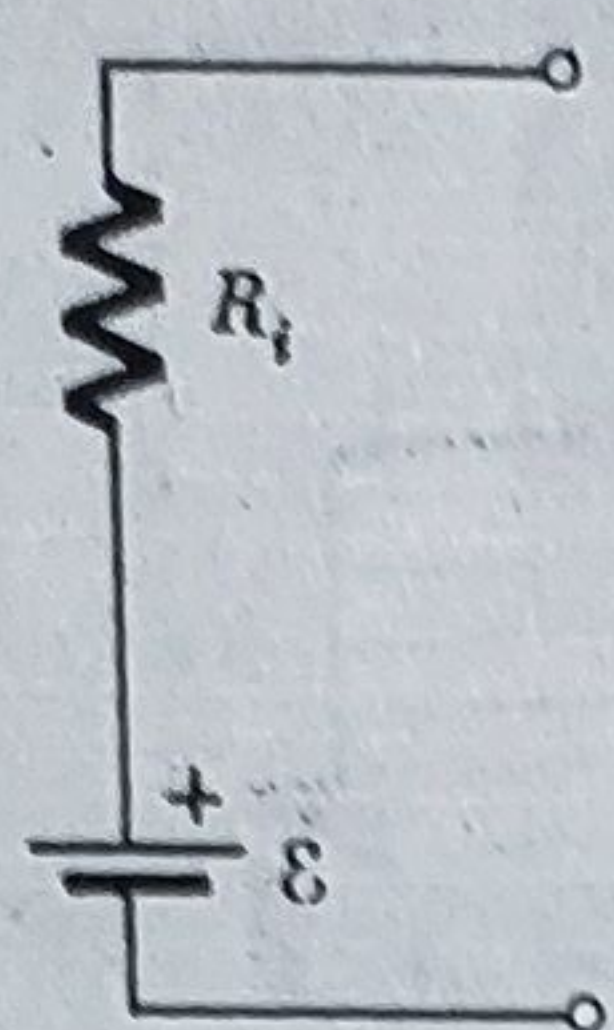
Fig. 4.18. Distribuția potențialului în circuitul deschis. Pe scala potențialului, s-a ales, în mod arbitrar, ca potențial 0, potențialul capătului din dreapta a circuitului.

la capete este acum mai mică decât  $\mathcal{E}$ , datorită căderii de potențial din interiorul electrolitului și posibil, de asemenea, și din cauza rezistenței suplimentare a straturilor de separație. Integrala de linie din intensitatea câmpului electric de-a lungul întregului circuit este, ca și mai înainte, nulă. Dacă prin fiecare punct al circuitului a trecut un curent de  $Q$  coulombi,  $\mathcal{E}Q$  ( $\mathcal{E}$  fiind exprimat în volți) reprezintă energia exprimată în jouli, care a fost disipată în circuitul extern și în interiorul elementului, pe seama energiei chimice a elementelor constitutive. Lanțul reacțiilor din element este reversibil. Asta înseamnă că dacă o altă sursă, cu o tensiune electromotoare mai mare, este introdusă în circuit, opunându-se elementului, atunci curentul va curge în sens opus iar procesele descrise decurg invers. Exact acest lucru se întâmplă la încărcarea bateriilor de acumulatori. În „elementul uscat” obișnuit, la descărcare apar câteva transformări ireversibile care fac imposibilă reversibilitatea procesului.

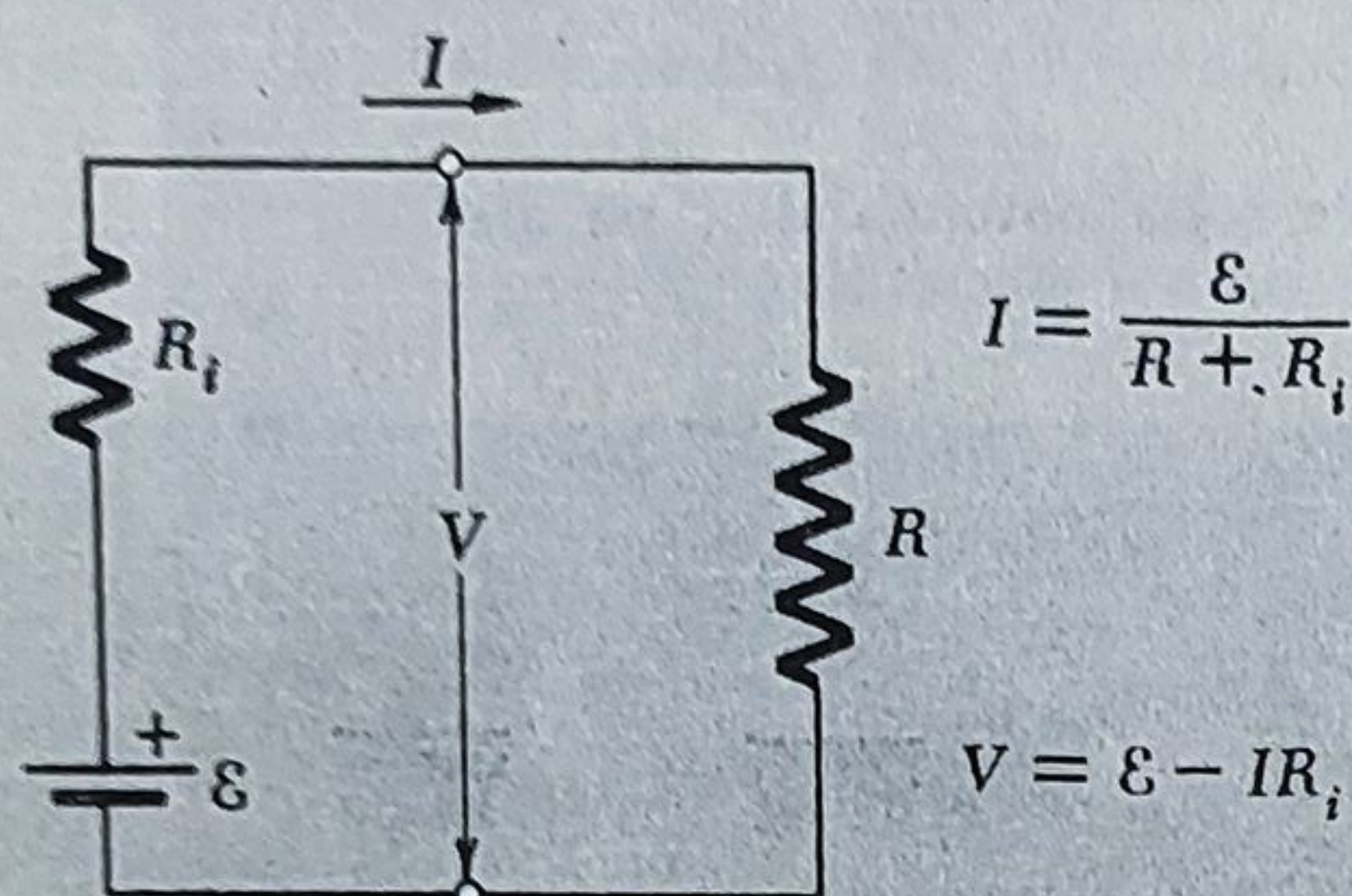
Fig. 4.19. Distribuția potențialului când prin rezistorul extern trece curentul. Observați căderea potențialului în interiorul electrolitului. Acest mod de tratare este inadecvat elementului Weston ca etalon. Un element etalon este folosit în cazurile când trece un curent foarte slab.







(a)



(b)

Fig. 4.20. a) Circuitul echivalent al unui element voltaic este o rezistență  $R_i$  legată în serie cu o sursă de tensiune electromotoare, de valoare fixă  $\mathcal{E}$ . b) Calculul intensității curentului într-un circuit ce conține un element voltaic.

Tensiunea electromotoare a elementului depinde de proprietăți atomice. Valoarea ei este cuprinsă într-un interval de 1 volt, deoarece energia de legătură a electronilor periferici în atom, are valoarea de câțiva electron-volți, iar diferența acestor energii de legătură reprezintă, de fapt, tensiunea electromotoare. Tensiunea electromotoare depinde întrucâtva și de temperatură, dar studiul riguros al proceselor electrochimice cade în sarcina termodinamicii. În chimia fizică acesta constituie un capitol central. Riguros vorbind, nu este vorba de energie, ci de așa-numita *energie liberă*, dar aici nu ne vom ocupa de diferența dintre aceste două noțiuni termodinamice.

Elementul Weston este folosit nu ca sursă de energie electrică, ci mai curînd ca etalon de diferență de potențial. Cazul reprezentat în figura 4.19, în care prin circuit trece un curent atît de mare încît căderea de potențial de la capetele lui scade

cu aproximativ 10%, ar constitui o proastă folosire a elementului. Tensiunea electromotoare în elementul Weston prezintă un înalt grad de reproductibilitate. Într-o altă variantă, în care soluția apoasă este saturată cu sulfat de cadmiu la ambii electrozi, tensiunea electromotoare la 20°C are valoarea de 1,0183 V. Folosind ca etalon elementul Weston și un potențiomtru corespunzător, diferența de potențial poate fi măsurată cu o precizie de  $10^{-5}$ .

În raport cu un circuit exterior, elementul poate fi reprezentat printr-o schemă echivalentă formată dintr-o tensiune electromotoare  $\mathcal{E}$ , legată în serie cu o rezistență internă oarecare  $R_i$ . Legarea la o rezistență externă  $R$  dă un curent

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_i}.$$

reprezentat în figura 4.20.

#### 4.11. CURENȚI VARIABILI ÎN CONDENSATORI ȘI REZISTORI

Fie un condensator, cu capacitatea  $C$ , încărcat pînă la o diferență de potențial oarecare  $V_0$  și apoi descărcat, prin legarea unei rezistențe  $R$  între capetele sale. În figura 4.21 sînt reprezentate: condensatorul — prin semnul



Fig. 4.21. Sarcina și curentul într-un circuit RC. În timpul  $RC$  sarcina scade de  $e$  ori.

convențional  $\text{||}$ , rezistorul  $R$  și întrerupătorul pe care-l închidem la momentul  $t = 0$ . Este evident că pe măsură ce trece curentul condensatorul își va pierde treptat sarcina, tensiunea pe condensator se micșorează, ceea ce duce, la rândul său, la micșorarea curentului. Pentru a vedea ce se întâmplă de fapt, este suficient să scriem legile ce guvernează circuitul. Fie  $Q$  sarcina pe condensator la un moment oarecare,  $V$  — diferența de potențial pe plăcile sale cât și pe rezistorul  $R$ . Fie  $I$  — intensitatea curentului, considerat pozitiv dacă curge dinspre placa pozitivă a condensatorului. Aceste mărimi, toate funcții de timp, sînt legate prin relațiile următoare:

$$Q = CV \quad I = \frac{U}{R} = -\frac{dQ}{dt} = I. \quad (28)$$

Eliminînd pe  $I$  și  $V$ , vom obține ecuația ce descrie variația în timp a lui  $Q$ :

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}. \quad (29)$$

Separînd variabilele

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}. \quad (30)$$

și integrînd, obținem:

$$\ln Q = -\frac{t}{RC} + \text{const.} \quad (31)$$

Prin urmare, soluția ecuației noastre diferențiale va fi de forma:

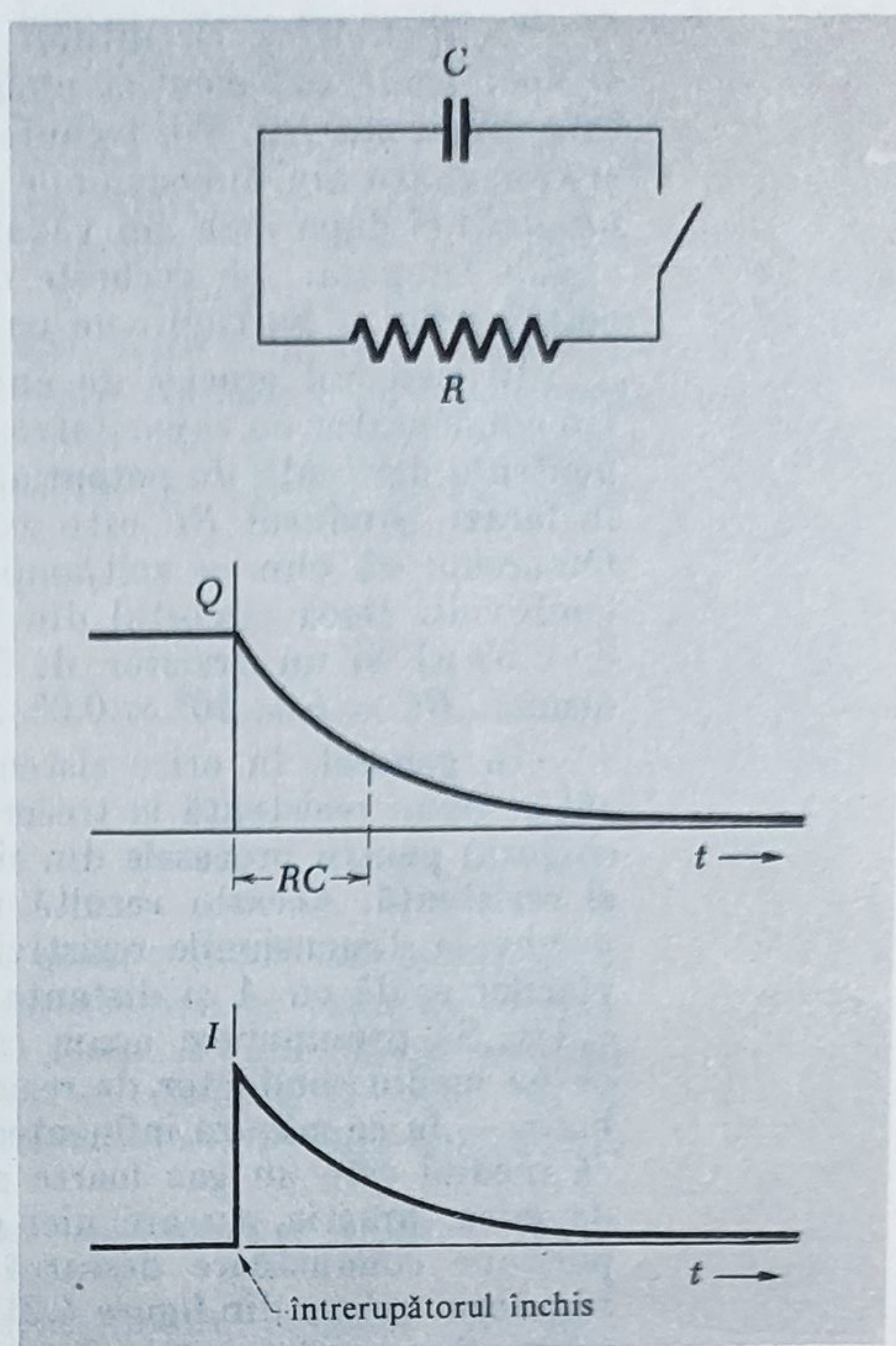
$$Q = (\text{o altă constantă}) \times e^{-t/RC} \quad (32)$$

Am stabilit că la  $t = 0$ ,  $U = U_0$  și prin urmare, la  $t = 0$ ,  $Q = CU_0$ . Astfel se determină constanta și cunoaștem cum variază  $Q$  după închiderea contactului:

$$Q = CU_0 e^{-t/RC} \quad (33)$$

De aici, se determină direct variația intensității curentului:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{U_0}{R} e^{-t/RC} \quad (34)$$





La închiderea circuitului curentul crește brusc pînă la valoarea  $V_0/R$  și apoi scade exponențial pînă la zero. Timpul caracteristic acestei scăderi este constanta  $RC$ . Nu trebuie să ne surprindă că produsul dintre rezistență și capacitate are dimensiunile timpului, întrucît știm că  $C$  are dimensiunile lungimii și după cum am văzut, produsul „rezistență  $\times$  lungime” are dimensiunile timpului. Se vorbește deseori despre „constanta de timp  $RC$ ” a circuitului sau a porțiunii de circuit.

În sistemul practic de unități, unitatea pentru capacitate este *faradul*. Un condensator cu capacitatea de un farad are o sarcină egală cu un coulomb pentru o diferență de potențial de un volt. Dacă  $R$  se exprimă în ohmi și  $C$  în farazi, produsul  $RC$  este exprimat în secunde. Pentru a verifica aceasta remarcăm că  $\text{ohm} = \text{volt/ampere} = \text{volt} \cdot \text{sec/coulomb}$ , iar  $\text{faradul} = \text{coulomb/volt}$ . Dacă circuitul din figura 4.21 este format dintr-un condensator de  $0,05 \mu\text{F}$  și un rezistor de  $5\text{M}\Omega$ , ambele ușor de găsit în orice laborator, atunci  $RC = 5 \times 10^6 \times 0,05 \times 10^{-6}$  sau  $0,25 \text{ s}$ .

În general, în orice sistem electric format din conductori încărcăți și căi ce opun rezistență la trecerea curentului, o măsură a timpului (poate nu singura) pentru procesele din sistem este dată de produsul dintre capacitate și rezistență. Aceasta rezultă în urma observațiilor făcute mai înainte cu privire la dimensiunile rezistivității. Să considerăm un condensator cu aria plăcilor egală cu  $A$  și distanța dintre ele  $s$ . Capacitatea sa  $C$  este egală cu  $\epsilon_0 A/s$ . Să presupunem acum că distanța dintre plăci se umple dintr-o dată cu un mediu conductor de rezistivitate  $\rho$ . Pentru a ocoli răspunsul la întrebarea — în ce măsură influențează aceasta asupra capacității, să presupunem că mediul este un gaz foarte slab ionizat; o substanță cu o densitate atît de mică, practic, nu are nici o influență asupra capacității. Această nouă porțiune conductoare descarcă condensatorul cu aceeași eficacitate ca și rezistorul extern din figura 4.21. Cît de repede se va întîmpla aceasta? Rezistența  $R$  a acestei porțiuni este egală cu  $\rho s/A$ . Prin urmare, constanta de timp  $RC$  este egală cu  $(\rho s/A) (\epsilon_0 A/s) = \epsilon_0 \rho$ .

Acest timp este independent de proprietățile și dimensiunile specifice ale condensatorului. Mărimea obținută reprezintă, pur și simplu, constanta de timp a procesului de redistribuire a sarcinii sau relaxarea cîmpului electric într-un mediu conductor. Pentru descrierea acestei stări, într-adevăr, nu intervin plăcile condensatorului. Dacă într-un mediu conductor așezăm față în față două straturi de sarcini, ele vor dispărea destul de repede, ca și cîmpul electric, iar mediul revine la un potențial constant. *Timpul de relaxare* este determinat de rezistivitatea  $\rho$ . De exemplu, dacă rezistivitatea gazului slab ionizat este de  $10^6 \text{ ohm} \cdot \text{m}$ , timpul de relaxare este de aproximativ  $10 \mu\text{s}$ .

Ne reamintim că rezistivitatea conductorilor buni cum sînt metalele, de exemplu, este de ordinul a  $10^{-7} \text{ ohm} \cdot \text{m}$ , valoarea timpului de relaxare fiind, în acest caz, de ordinul a  $10^{-18} \text{ s}$ . Un asemenea număr poate da naștere la bănueli. Poate fi el, de fapt, interpretat ca timpul necesar pentru dispariția sarcinii concentrate într-un conductor? Remarcăm, în primul rînd, că acest timp este mult mai scurt decît orice timp scurs între două ciocniri succesive sau timpul de corelație din modelul conductivității electrice pe care l-am studiat. În ecuația (19) am găsit că pentru sodiu metalic, la temperatura camerei,  $\tau_- = 3 \times 10^{-14} \text{ s}$ . Acest lucru ne previne asupra faptului că pentru fenomenele ce au loc într-un asemenea interval de timp scurt nu avem dreptul, în general, să folosim rezistivitatea  $\rho$  întîlnită în circuitele de curent continuu. De asemenea, orice evaluări cantitative ale timpului de relaxare sînt sub semnul întrebării.



Cu toate acestea, motivul, pentru care putem bănuî că problema nu e complet rezolvată, este mult mai profund. Pare curios faptul că timpul de relaxare  $T = \epsilon_0 \rho$  este independent de dimensiunea regiunii în cauză. Dacă regiunea este suficient de mică, totul este în ordine, dar dacă măcar una din dimensiunile regiunii este mai mare decît produsul dintre  $T$  și viteza luminii — pentru oricare valoare finită a timpului de relaxare  $T$  — relaxarea presupune că redistribuirea sarcinilor se propagă cu o viteză mai mare decît  $c$ . Aceasta este incompatibilă cu teoria relativității. Este evident că dacă comportarea sarcinilor electrice și a cîmpurilor este conformă cu postulatele teoriei relativității speciale, trebuie să mai intervină și altceva pentru a putea explica aceste fenomene. Aceasta va constitui tema capitolului următor.

## PROBLEME

*Aplicație la densitatea de curent.*

**4.1.** Într-un  $\text{cm}^3$  se găsesc  $5 \times 10^{10}$  ioni pozitivi dublu ionizați, care se mișcă spre vest cu viteza de  $10^7 \text{ cm/s}$ . În aceeași regiune, se găsesc  $10^{11}$  electroni pe  $\text{cm}^3$ , care se mișcă spre nord-est cu viteza de  $10 \text{ cm/s}$ . (Nu vă întrebați cum!) Care este direcția lui  $\mathbf{J}$ ? Care este valoarea sa în  $\text{amperi/cm}^2$ ?

*Răspuns:*  $48,8^\circ$  spre sud-vest;  $1,85 \text{ A/cm}^2$ .

*Curentul produs de electronii ce se rotesc.*

**4.2.** Într-un sincrotron pentru electroni de  $6 \text{ BeV}$ , electronii se mișcă pe o orbită aproape circulară de lungime  $240 \text{ m}$ . Este normal ca în decursul unui ciclu să se miște  $10^{11}$  electroni pe orbită. Viteza electronilor este practic egală cu viteza luminii. Cu ce este egală intensitatea curentului? Am ales acest exemplu simplu pentru a sublinia că în definiția pe care am dat-o pentru curent ca fiind viteza de transport a sarcinii, nu se impune ca purtătorii să fie nerelativiști și nu există o regulă care să excludă contribuția unei particule încărcate date, de mai multe ori pe secundă, la curent.

*Transportul mecanic al sarcinii.*

**4.3.** Într-un generator electrostatic Van de Graaff, o bandă de cauciuc de  $30 \text{ cm}$  lățime se mișcă cu viteza de  $20 \text{ m/s}$ . În partea de jos a benzii există o sarcină superficială dată, a cărei densitate este suficient de mare pentru a da naștere unui cîmp de  $12 \text{ kV/cm}$  pe fiecare față a benzii. Care este intensitatea curentului, exprimată în  $\text{mA}$ ?

*Curentul de electroni într-o diodă cu vid.*

**4.4.** Să considerăm o diodă cu vid cu catodul și anodul plan paralele ca în figura 4.2. Distanța dintre catod și anod este de  $s \text{ cm}$ , aria fiecăreia din ele fiind  $1 \text{ cm}^2$ , iar curentul de electroni emis de catod, ce trece spre anod, este  $I$ . Considerăm potențialul catodului zero, iar



cel al anodului pozitiv și menținut la  $V_0$ . Cum se exprimă viteza electronului și densitatea spațială de sarcină  $\rho$  în funcție de distanța  $x$  până la catod? Să presupunem că curentul este atât de slab încît cîmpul electric nu este influențat de sarcina spațială și electronii părăsesc catodul cu viteza inițială egală cu zero.

*Viteza de antrenare a electronilor de conducție într-un metal.*

4.5. Dacă aproximăm numărul electronilor de conducție dintr-un metal-argint, de exemplu, ca fiind egal cu cel al atomilor, care este viteza medie de antrenare a electronilor de conducție dintr-un fir de argint de diametru 1 mm, prin care trece un curent de 30 A? Dați un răspuns aproximativ; dați valori constantelor ce apar în calcule și ale căror valori nu sînt tabelate.

*Conductibilitatea ionică în aer.*

4.6. Un container umplut cu aer, aflat la temperatura și presiunea camerei, este iradiat cu un fascicul de raze  $X$  care ionizează o mică parte din moleculele aflate în interior. Ioni negativi sînt moleculele de  $O_2$ , avînd un electron suplimentar. În problemă, puteți considera că moleculele au toate aceeași masă moleculară cuprinsă între masa molară a  $O_2$  și  $N_2$ . Dimensiunile containerului sînt  $10 \times 10 \times 2$  cm<sup>3</sup> și presupunem că pereții de  $10 \times 10$  cm<sup>2</sup> sînt din metal, iar restul din material izolator. La capetele conductoare se aplică o t.e.m. de 1000 V, dînd naștere unui curent de intensitate  $1,5 \cdot 10^{-6}$  A. Care este conductivitatea acestui gaz slab ionizat? Dacă viteza medie a ionului este  $5 \times 10^4$  cm/s și drumul liber mediu de  $10^{-5}$  cm, care este timpul mediu dintre ciocniri? Ce fracțiune din moleculele gazului este ionizată? (Presupunem că numărul ionilor pozitivi și negativi odată ionizați este egal.)

*O aplicație simplă implicînd rezistivitatea.*

4.7. Un experimentator dorește să realizeze o foiță de aluminiu de grosime 50 Å, prin evaporarea în vid a aluminiului pur și depunerea lui pe o sticlă curată. Întîi depune un strat destul de gros, lăsînd o porțiune centrală liberă, prin mascarea ei. Apoi folosind o altă mască,

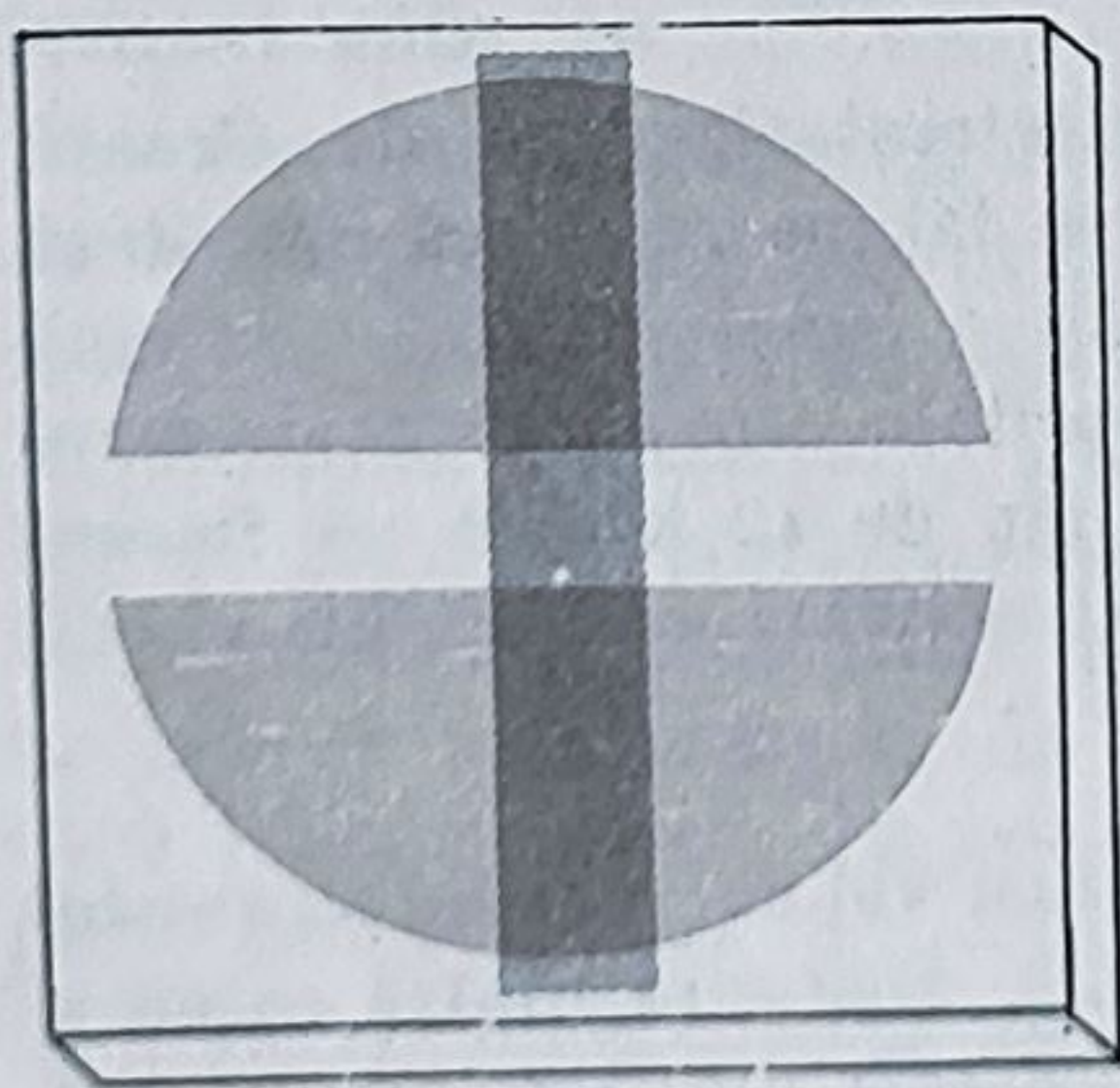


Fig. la problema 4.7.



depune un strat identic cu porțiunea goală și perpendicular pe ea. În același timp, porțiunile groase sînt folosite drept capete pentru măsurarea rezistenței. Pentru ce valoare a rezistenței va înceta evaporarea? (Rezistivitatea aluminiului pur la temperatura camerei este  $2,83 \cdot 10^{-8} \text{ ohm} \cdot \text{m}$ .)

*Rezistența unui conductor compus.*

4.8. Fierul pur are o rezistivitate de  $10,0 \cdot 10^{-8} \text{ ohm} \cdot \text{m}$  la  $20^\circ\text{C}$ . Rezistivitatea cuprului, la aceeași temperatură, este de  $1,77 \cdot 10^{-8} \text{ ohm} \cdot \text{m}$ . Considerăm doi conductori compuși diferit. Fiecare din ei are lungimea de 1 m și secțiunea un pătrat cu latura de 0,8 cm. Conductorul *A* este format prin punerea cap la cap a unei bare paralelipipedice de fier cu lungimea de 50 cm și a unei bare similare de cupru. Conductorul *B* este format din bare de cupru și fier de lungime 1 m și secțiune  $0,4 \times 0,8 \text{ cm}^2$  alăturate prin presare. Care este rezistența ambilor conductori, exprimată în ohmi și măsurată la distanța de 1 m de capete? Dacă prin conductorul *A* trece curent continuu, în care din bare disiparea de putere va fi mai mare? Răspundeți la aceeași întrebare în cazul conductorului *B*.

*Chestiune pentru discuție.*

4.9. Dacă un fir de cupru este întins, lungindu-l cu 0,1%, cu cît a variat rezistența sa? Ce presupuneri faceți, referitor la comportarea cuprului în timpul deformării?

*Curentul într-un mediu conductor de dimensiuni mari.*

4.10. Doi electrozi, constituiți din două sfere metalice de diametru 30 cm, sînt coboriți în adîncul oceanului, suspendați de cabluri izolatoare. Sferele se află la adîncimea de 60 m. Distanța dintre ele, pe orizontală, este de 300 m. Circuitul este închis printr-un cablu izolator, aflat în apropiere de suprafață și care ajunge pînă la un vapor, aflat deasupra uneia din sfere. Luînd conductivitatea apei de mare egală cu  $4 \text{ (ohm} \cdot \text{m)}^{-1}$ , să se evalueze rezistența în acest circuit. În primul rînd, trebuie să decideți dacă rezistența porțiunii de ocean dintre cele două sfere se datorează vecinătății sferelor sau întregului volum al oceanului. Pentru clarificarea acestei probleme, puteți studia rezistența dintre două sfere concentrice, din care una este mult mai mare ca cealaltă și între care se află un mediu omogen. De asemenea, puteți trasa aproximativ liniile de curent din ocean, în porțiunea dintre cele două sfere. Această problemă, asupra rezistenței circuitului, în care una din porțiuni este o sondă conductoare introdusă într-un mediu slab conductor, este importantă nu numai pentru geofizică dar și pentru multe cercetări fiziologice.



4.11. Ce valoare trebuie să aibă  $R_1$ , în circuitul din figură, pentru ca rezistența la intrarea dintre capete să fie egală cu  $R_0$ , dacă  $R_0$  este dat?

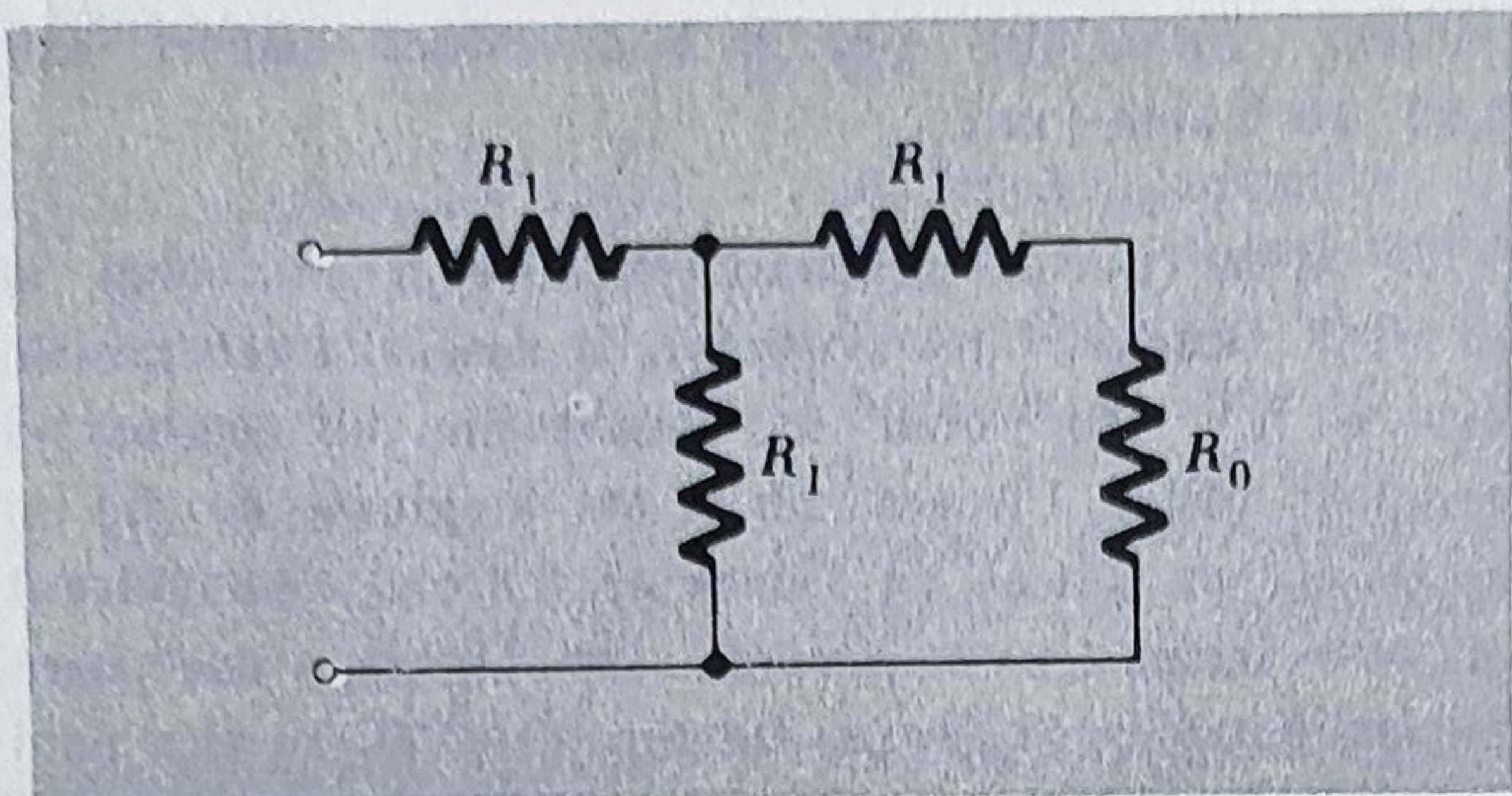


Fig. la problema 4.11.

4.12. Când o baterie de tensiune  $V$  necunoscută, fără rezistență interioară, este conectată la un rezistor  $R$ , ampermetrul din circuit indică 4 A. Când se leagă în serie cu  $R$  o rezistență adițională de 10 ohmi, intensitatea curentului scade la 3A, care sînt valorile lui  $R$  și  $V$ ? Dacă bateria are o rezistență interioară  $R_i$ , ce experiențe trebuie făcute pentru a determina pe  $R$ ,  $V$  și  $R_i$ ?

4.13. Să se arate că dacă o baterie, de t.e.m. fixă  $\mathcal{E}$  și rezistență interioară  $R_i$ , este conectată la un rezistor cu rezistență variabilă  $R$ , pentru  $R = R_i$ , pe rezistorul exterior se debitează puterea maximă.

4.14. Unui aparat oarecare, aflat în interiorul unui cilindru sub înaltă presiune, este necesar să i se transmită căldură cu o viteză perfect constantă. În cursul experienței, presiunea va varia provocînd variații ale rezistenței firului folosit ca încălzitor. Circuitul reprezentat în figură corespunde unei asemenea situații.  $R_3$  este înfășurarea încălzitorului aflat în interiorul cilindrului de înaltă

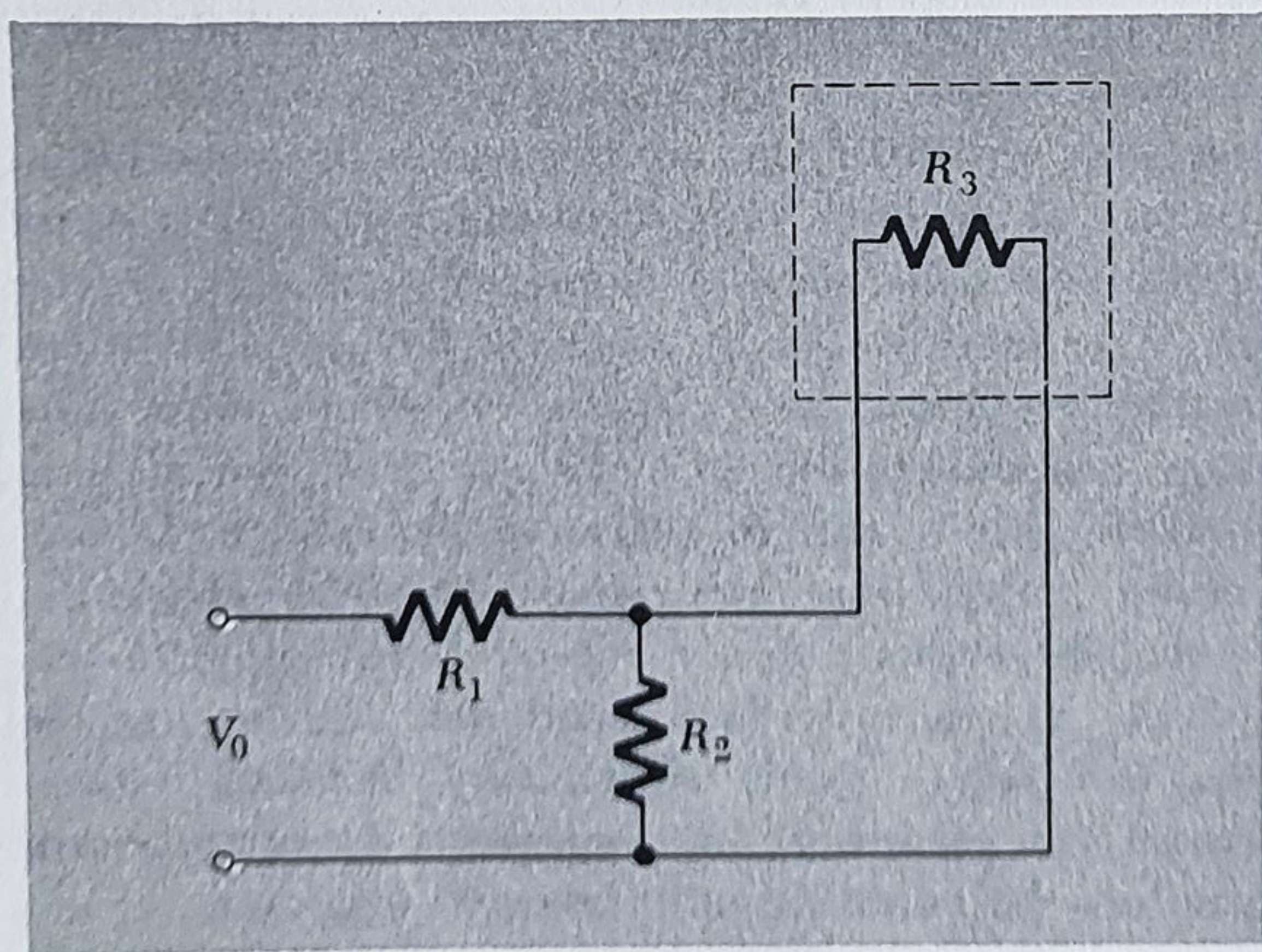


Fig. la problema 4.14.



presiune  $R_1$  și  $R_2$  sînt rezistori ficși, aflați în exterior și care rămîn constanți.  $V_0$  este valoarea tensiunii constante aplicate. Ideea constă în aceea, că în primă aproximație, puterea disipată pe  $R_3$  să fie independentă de rezistența lui  $R_3$ . Că acest lucru este posibil, se va vedea din următoarele argumente. Dacă  $R_3$  tinde către zero, puterea disipată pe el trebuie să tindă spre zero întrucît curentul este limitat de  $R_1$ . Pe de altă parte, dacă  $R_3$  crește infinit de mult, puterea disipată tinde tot către zero întrucît tensiunea pe  $R_3$  este limitată. Undeva, între aceste limite, trebuie să existe un maxim. Problema constă în a-l găsi, adică a găsi o asemenea relație între  $R_1$ ,  $R_2$  și  $R_3$ , pentru care se atinge insensibilitatea căutată a puterii la variațiile rezistenței  $R_3$ .

**4.15.** În puntea ilustrată în figură, rezistențele variabile  $R_1, \dots, R_5$  sînt date și de asemenea este dată intensitatea curentului  $I_0$ , ce intră în stînga și iese în dreapta. Rezolvarea acestui circuit constă în găsirea intensităților curentului în toate ramurile. Acestor cinci intensități necunoscute li s-au atribuit direcții arbitrare, indicate prin săgeți. Dacă în vreuna din ramuri intensitatea curentului are sens opus, vom obține o valoare negativă. Pentru fiecare din cele patru joncțiuni sau *noduri*, este valabilă o ecuație de forma  $I_0 - I_1 - I_3 = 0$ . Scrieți aceste ecuații și arătați că numai trei sînt independente. Folosind condiția III din paragraful 4.8, aplicată la două contururi, se obțin încă două ecuații. (Observați, că se pot considera trei contururi, dar numai două din ecuațiile pentru contururi sînt independente.) Avem acum 5 ecuații independente cu 5 necunoscute și nu rămîne decît să aplicăm cunoștințele de algebră. Cînd se obține soluția, una din metodele de verificare a ei constă în a egala unul sau mai mulți  $R$  cu zero reducînd, în acest fel, puntea la un simplu circuit în care distribuția curenților este simplă. De exemplu, cu ce va fi egal  $I_1$  dacă  $R_5 = 0$ ?

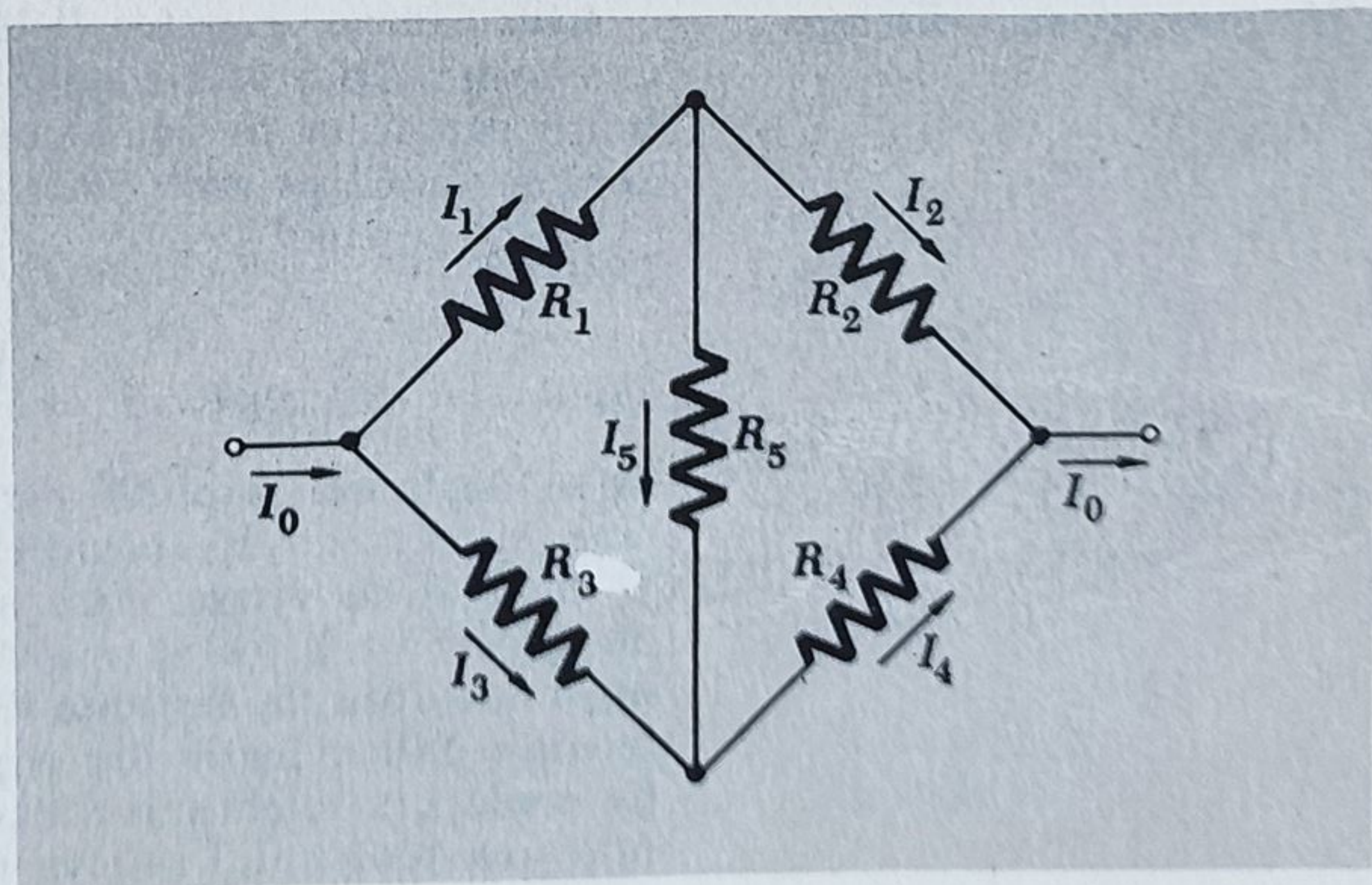


Fig. la problema 4.15.



*Aplicație din care reiese de ce considerăm, de obicei, că curentul ce iese dintr-o porțiune de circuit este egal cu curentul ce intră.*

*Variația energiei în circuitul RC.*

*O problemă cu mult conținut fizic.*

*Chestiuni pentru discuție.*

4.16. Ca exemplu, alegem „cutia neagră” din paragraful 4.8, reprezentată printr-un cub cu latura de 10 cm, cu două terminale. Aceste terminale sînt legate printr-un fir la un circuit exterior oarecare. În rest, cutia este bine izolată. Prin acest element de circuit trece un curent de aproximativ 1 A. Presupunem acum că curentul ce intră diferă de cel care iese cu o milionime. Cît durează pînă ce potențialul cutiei ajunge la 1000 V, dacă nu se întîmplă nimic altceva?

4.17. Reveniți la exemplul condensatorului  $C$ , care se descarcă printr-un rezistor  $R$  și arătați că energia totală disipată în rezistor este egală cu energia inițial acumulată în condensator. Presupuneți că vi se obiectează prin aceea că un condensator, în realitate, nu se descarcă niciodată deoarece  $Q$  devine zero numai pentru  $t = \infty$ . Cum veți răspunde la această obiecție? Cu ajutorul unor ipoteze logice, puteți găsi timpul în care sarcina scade pînă la un electron.

4.18. O particulă de grafit, aproximativ sferică de diametru  $10\ \mu$  ( $10^{-3}$  cm) cade în vid, intersectînd un fascicul de protoni cu energia de 3 keV. I s-a dat drumul de pe o suprafață aflată la cîtiva centimetri de partea superioară a fascicului. Fasciculul se mișcă orizontal, poartă un curent de 10 mA, uniform distribuit pe o secțiune circulară cu raza de 2 cm. Vom considera că protonii de 3 keV nu pot străpunge  $10\ \mu$  de grafit, astfel încît orice proton care pătrunde în grafit, rămîne în el. Ce se va întîmpla cu particula de grafit? Apar, aici, cîteva chestiuni asupra cărora merită să reflectați: Cîți protoni trebuie să rețină particula, pentru ca potențialul ei să crească destul de mult astfel încît să înceapă a respinge protonii? Aproximativ în cît timp se ajunge la aceasta? Mai mult decît îi trebuie particulei pentru a străbate fasciculul? I se va imprima particulei o viteză orizontală apreciabilă? Se va încălzi ea puternic? Credeți că un asemenea fascicul de protoni, îndreptat vertical în sus, poate servi ca suport unei particule de grafit în vid?

4.19. Cineva ar putea fi tentat să afirme că viteza cu care se mișcă purtătorii de sarcină, limitează viteza redistribuirii sarcinilor în conductor. Să considerăm, totuși, o bară metalică pe care dintr-o dată se amplasează sarcina pozitivă de  $\frac{10^{-9}}{3}$  C la unul din capete și la celălalt

capăt sarcina negativă de  $\frac{10^{-9}}{3}$  C. Cît timp trebuie să se deplaseze sarcinile pentru ca bara să ajungă din nou neutră? Sau, să considerăm un proton cu energia de 10 MeV și cu viteza (care se găsește ușor prin calcul) de  $4,5 \cdot 10^7$  m/s, ce se mișcă paralel cu suprafața unei plăci de cupru, la distanța de 1 mm de ea. Viteza electronilor de conducție din cupru abia depășește  $10^6$  m/s. Ce credeți, sarcina superficială indusă va putea urmări mișcarea protonului sau va rămîne în urmă?



## Capitolul 5

# Cîmpul purtătorilor de sarcină în mișcare

5.1. De la Oersted la Einstein	164
5.2. Forțe magnetice	165
5.3. Măsurarea sarcinii în mișcare	167
5.4. Invarianța sarcinii	170
5.5. Cîmpul electric măsurat în diferite sisteme de referință	173
5.6. Cîmpul unui purtător punctiform de sarcină ce se mișcă cu viteză constantă	177
5.7. Cîmpul unui purtător de sarcină la pornire sau oprire	180
5.8. Forța ce acționează asupra unui purtător de sarcină în mișcare	186
5.9. Interacțiunea dintre un purtător de sarcină în mișcare și alți purtători de sarcină în mișcare	190
PROBLEME	197



## 5.1. DE LA OERSTED LA EINSTEIN

În iarna anului 1819-20 Hans Christian Oersted preda cursul de electricitate, galvanism și magnetism la Universitatea din Copenhaga. Prin *electricitate* se subînțelegea electrostatica, *galvanismul* — capitol apărut în urma descoperirii lui Galvani și a experiențelor efectuate de Volta, se referea la efectele curentului continuu produs de baterii, iar *magnetismul* se ocupa de proprietățile, de mult cunoscute, ale minereurilor de fier, de acele de busolă, de câmpul magnetic al Pământului. Apărea, totuși, clar faptul că între curenții galvanici și sarcina electrică trebuie să existe o legătură, deși în afara faptului că ambele produc șocuri organismelor, nu existau alte dovezi directe. Pe de altă parte, părea că magnetismul și electricitatea n-au nimic comun. Totuși, la Oersted, exista ideea, poate neclară, dar urmărită cu perseverență, că magnetismul ca și curentul galvanic ar putea fi una din „formele ascunse” ale electricității. În căutarea acestei legături, a încercat să facă în fața auditoriului său, experiența trecerii unui curent galvanic printr-un fir aflat deasupra acului unei busole și perpendicular pe el. N-a obținut nici un efect. După curs, ceva l-a stimulat să încerce experiența cu firul paralel cu acul busolei. Acul a deviat puternic, iar dacă sensul curentului galvanic era opus, acul devia în sens invers!

Lumea științifică era perfect pregătită pentru această descoperire. Îndată ce vestea a ajuns la alte laboratoare, au fost impulsionate alte experiențe și descoperiri. N-a trecut multă vreme și Ampère, Faraday și alții au făcut o descriere exactă și completă a acțiunilor magnetice a curenților electrici. Descoperirea fundamentală a lui Faraday a inducției electromagnetice a urmat după mai puțin de 12 ani de la experiența lui Oersted. În două sute de ani de la publicarea în 1800 a mării lucrări a lui William Gilbert — „De Magnete”, cunoștințele asupra naturii magnetismului n-au progresat deloc. Pornind de la aceste descoperiri experimentale s-a dezvoltat teoria clasică a electromagnetismului. Ea a fost formulată matematic de Maxwell și ingenios fundamentată experimental de către Hertz în 1888, prin punerea în evidență a undelor electromagnetice.

Teoria specială a relativității își are rădăcinile sale istorice în electromagnetism. Lorentz, studiind electrodinamica sarcinilor în mișcare, a ajuns foarte aproape de formularea finală a lui Einstein. Iar importanta lucrare a lui Einstein, apărută în 1905, n-a fost intitulată „Teoria relativității”, ci „Asupra electrodinamicii corpurilor în mișcare”. Astăzi, ne dăm seama că postulatele teoriei relativității și implicațiile lor deschid un larg câmp de acțiune ce cuprinde toate legile fizicii, nu numai cele ale electromagnetismului. Impunem ca oricare teorie fizică completă să fie invariantă relativist. În oricare din sistemele de referință inerțiale, descrierea evenimentelor tre-



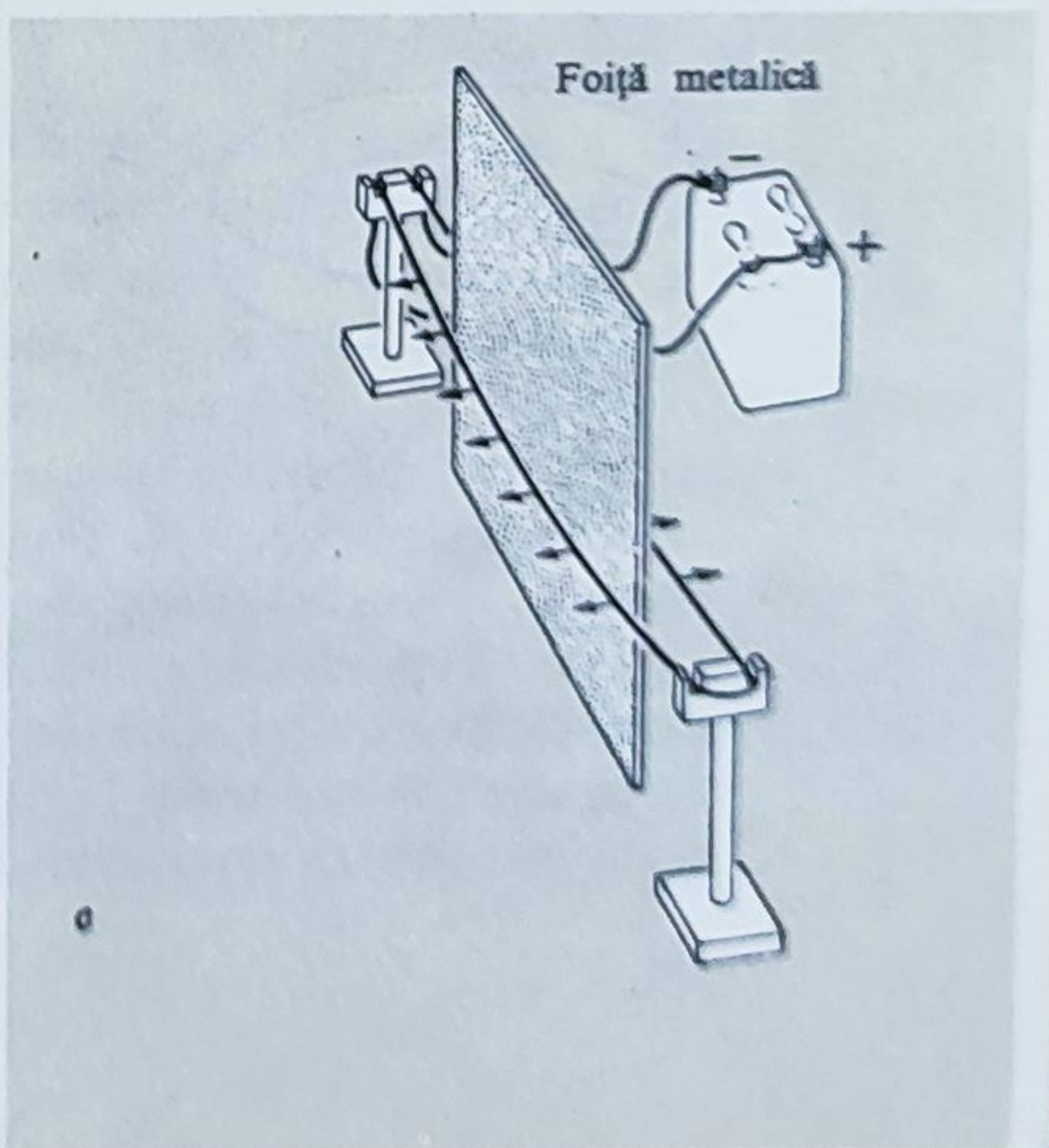
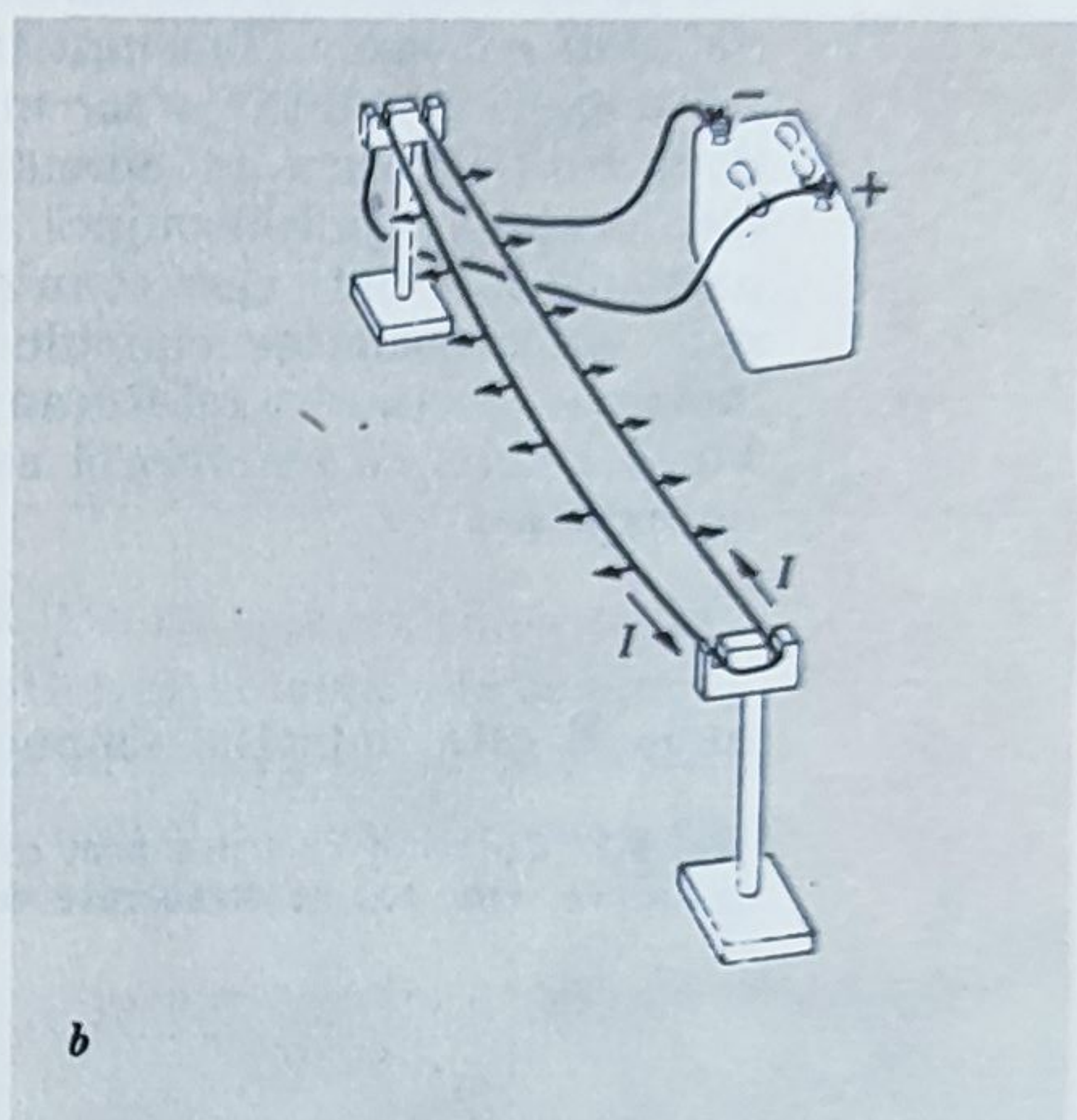
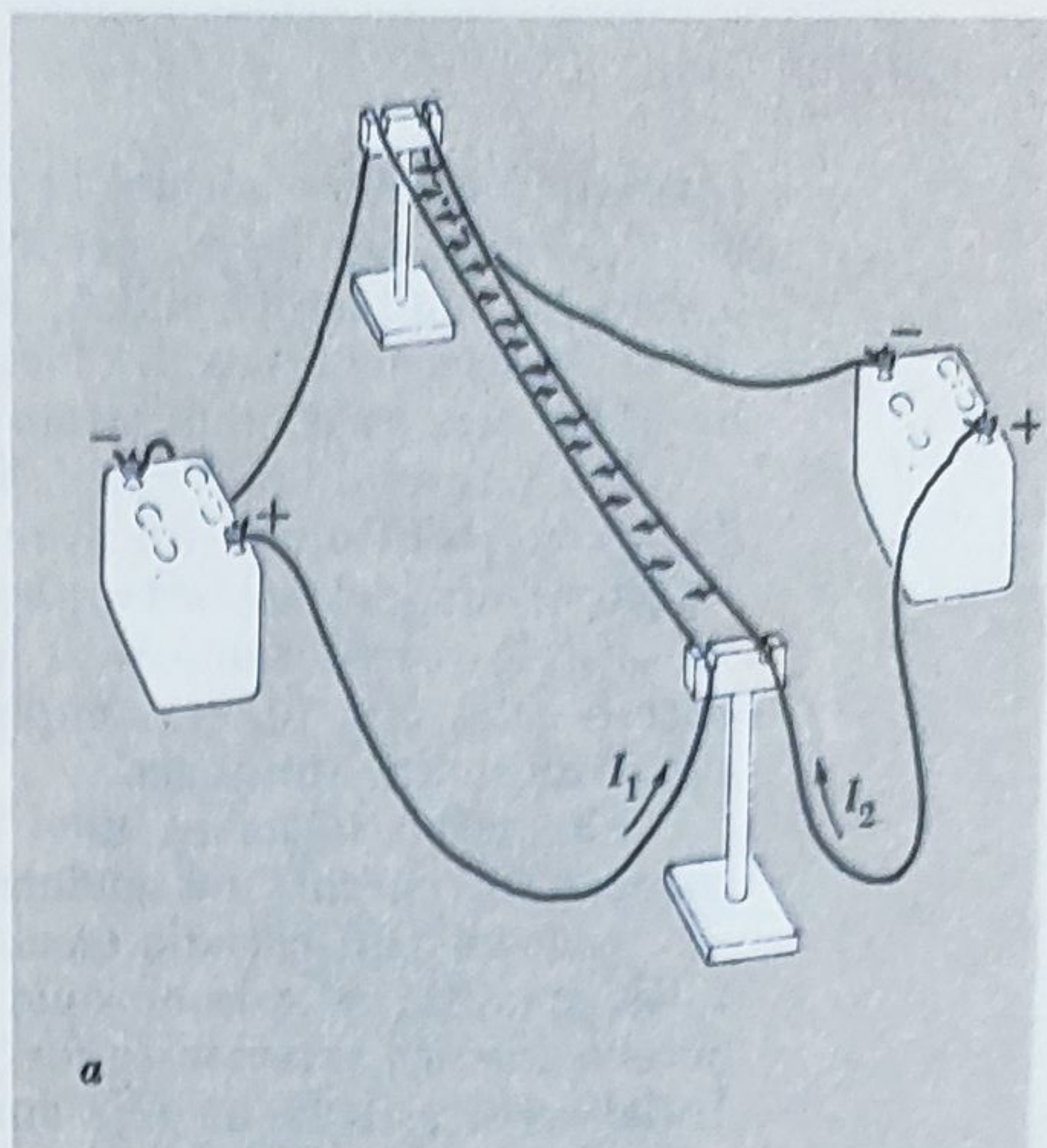
buie să fie aceeași. În fizică s-a întâmplat ca, cu mult înainte de a fi conștienți de semnificația invarianței relativiste, să existe o teorie relativist invariantă — teoria electromagnetice a lui Maxwell. Ar fi putut oare apare ideile relativității speciale dacă n-ar fi existat o teorie completă a câmpului electromagnetic — este o chestiune ce privește istoria științei; probabil, nu se va putea răspunde la ea. Ceea ce putem spune azi este că drumul istoric ce duce de la acul busolei lui Oersted la postulatele lui Einstein, este destul de clar marcat.

În capitolul acesta și în cel următor, vom urma acest drum aproape în sens invers. Asta nu înseamnă că nu respectăm istoria. Dimpotrivă, credem că acelaia care urmărește istoria acestor mari descoperiri, o reprezentare clară asupra legăturii esențiale dintre electricitate și magnetism, îi va fi de folos. Această legătură poate fi relevată foarte direct și simplu, privind din punctul de vedere al relativității speciale tot ce-am învățat pînă acum despre sarcina electrică și câmpul electric. Dar, înainte de asta, să trecem în revistă câteva fenomene, pe care ne vom strădui să le explicăm.

## 5.2. FORȚE MAGNETICE

Doi conductori paraleli, prin care trec curenți de același sens, se atrag. Forța, ce acționează asupra unității de lungime a unuia din conductori, este proporțională cu produsul intensităților celor doi curenți și invers proporțională cu distanța dintre conductori (fig. 5.1, a). Schimbînd sensul unuia din curenți, forța devine de respingere. Astfel, cele două porțiuni de conductori din figura 5.1, b, care fac parte din același circuit, tind să se despartă. Între două filamente de curent continuu există ceva asemănător cu „acțiunea la distanță”. Ea pare să nu aibă nimic comun cu o sarcină electrică statică aflată la suprafața conduc-

Fig. 5.1. (a) Conductorii paraleli străbătuți de curenți de același sens se atrag. (b) Conductorii paraleli străbătuți de curenți de sens opus se resping. (c) Punerea unei foițe metalice între conductori nu influențează asupra forțelor.





torului. Asemenea sarcini ar putea exista și conductorii ar putea avea potențiale diferite, dar forța, despre care vorbim, depinde doar de *mișcarea* sarcinilor în conductori, adică, de cei doi curenți. Dacă punem o foiță de metal între cei doi conductori, forța rămâne aceeași (fig. 5.1, c). Aceste noi tipuri de forțe, care apar când sarcinile sînt în mișcare, se numesc *forțe magnetice*.

Acul busolei lui Oersted (fig. 5.2, a) nu seamănă prea mult cu un circuit de curent continuu. Noi știm însă acum, ceea ce Ampère a intuit primul, că fierul magnetizat este plin de sarcini în continuă mișcare — de curenți electrici la scară atomică. O bobină subțire, prin care trece curentul de la o baterie (fig. 5.2, b), se comportă exact ca acul busolei aflate sub influența curentului din apropiere.

Urmărind mișcarea unei particule încărcate libere și a unui conductor parcurs de curent, nu vedem nici o diferență.

Într-un tub catodic electronii, care în mod obișnuit urmează o traiectorie dreaptă, se vor apropia sau îndepărta de un conductor străbătut de curent, aflat în exterior, în funcție de sensul curentului din conductor (fig. 5.3). În laborator, ați făcut deja cunoștință cu acest fenomen și știți că interacțiunea dintre curenți și alte sarcini în mișcare poate fi descrisă prin introducerea *cîmpului magnetic*. (Reamintiți-vă că cîmpul electric era folosit la descrierea „acțiunii la distanță” a sarcinilor aflate în repaus, exprimată prin legea lui Coulomb.) Spunem că curentului electric  $i$  se asociază un cîmp magnetic care ocupă spațiul înconjurător. Asupra unui alt curent sau asupra oricărei particule încărcate care se mișcă în acest cîmp se exercită o forță proporțională cu intensitatea cîmpului magnetic în acel punct. Pentru o particulă încărcată, forța este întotdeauna perpendiculară pe direcția vitezei particulei. Forța totală, ce acționează asupra particulei ce poartă sarcina  $q$ , este dată de expresia

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

unde  $\mathbf{B}$  este inducția cîmpului magnetic.

Fig. 5.2. Curentul ce trece prin conductor are aceeași acțiune și asupra acului busolei (a) și asupra unei bobine străbătute de curent (b).

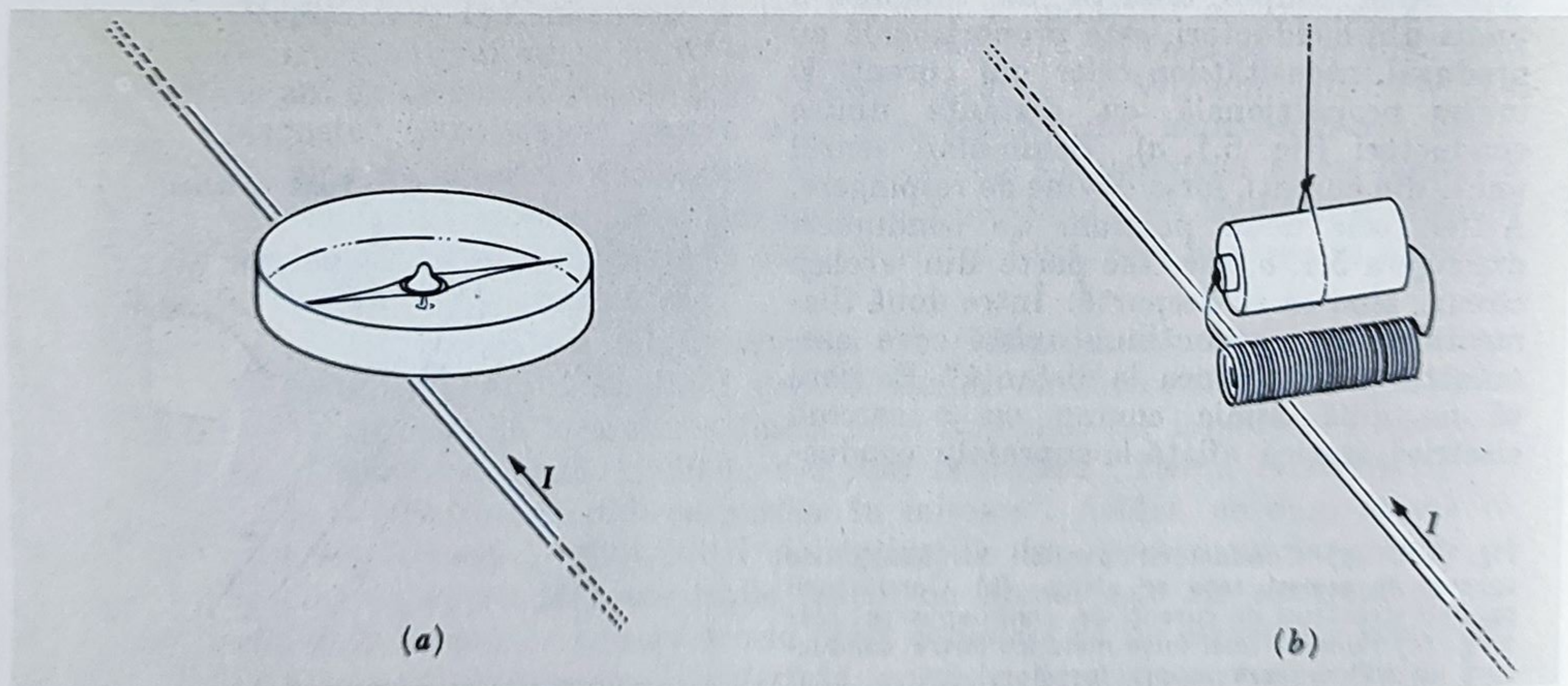




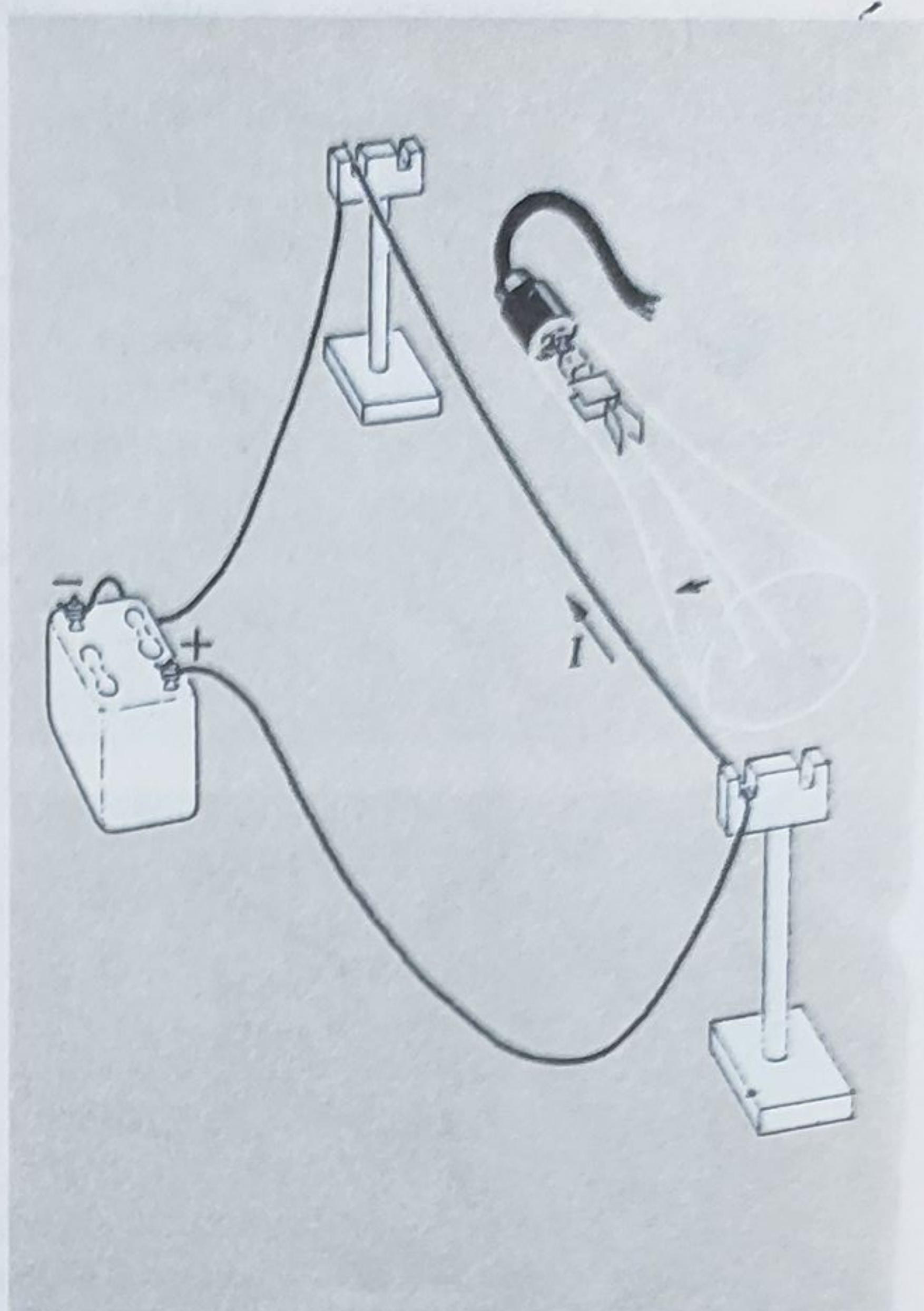
Fig. 5.3. Un exemplu de atracție a curenților de același sens (comparați cu fig. 5.1, a). Acest fenomen poate fi descris în același mod ca devierea unui fascicul de electroni de către un câmp magnetic.

Pentru definirea lui  $\mathbf{B}$  folosim ecuația (1). Inducția câmpului magnetic este un vector care determină acea parte a forței ce acționează asupra sarcinii în mișcare, care este proporțională cu viteza ei. Cu alte cuvinte, dacă se spune: „Determinați direcția și mărimea vectorului  $\mathbf{B}$  în locul cutare sau cutare“, sînt necesare următoarele operațiuni: alegeți o particulă de sarcină cunoscută  $q$ . Măsurați forța exercitată asupra lui  $q$  în repaus, pentru a determina pe  $\mathbf{E}$ . Apoi măsurați forța exercitată asupra particulei cînd are viteza  $\mathbf{v}$ ; repetați măsurătorile pentru alte direcții ale lui  $\mathbf{v}$ . Găsiți, acum, valoarea lui  $\mathbf{B}$  astfel încît înlocuind valoarea lui în ec. (1), să verifice toate aceste rezultate; aceasta va fi inducția câmpului magnetic în acel loc.

Este evident că aceasta nu explică nimic. De ce este valabilă ec. (1)? De ce putem găsi întotdeauna un  $\mathbf{B}$ , care să satisfacă această relație simplă, pentru toate valorile posibile ale vitezei? Vrem să înțelegem de ce există o forță proporțională cu viteza. Este remarcabil faptul că această forță este strict proporțională cu  $\mathbf{v}$ , iar câmpul electric nu depinde deloc de  $\mathbf{v}$ ! De ce este așa, vom vedea în paginile următoare.

### 5.3. MĂSURAREA SARCINII ÎN MIȘCARE

Cum vom proceda pentru a măsura mărimea sarcinii electrice a unei particule în mișcare? Înainte de a lămuri această problemă, n-are sens să ne întrebăm ce efect are mișcarea asupra sarcinii însăși. O sarcină poate fi măsurată numai prin efectele pe care le produce. O sarcină punctiformă  $Q$ , aflată în repaus, poate fi măsurată prin determinarea forței ce acționează asupra unei sarcini de probă  $q$ , aflată la o anumită distanță (fig. 5.4, a). Aceasta este dată de legea lui Coulomb. Dar dacă sarcina, pe care vrem s-o măsurăm, este în mișcare, ne aflăm pe un teren nesigur. Apare o direcție aparte în spațiu, direcția instantanee a mișcării. S-ar putea ca forța ce acționează asupra sarcinii de probă  $q$ , să depindă nu numai de distanța dintre cele două sarcini ci și de direcția de la  $Q$  la  $q$ . Pentru diferite poziții ale sarcinii de probă, ca în figura 5.4, b, putem observa forțe diferite. Înlocuim-





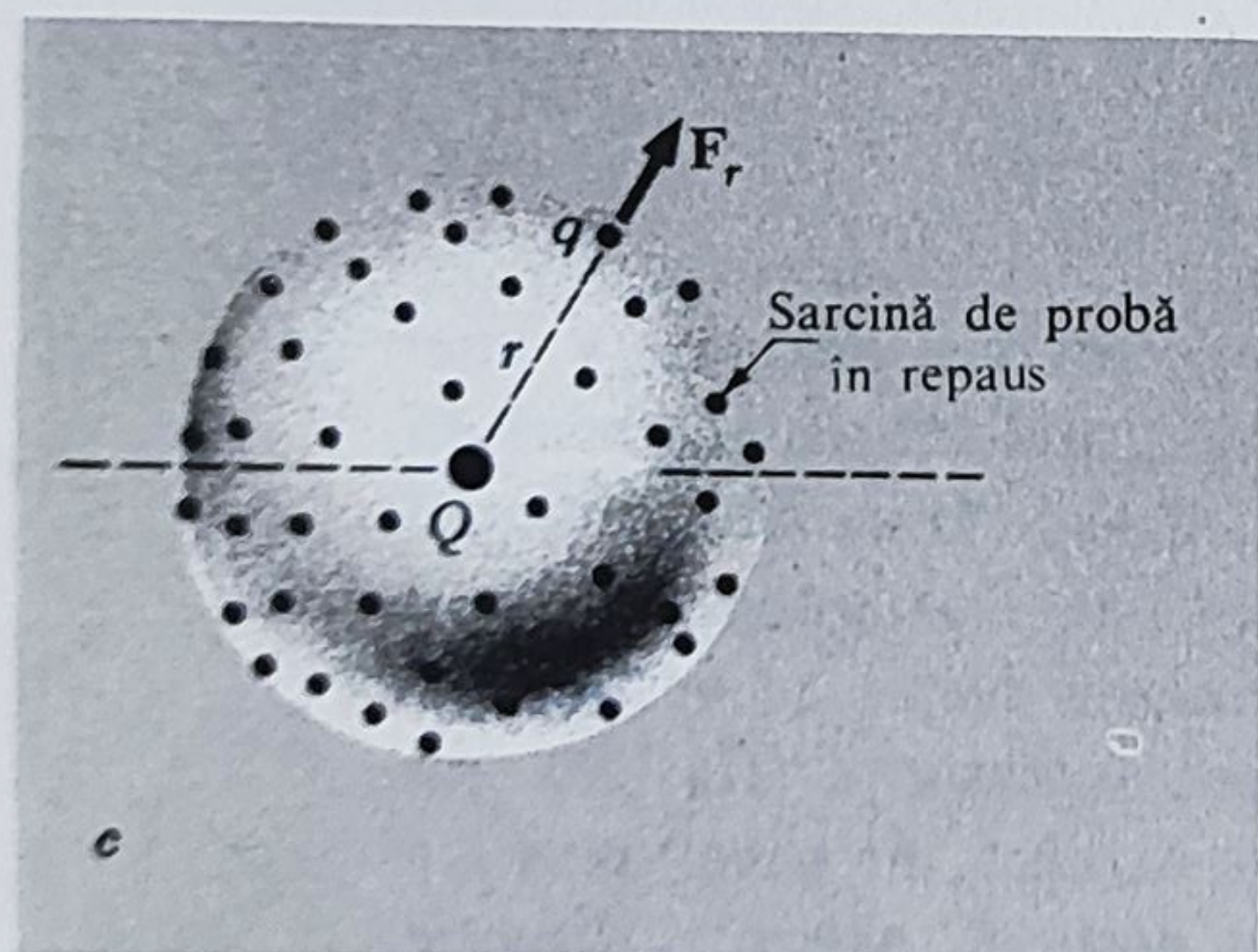
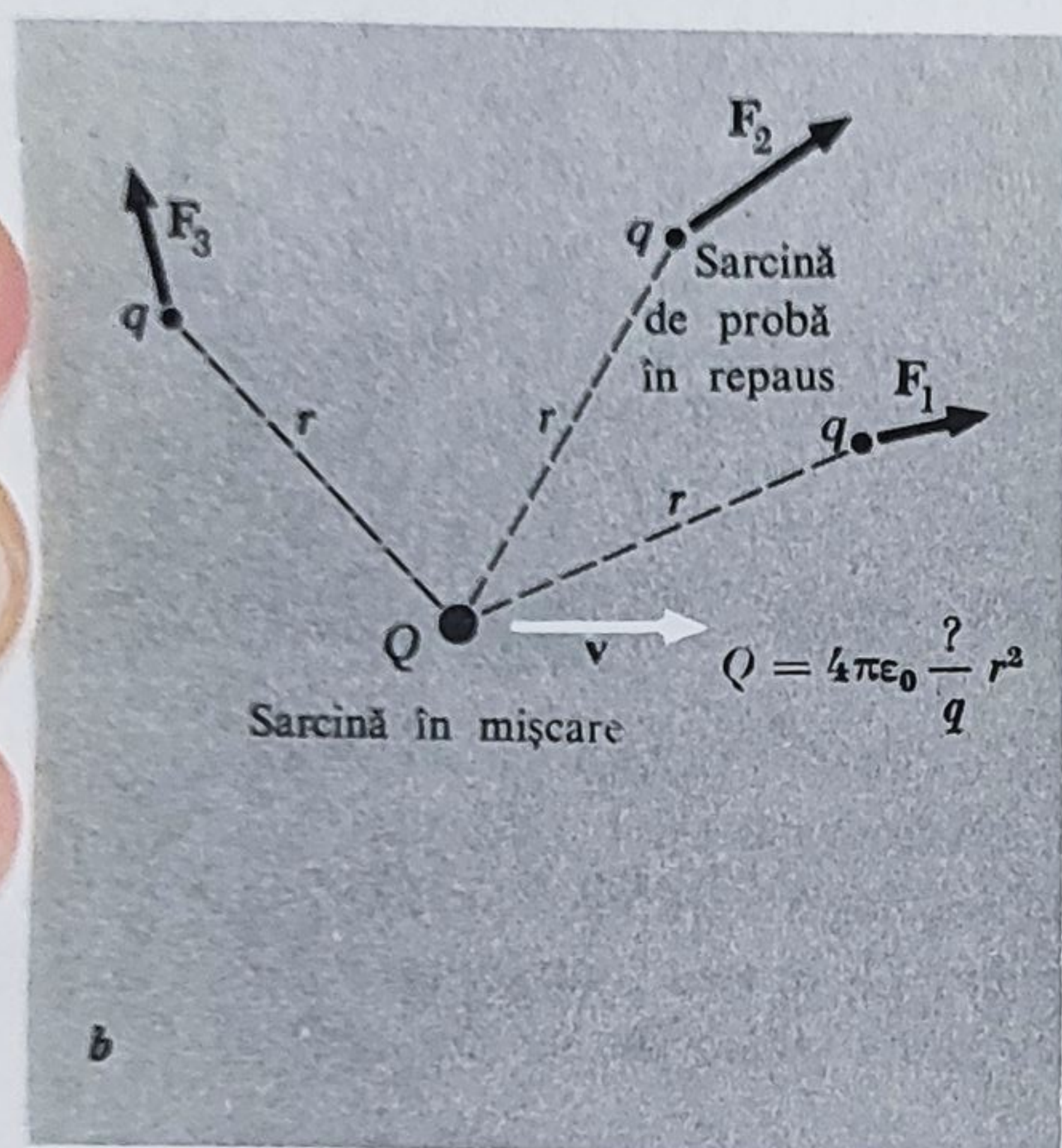
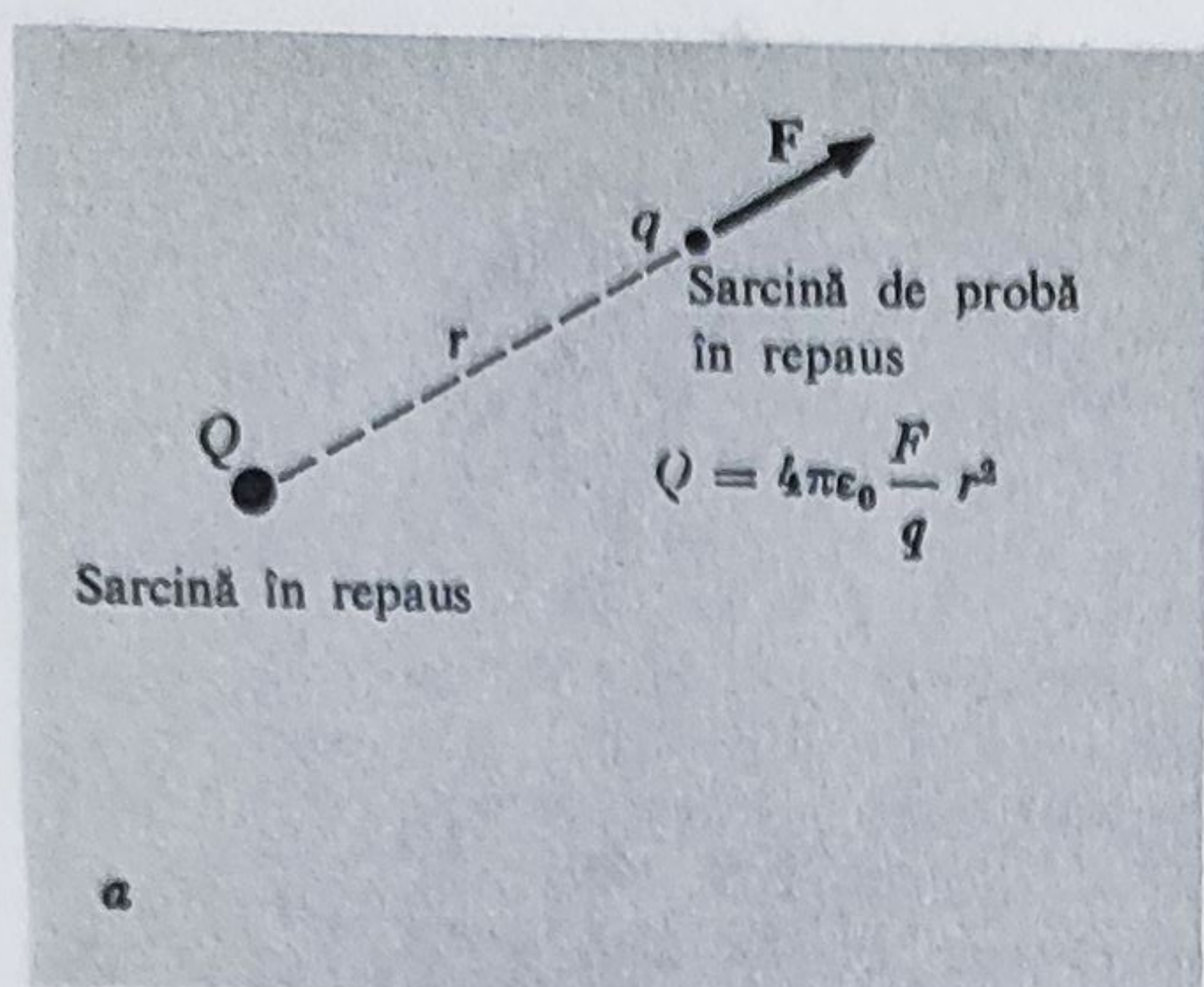


Fig. 5.4. a) Mărimea unei sarcini în repaus este determinată de forța ce acționează asupra unei sarcini de probă aflată în repaus și de legea lui Coulomb.

b) În cazul unei sarcini în mișcare, forța, după câte știm, poate depinde de poziția sarcinii de probă. Dacă este așa, nu putem folosi metoda (a).

c) În momentul trecerii lui Q prin centrul sferei pe care sînt distribuite sarcinile de probă, măsurați componenta radială a forței ce acționează asupra fiecărei sarcini și folosiți valoarea medie a lui  $F_r$ , pentru determinarea lui Q. Aceasta este echivalentă cu evaluarea integralei de suprafață a lui E.

du-le în legea lui Coulomb, vom obține diferite valori pentru una și aceeași mărime a lui Q. De asemenea, nu putem avea certitudinea că forța va fi îndreptată întotdeauna pe direcția razei vectoare  $r$ .

Pentru a lua în considerație această posibilitate, să convenim a determina pe Q prin medierea forței după toate direcțiile. Să ne imaginăm un număr infinit de mare de sarcini de probă distribuite uniform pe suprafața unei sfere (fig. 5.4, c). În momentul cînd sarcina în mișcare trece prin centrul sferei, se măsoară componenta radială a forței ce acționează asupra fiecărei sarcini de probă, folosind în calculul lui Q media acestor valori ale forței. Asta este exact operația care se face la determinarea integralei de suprafață din cîmpul electric pe întreaga sferă, la momentul  $t$ . Reținem că sarcinile de probă sînt toate în repaus; prin definiție, forța exercitată pe unitatea de sarcină  $q$  dă intensitatea cîmpului electric în acel punct. Înseamnă că legea lui Gauss și nu cea a lui Coulomb, oferă calea firească\* de determinare a mărimei sarcinii electrice a

\* Aceasta nu este singura cale posibilă. Se poate, de exemplu, alege arbitrar ca sarcinile de probă să se afle întotdeauna exact pe direcția de mișcare a sarcinii de măsurat. Sarcina astfel determinată nu va mai avea proprietățile simple amintite, iar noua teorie va fi greoaie și complicată.



unei particule sau a mai multor particule în mișcare. Această determinare se poate face după cum urmează.

Mărimea sarcinii electrice într-o regiune este dată de integrala de suprafață din intensitatea câmpului electric  $\mathbf{E}$ , pe o suprafață  $S$  ce delimitează această regiune. Această suprafață  $S$ , într-un sistem de referință  $F$ , este fixă. Intensitatea câmpului  $\mathbf{E}$ , într-un punct oarecare  $(x, y, z)$  al sistemului de referință  $F$  și la un moment oarecare  $t$ , este măsurată de forța ce acționează asupra sarcinii de probă aflată în repaus față de  $F$ , la acest moment și în acest loc. Integrala de suprafață trebuie determinată la un anumit moment  $t$ . Adică, valorile folosite pentru intensitatea câmpului sînt măsurate simultan de observatorii răspîndiți pe întreaga suprafață  $S$ . (Întrucît suprafața  $S$  este fixă în sistemul de referință  $F$ , nu apar dificultăți.) Să notăm integrala de suprafață pe  $S$ , la momentul  $t$ , prin

$$\int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}. \quad (2)$$

Cantitatea de sarcină, din interiorul suprafeței  $S$ , este determinată de valoarea integralei:

$$Q = \epsilon_0 \int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (3)$$

Ar fi surprinzător ca valoarea lui  $Q$ , astfel determinată, să depindă de dimensiunile și forma suprafeței  $S$ . Conform legii lui Gauss — pentru o sarcină în repaus, ea nu depinde. Dar putem noi fi siguri că legea lui Gauss este valabilă și pentru sarcinile în mișcare? Din fericire, da. O putem lua ca pe un fapt dovedit experimental. Această proprietate fundamentală a câmpului electric a sarcinilor în mișcare ne permite să definim sarcina din ec. (3). De acum înainte, vom putea vorbi de sarcina ce se găsește într-o regiune sau pe o particulă și înțelesul va fi bine determinat chiar dacă sarcina este în mișcare.

Toate aceste afirmații sînt ilustrate în figura 5.5. Sînt reprezentați doi protoni și doi electroni în mișcare, la un anumit moment. Este bine stabilit că integrala de suprafață pe suprafața  $S_1$ , din intensitatea câmpului electric  $\mathbf{E}$

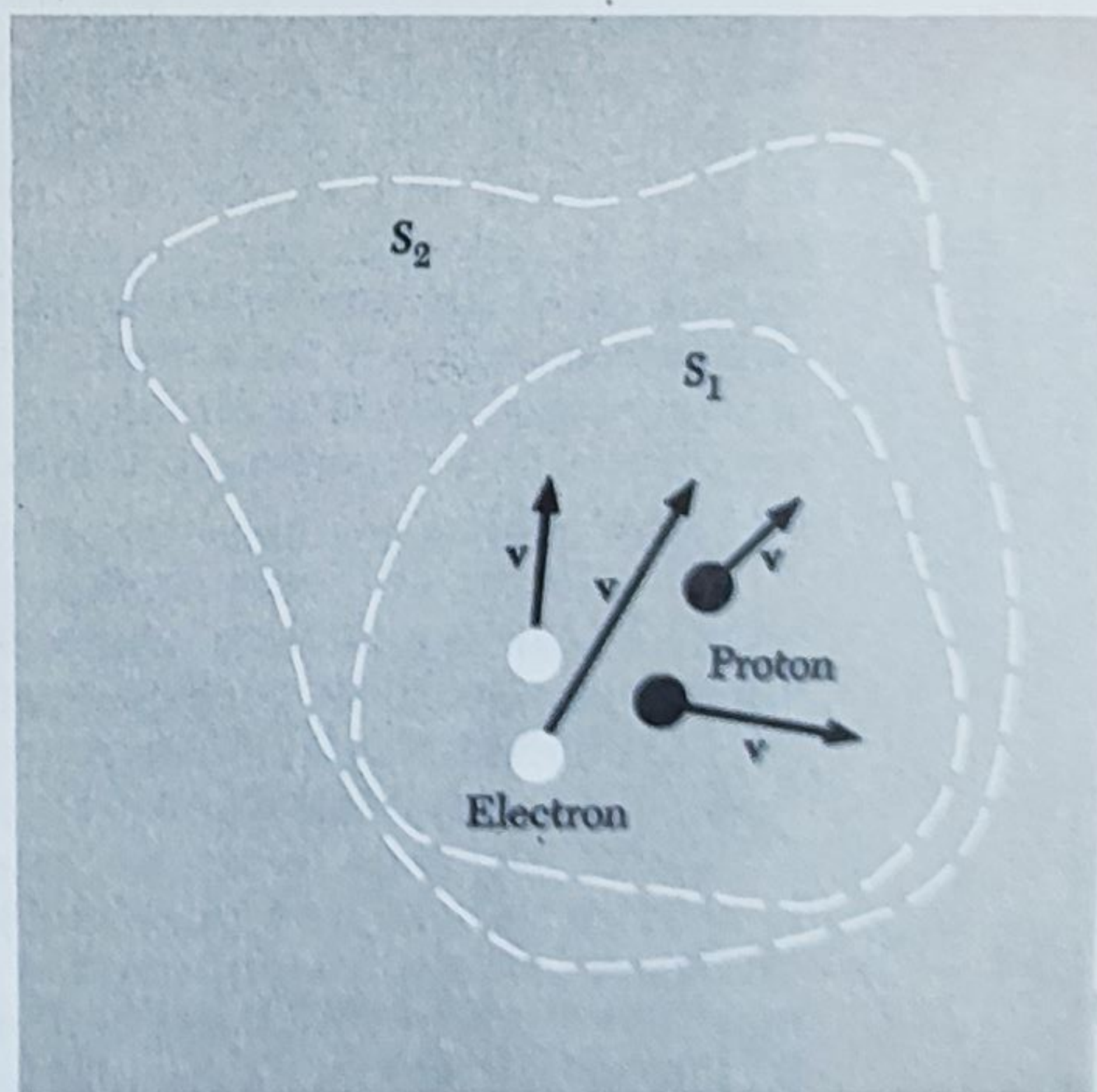


Fig. 5.5. Legea lui Gauss rămîne valabilă pentru câmpul sarcinilor în mișcare. Fluxul lui  $\mathbf{E}$  prin  $S_2$  este egal cu fluxul lui  $\mathbf{E}$  prin  $S_1$ , evaluate în același moment de timp.



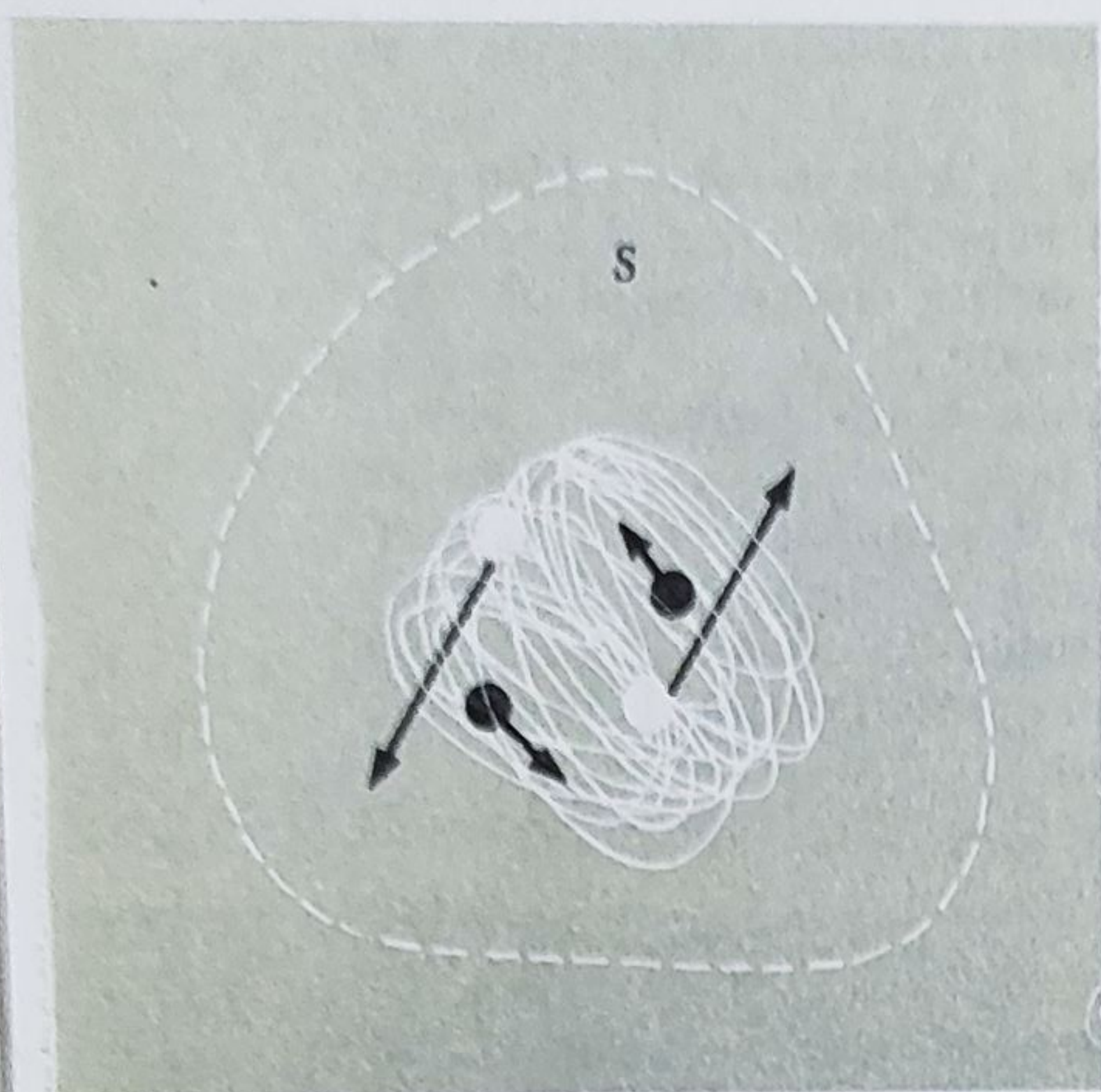


Fig. 5.6. Depinde fluxul lui  $E$  prin  $S$  de starea de mișcare a particulelor încărcate? Este integrala de suprafață pe suprafața  $S$  din  $E$ , aceeași ca în figura 5.5? Aici particulele sînt legate într-o moleculă de hidrogen.

este identic egală cu integrala de suprafață pe suprafața  $S_2$ , evaluată la același moment și că pentru determinarea sarcinii totale cuprinse în interiorul acestei regiuni, putem folosi această integrală așa cum în electrostatică, foloseam întotdeauna teorema lui Gauss. Figura 5.6 ridică o nouă problemă. Ce se întîmplă dacă aceleași particule ar avea alte viteze? Să presupunem, de exemplu, că cei doi protoni și cei doi electroni se combină formînd o moleculă de hidrogen. Sarcina totală va mai fi aceeași ca înainte?

#### 5.4. INVARIANȚA SARCINII

Este dovedit experimental că sarcina totală într-un sistem nu este schimbată de mișcarea purtătorilor de sarcină. Sîntem atît de obișnuiți cu asta încît rareori mai reflectăm cît de remarcabil și fundamental este acest fapt. Ca dovadă putem folosi neutralitatea electrică a atomilor și moleculelor.

În cap. I am descris experiența care pune în evidență neutralitatea moleculei de hidrogen și din care rezultă, cu o precizie de cel puțin  $10^{-20}$ , că sarcinile purtate de electron și proton sînt egale în mărime. Analog, s-a efectuat o experiență cu atomi de heliu. Atomul de heliu conține aceleași particule încărcate ca și molecula de hidrogen — doi protoni și doi electroni. În atomul de heliu, însă, mișcarea lor este cu totul alta. Protonii, de exemplu, în loc să se dispună lent la distanța de  $0,7 \text{ \AA}$  unul de altul, sînt strîns legați în nucleul de heliu, în care se mișcă avînd o energie cinetică de aproximativ un milion de electron-volți. Dacă mișcarea ar avea vreun efect asupra mărimii sarcinii, atunci n-ar mai exista o perfectă compensație a sarcinilor nucleului și electronilor atît în molecula de hidrogen cît și în atomul de heliu. De fapt, s-a demonstrat experimental, aproape cu aceeași precizie, că atomul de heliu este neutru.

O altă dovadă este legată de spectrul optic al izotopilor aceluiași element — atomi cu nuclee de mase diferite dar cu aceleași sarcini. Aici, întîlnim din nou o deosebire netă la mișcarea protonilor în nucleu, dar comparînd liniile spectrale a celor doi izotopi nu observăm nici o diferență care ar putea fi atribuită unei diferențe cît de mici în sarcina totală a nucleului.

În același sens, masa nu este invariantă. Știm că masa unei particule în mișcare variază de  $1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$  ori. Pentru a sublinia această diferență, în figura 5.7 este reprezentată o experiență imaginară. Cele două particule masive încărcate din cutia din dreapta, fixate la capetele barei, sînt puse în mișcare cu viteza  $v$ . Masa totală a sistemului din dreapta este mai mare



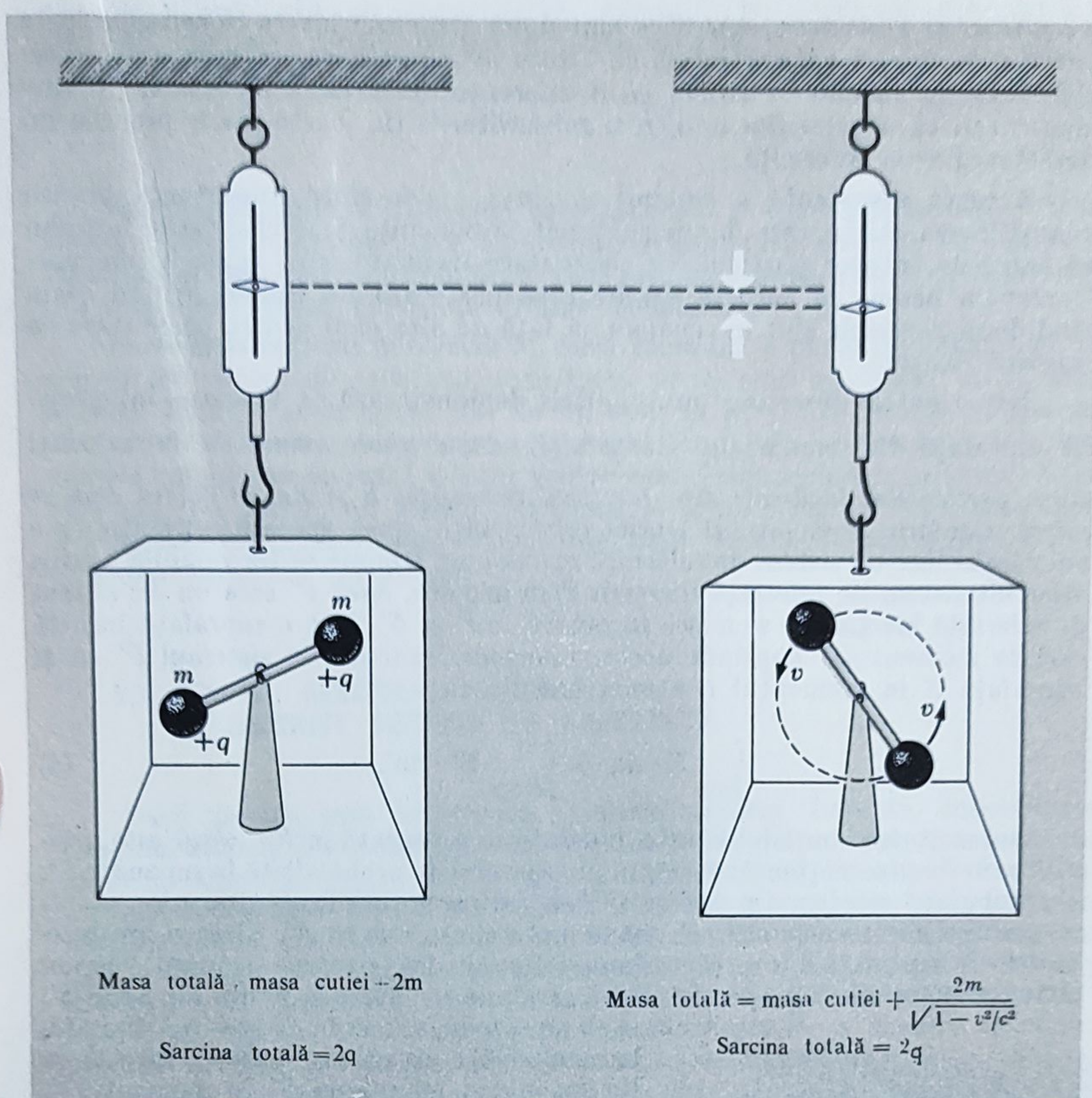


Fig. 5.7. O experiență imaginară pentru a demonstra invarianța sarcinii. Sarcina electrică din cutie poate fi determinată prin măsurarea cîmpului din jurul cutiei sau, ceea ce este același lucru, măsurînd forța exercitată asupra unei sarcini de probă aflată la o anumită distanță.

ca masa din stînga, ceea ce se poate constata fie atîrnînd cutia de un resort, fie măsurînd forța necesară pentru a o accelera.\*

Totuși, sarcina electrică totală rămîne neschimbată. O experiență reală, echivalentă cu aceasta, poate fi făcută cu un spectrograf de masă, care poate pune ușor în evidență diferența de masă dintre o moleculă de deuteriu ionizată (2 protoni, 2 neutroni, 1 electron) și un atom de heliu ionizat (tot 2 protoni,

\* Diferența între mase depinde nu numai de energia cinetică a particulelor, ci și de orice schimbări în energia potențială, de exemplu, de deformarea elastică a barei de care sînt prinse particulele. Dacă bara este perfect rigidă, această contribuție este mică în comparație cu termenul ce conține pe  $v^2/c^2$ . Încercați să arătați de ce.



2 neutroni și 1 electron). Acestea sînt două structuri foarte diferite, în care particulele componente se mișcă cu viteze foarte diferite. Diferența în energiile ambelor sisteme se relevă ca o diferență măsurabilă de masă. În sarcina electrică a celor doi ioni, nici măsurătorile de foarte mare precizie nu detectează vreo diferență.

Această invarianță a sarcinii prezintă o deosebită importanță pentru cuantificarea ei. În cap. I am subliniat importanța și curiozitatea faptului că sarcinile tuturor particulelor elementare încărcate sînt egale în mărime. Observăm acum, că această egalitate se păstrează nu numai pentru cazul cînd două particule sînt în repaus una față de alta ci și pentru orice stare de mișcare relativă.

Experiențele descrise și multe altele demonstrează că valoarea integralei de suprafață din teorema lui Gauss  $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ , *depinde numai de numărul și tipul particulelor încărcate din interiorul suprafeței  $S$  și nu de modul cum se mișcă*. Conform postulatului teoriei relativității, dacă această afirmație este adevărată într-un sistem de referință inerțial, ea trebuie să fie valabilă pentru orice alt sistem de referință inerțial. Prin urmare, dacă  $F'$  este un alt sistem de referință inerțial, ce se mișcă în raport cu  $F$  și  $S'$  este o suprafață închisă care la momentul  $t'$  cuprinde aceleași corpuri încărcate în sistemul  $F'$  ca și suprafața  $S$  la momentul  $t$ , atunci trebuie ca

$$\int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S'(t')} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{a}'. \quad (4)$$

Intensitatea cîmpului  $\mathbf{E}'$  este, bineînțeles, măsurată în  $F'$ , adică este definită prin forța ce acționează asupra unei sarcini de probă aflată în repaus în  $F'$ . Nu trebuie să pierdem din vedere diferența dintre  $t$  și  $t'$ . După cum știm, evenimente care sînt simultane în  $F$ , pot să nu fie simultane în  $F'$ . Fiecare din integralele de suprafață din ec. (4) trebuie să fie calculată pentru un anumit timp în sistemul de referință respectiv. Dacă sarcinile se găsesc la limita lui  $S$  sau  $S'$ ,

trebuie să ne convingem că în interiorul suprafeței  $S$  la momentul  $t$ , se găsesc aceleași sarcini ca cele din interiorul suprafeței  $S'$ , la momentul  $t'$ . Dacă sarcinile se află destul de departe de suprafața ce le delimitează, ca în figura 5.8 ce ilustrează relația (4), nu se pune această problemă.

Ecuația (4) este exprimarea formală a invarianței relativiste a sarcinii. Suprafața gaussiană o putem alege în orice sistem de referință inerțial, rezultatul integralei de suprafață este un număr independent de sistemul de referință. Aceasta

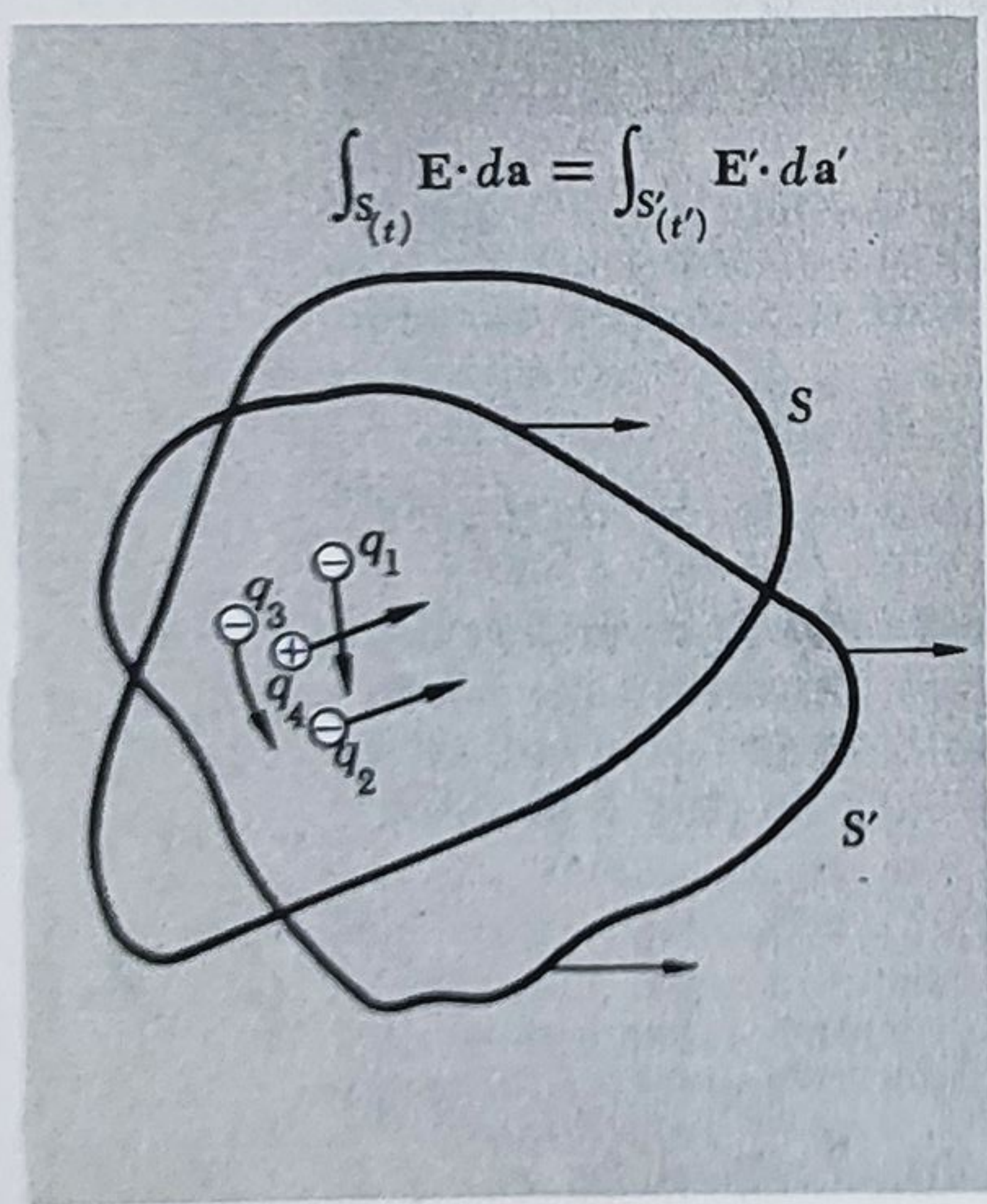


Fig. 5.8. Integrala de suprafață din  $\mathbf{E}$  pe suprafața  $S$  este egală cu integrala din  $\mathbf{E}'$  pe suprafața  $S'$ . Sarcina este aceeași în toate sistemele de referință.



nu este echivalentă cu conservarea sarcinii, pe care am discutat-o în cap. 4 și care se exprimă matematic prin ecuația

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

*Conservarea sarcinii* înseamnă că dacă luăm o suprafață închisă într-un sistem de coordonate oarecare, ce conține o cantitate oarecare de substanță încărcată și dacă nici o particulă nu trece prin suprafață, atunci sarcina totală din interiorul acestei suprafețe rămâne constantă.

*Invarianța sarcinii* înseamnă că dacă separăm o parte de substanță din oricare alt sistem de referință, cantitatea de sarcină măsurată va fi exact aceeași. Energia se conservă dar ea nu este un invariant relativist. Sarcina se conservă și este un invariant relativist. În limbajul teoriei relativiste, energia este o componentă a unui vector cuadri-dimensional, în timp ce sarcina este un scalar, un număr invariant la transformarea Lorentz. Acesta este un fapt experimental cu extinse implicații. El determină complet natura câmpului sarcinilor în mișcare.

### 5.5. CÂMPUL ELECTRIC MĂSURAT ÎN DIFERITE SISTEME DE REFERINȚĂ

Dacă sarcina este invariantă la transformarea Lorentz, intensitatea câmpului electric  $\mathbf{E}$  se transformă într-un mod bine determinat. A transforma pe  $\mathbf{E}$  înseamnă a rezolva următoarea problemă. Dacă un observator, aflat într-un sistem de referință oarecare  $F$ , măsoară intensitatea câmpului electric  $\mathbf{E}$  de ațiția și ațiția  $\text{V/m}$ , într-un punct dat din spațiu și la un moment dat, ce intensitate a câmpului va măsura observatorul, în punctul de aceleași coordonate ale spațiului și timpului, într-un alt sistem de referință inerțial  $F'$ ? Pentru un anumit tip de câmpuri, se poate răspunde la această întrebare folosind teorema lui Gauss aplicată unor sisteme simple.

În sistemul de referință  $F$  (fig. 5.9, *a*) se găsesc două straturi fixe, uniform încărcate, cu densitatea superficială de sarcină  $+\sigma$  și respectiv,  $-\sigma \text{ C/m}^2$ . Ele reprezintă două pătrate cu latura de  $b \text{ cm}$ , paralele la planul  $xy$ , iar distanța dintre ele se consideră mică în raport cu dimensiunile lor astfel încât, câmpul dintre ele poate fi considerat uniform. Intensitatea câmpului, măsurată de un observator aflat în  $F$  este, bineînțeles, egală cu  $\sigma/\epsilon_0$ . Să considerăm că un sistem inerțial  $F'$  se mișcă spre stînga față de  $F$ , cu viteza  $v$ . Pentru un observator aflat în  $F'$  „pătratele” încărcate nu mai sînt pătrate. Pe direcția  $x'$  latura lor se micșorează de la  $b$  la  $b\sqrt{1-\beta^2}$ , unde cu  $\beta$  am notat, ca de obicei, raportul  $v/c$ . Dar sarcina totală este invariantă, adică este independentă de sistemul de referință și ca urmare, densitatea de sarcină măsurată în  $F'$  va fi mai mare decît  $\sigma$  cu  $1/\sqrt{1-\beta^2}$ . În figura 5.9 sistemul este reprezentat în secțiune, văzut în  $F$  (*b*) și văzut în  $F'$  (*c*). Ce putem spune despre câmpul electric din  $F'$ , dacă tot ce știm despre câmpul electric al sarcinilor în mișcare este conținut în ec. (4)?

În primul rînd, putem fi siguri că câmpul electric în afara „sandwich”-ului este nul și uniform între straturi, cel puțin la limită, cînd suprafețele tind către infinit. Câmpul unui strat uniform, infinit nu depinde nici de distanța



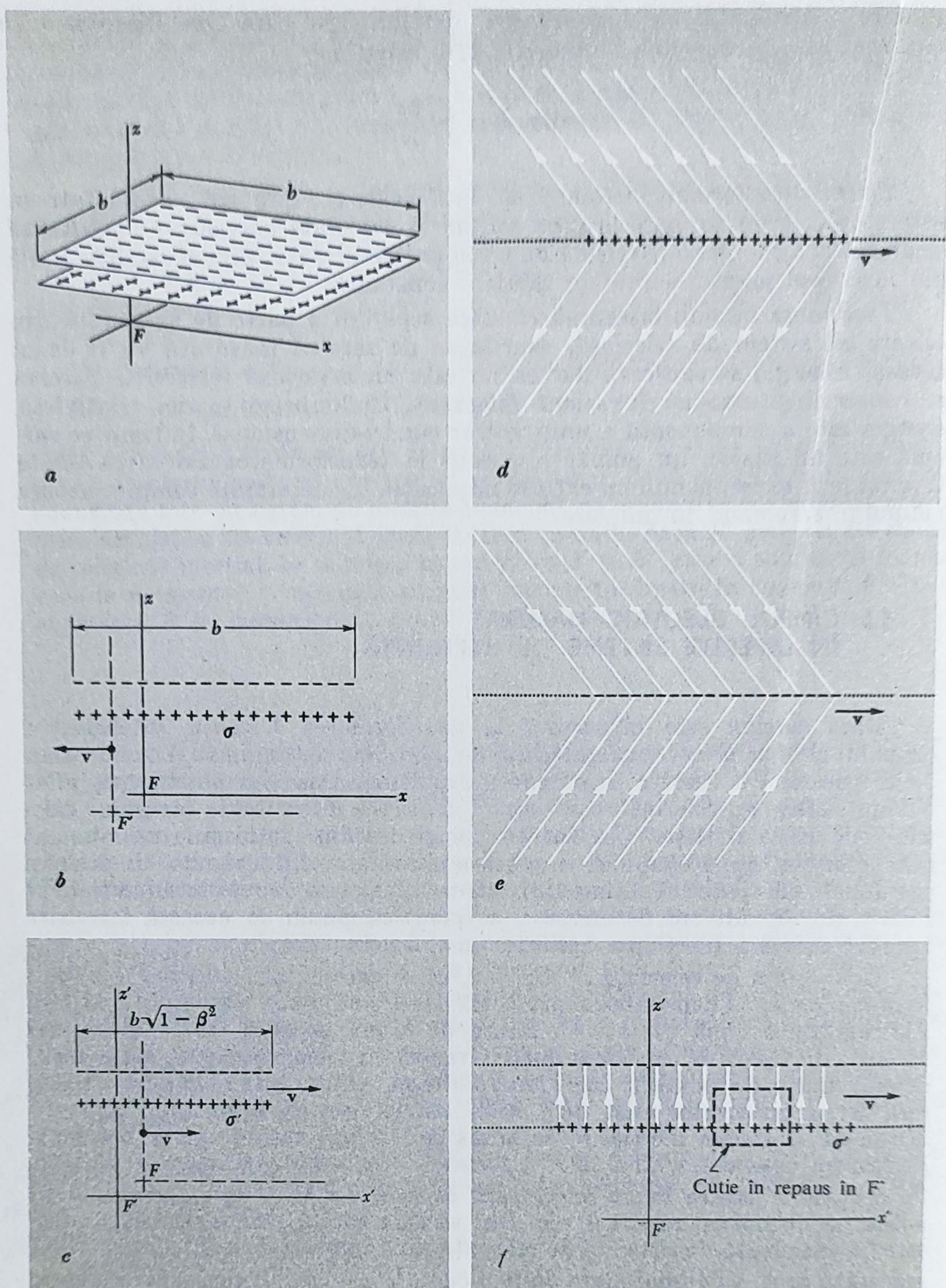


Fig. 5.9. Cum arată câmpul electric într-un alt sistem de referință (viteza relativă este perpendiculară pe direcția câmpului). a) Două straturi uniform încărcate, aflate în repaus. b) Secțiune transversală a sistemului văzută în sistemul de referință  $F$ . c) Secțiune transversală a sistemului văzută în sistemul de referință  $F'$ . d) Aspectul ipotetic al câmpului unui strat de sarcini pozitive. e) Aspectul ipotetic al câmpului unui strat de sarcini negative. f) Superpoziția câmpurilor din (d) și (e).



pînă la strat, nici de poziția punctului de-a lungul stratului. (Nimic în sistem nu permite stabilirea unei distanțe sau poziții; dacă cîmpul ar varia după o lege exponențială, ca în cazul unei sarcini punctiforme sau liniare, atunci, pe strat, ar tinde către infinit.) Totuși, putem presupune\* că cîmpul unui singur strat de sarcini pozitive, aflat în mișcare, poate arăta ca cel din figura 5.9, *d*. Dar dacă este așa, atunci cîmpul unui strat de sarcini negative va arăta ca cel din figura 5.9, *e*, iar compunerea celor două va da un cîmp ca cel reprezentat în figura 5.9, *f*.

Putem aplica legea lui Gauss unei cutii aflate în repaus în sistemul  $F'$ , a cărei secțiune transversală este arătată în figura 5.9, *f*. Cantitatea de sarcină este determinată de  $\sigma$ , iar cîmpul în exterior este nul. Conform legii lui Gauss, mărimea lui  $E'_z$  — care este singura componentă a cîmpului din interior, trebuie să fie egală cu  $\sigma'/\epsilon_0$  sau  $\frac{\sigma}{\epsilon_0} / \sqrt{1 - \beta^2}$ .

$$E'_z = \frac{E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma E_z. \quad (5)$$

(Pentru factorul  $1/\sqrt{1 - \beta^2}$ , vom folosi adeseori notația  $\gamma$ , introdusă în vol. I, cap. 11, ec. (13) care simplifică mult expresiile. Să reținem că întotdeauna  $\gamma \geq 1$ .)

Să ne imaginăm acum, o situație diferită în care straturile încărcate se află în repaus în sistemul  $F$  și sînt orientate perpendicular pe axa  $x$ , ca în figura 5.10. Observatorul din  $F$  ne comunică că intensitatea cîmpului pe direcția lui  $x$  este  $E_x = \sigma/\epsilon_0$ . În acest caz, densitatea de sarcină, observată în sistemul  $F'$  este *aceeași* cu cea observată în  $F$ . Straturile nu s-au contractat, doar distanța dintre ele s-a micșorat, dar ea nu intervine în determinarea cîmpului. De astă dată, aplicînd legea lui Gauss cutiei aflate în repaus în  $F'$ , găsim:

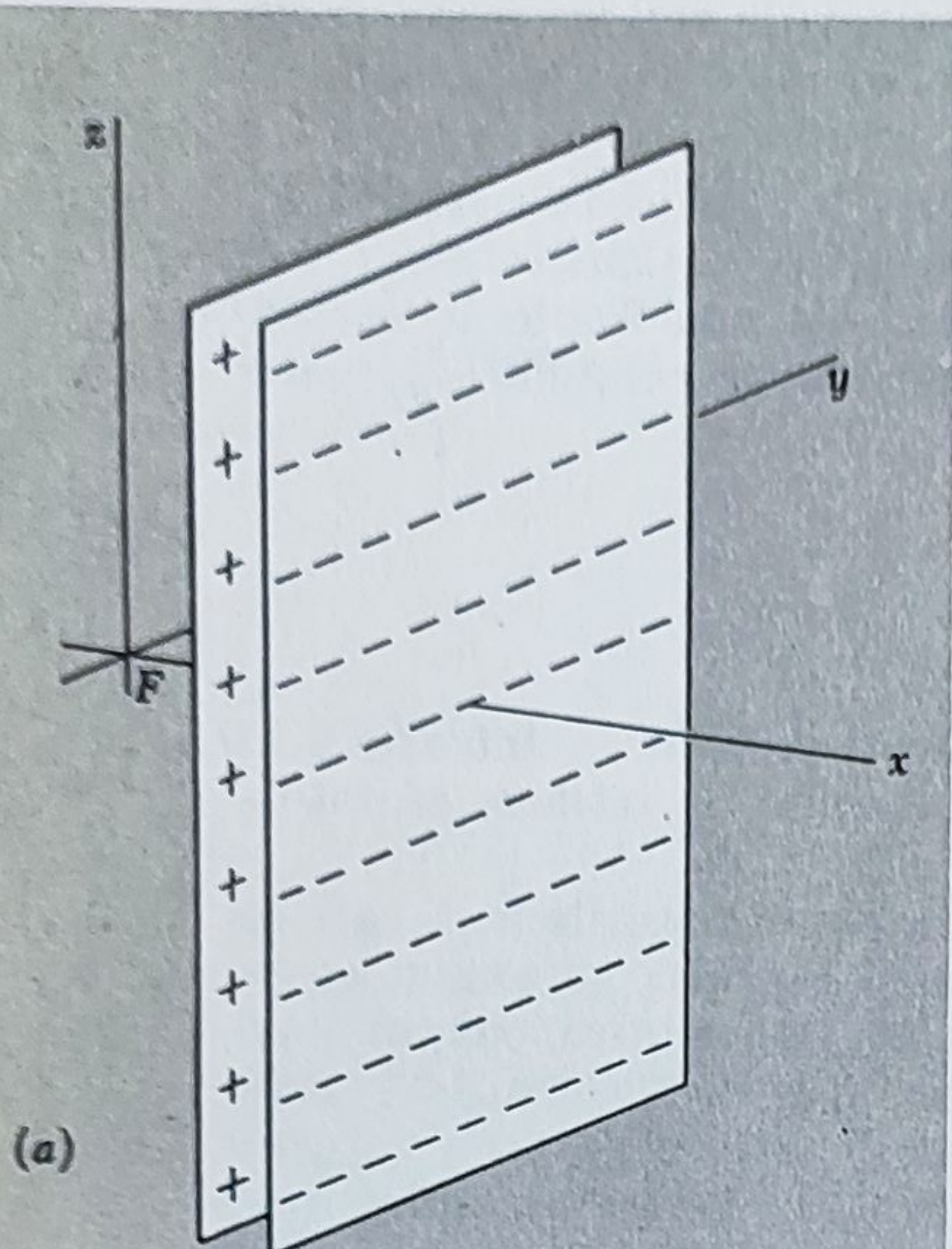
$$E'_x = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_x. \quad (6)$$

Toate acestea sînt foarte adevărate pentru distribuția simplă de sarcini aleasă; dar sînt oare concluziile noastre general valabile? Această întrebare ne introduce în miezul noțiunii de *cîmp*. Dacă intensitatea cîmpului electric  $E$ , într-un punct de coordonate spațiu-timp, are un înțeles bine determinat, atunci  $E$ , determinat într-un punct de aceleași coordonate spațiu-timp, dar într-un alt sistem de referință, nu poate depinde de natura surselor ce produc cîmpul, oricare ar fi acestea. Cu alte cuvinte, un observator aflat în  $F$ , care măsoară cîmpul din vecinătatea sa, la un anumit moment, trebuie să poată prezice, *pe baza acestor măsurători*, ce măsoară alți observatori, aflați în alte sisteme de referință, într-un punct ce are aceleași coordonate spațiu-timp. Dacă n-ar fi așa, noțiunea de cîmp ar fi inutilă. Demonstrarea acestei afirmații reprezintă confirmarea concordanței dintre teoria cîmpului construită de noi și experiență.

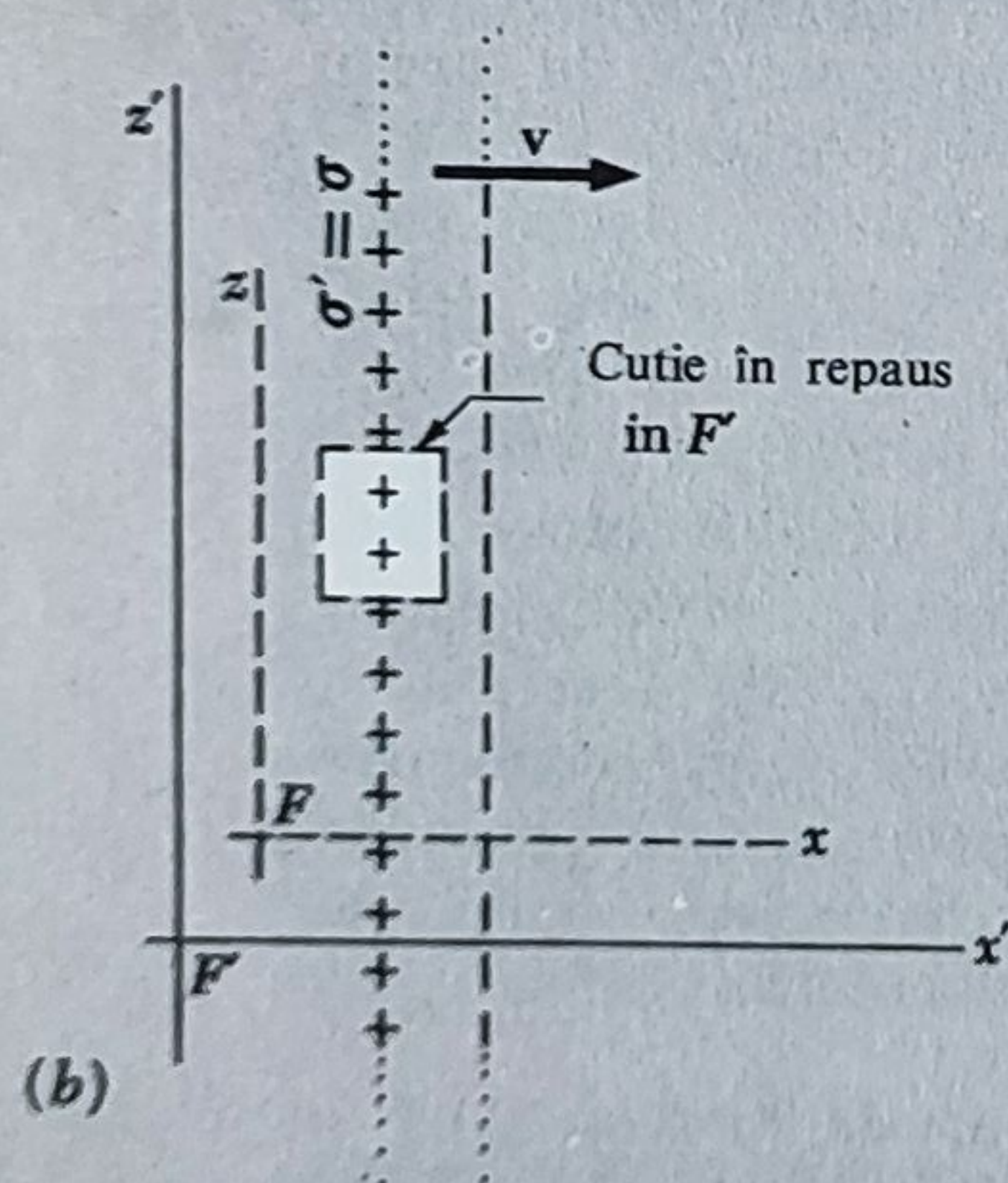
\* Să ne reamintim că, în sistemul  $F'$ , acest strat de sarcini se mișcă; încă nu avem garanția că cîmpul creat de el va fi la fel cu cel creat de un strat aflat în repaus. De fapt, reiese că cîmpul electric al unui strat de sarcini în mișcare este perpendicular pe strat, total diferit de cîmpurile ipotetice din figura 5.9, *d* și *e*.



Privite în această lumină, relațiile exprimate de ecuațiile (5) și (6) capătă o semnificație mult mai largă decât în cazul particular al sarcinilor distribuite pe straturi paralele. Să considerăm o distribuție oarecare de sarcini, fiecare porțiune aflându-se în repaus în raport cu sistemul  $F$ . Dacă un observator



(a)



(b)

din  $F$  măsoară pe direcția  $z$ , intensitatea câmpului  $E_z$ , atunci un observator din  $F'$  va obține, pentru un punct de aceleași coordonate spațiu-timp, intensitatea câmpului  $E'_z = \gamma E_z$ . Adică în urma măsurării lui  $E'_z$  el va obține un număr, care este mai mare decât numărul obținut de observatorul din  $F$  pentru  $E_z$ , cu un factor  $\gamma$ . Pe de altă parte, dacă observatorul din  $F$  măsoară intensitatea câmpului  $E_x$  pe direcția  $x$  — direcția vitezei cu care  $F'$  se mișcă față de  $F$ , atunci observatorul din  $F'$  comunică o intensitate  $E'_x$  egală cu  $E_x$ . Evident, direcțiile  $y$  și  $z$  sînt echivalente, ambele fiind perpendiculare pe viteza  $v$ . Tot ce-am spus pentru  $E'_z$  este valabil și pentru  $E'_y$ . Oricare ar fi direcția lui  $E$  în sistemul  $F$ , o putem considera ca rezultanta intensităților de pe direcțiile  $x$ ,  $y$  și  $z$  și din transformarea fiecărei componente să putem calcula vectorul intensitate  $E'$  în același punct din  $F'$ . Să sintetizăm acestea astfel încît să fie valabile pentru mișcarea relativă în orice direcție: Sarcinile aflate în repaus în sistemul  $F$  constituie sursa câmpului  $E$ . Fie sistemul  $F'$  care se mișcă cu viteza  $v$  față de  $F$ . Într-un punct oarecare din  $F$ , descompunem câmpul  $E$  într-o componentă longitudinală  $E_{\parallel}$ , paralelă cu  $v$  și o componentă transversală  $E_{\perp}$ , perpendiculară pe direcția lui  $v$ . În punctul de aceleași coordonate spațiu-timp din sistemul  $F'$ , câmpul  $E'$  va fi descompus în  $E'_{\parallel}$  și  $E'_{\perp}$ ,  $E'_{\parallel}$  fiind paralel cu  $v$  și  $E'_{\perp}$  perpendicular pe ea. Am arătat că

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel} \\ E'_{\perp} &= \gamma E_{\perp} \end{aligned} \quad (7)$$

Concluzia noastră este valabilă doar pentru câmpurile sarcinilor ce se află în repaus în  $F$ . Curînd vom vedea că dacă sarcinile se mișcă în  $F$ , pentru a putea pre-

Fig. 5.10. Câmpul electric într-un alt sistem de referință (viteza relativă este paralelă cu câmpul): a) În sistemul de referință  $F$ , b) Secțiune transversală în sistemul de referință  $F'$ .



vedea câmpul din  $F'$ , trebuie cunoscute două câmpuri în  $F$  — electric și magnetic. Deocamdată, am obținut un rezultat util, care ne este suficient oricând avem de-a face cu sisteme de referință inerțiale în care toate sarcinile se găsesc în repaus. Vom folosi acest rezultat pentru a studia câmpul electric al unei sarcini punctiforme ce se mișcă cu viteză constantă.

### 5.6. CÂMPUL UNUI PURTĂTOR PUNCTIFORM DE SARCINĂ CE SE MIȘCĂ CU VITEZĂ CONSTANTĂ

Purtătorul de sarcină punctiform  $Q$  se află în repaus în originea sistemului de coordonate  $F$  (fig. 5.11, a). Intensitatea câmpului electric  $E$  în fiecare punct este  $Q/r^2$  și este îndreptată radial dinspre sarcină spre exterior. În planul  $xz$ , în orice punct  $(x, z)$  componentele sale sînt

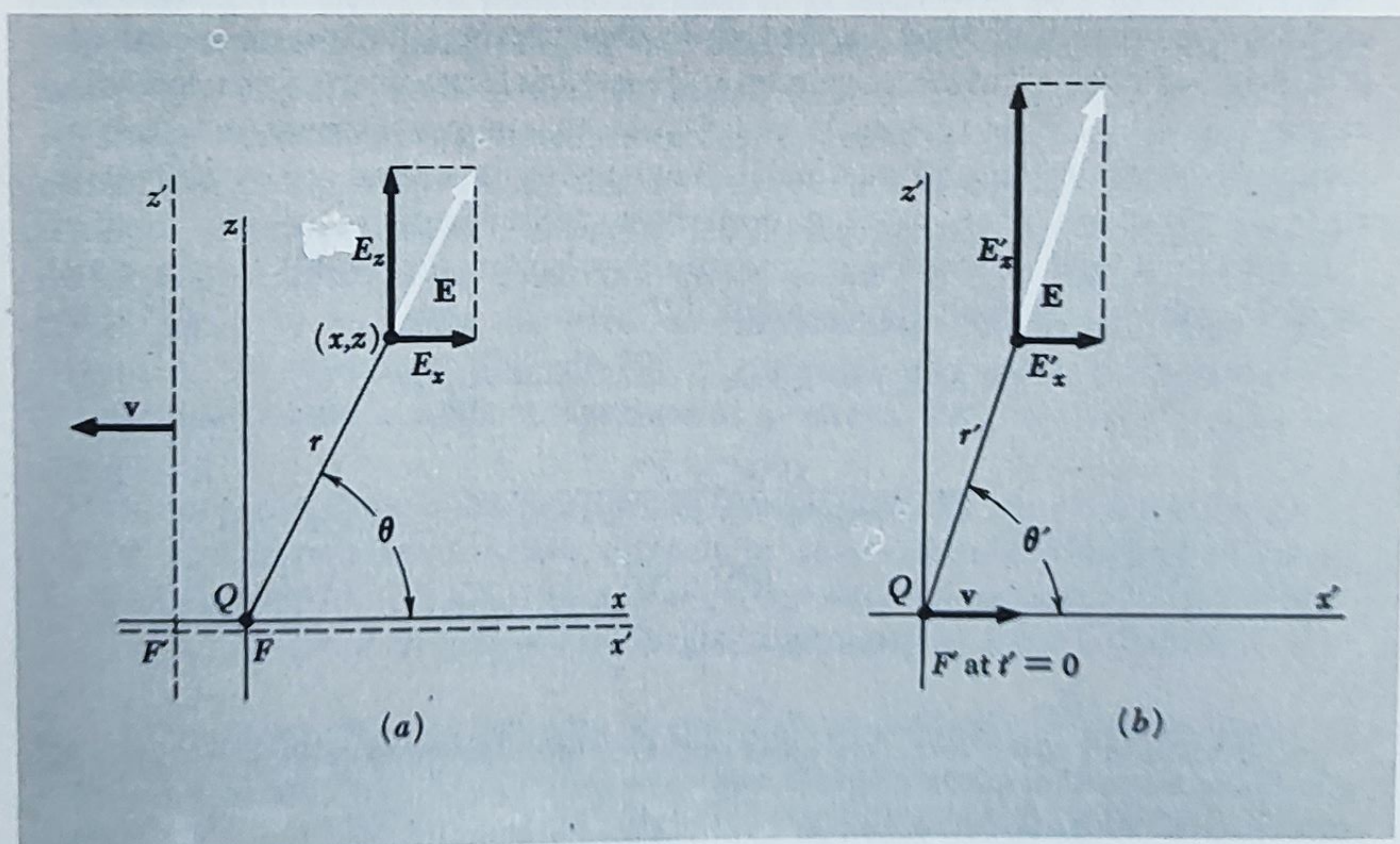
$$\begin{aligned} E_x &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{3/2}} \\ E_z &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (8)$$

Fie ca sistemul  $F'$  să se miște în sensul negativ al axei  $x$ , cu viteza  $v$ . Relațiile dintre coordonatele unui eveniment sau coordonatele spațiu-timp a două puncte, în cele două sisteme de referință sînt următoarele:

$$x = \gamma(x' - \beta ct') \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \gamma\left(t' - \frac{\beta x'}{c}\right). \quad (9)$$

Fig. 5.11. Câmpul electric al unei sarcini punctiforme:

- a) într-un sistem în care sarcina este în repaus;  
b) într-un sistem în care sarcina se mișcă cu viteză constantă.





Aceasta este transformarea Lorentz, dată în vol. I, cap. 11, ec. (15). Semnul minus din aceste ecuații apare datorită faptului că, privit din  $F$ , sistemul  $F'$  se mișcă în sensul negativ al axei  $x$ . Ceasurile au fost puse la zero când punctele  $x = 0$  și  $x' = 0$  coincid.

Conform ecuațiilor (5) și (6),  $E'_z = \gamma E_z$  și  $E'_x = E_x$ . Folosind ecuațiile (8) și (9), putem exprima componentele  $E'_z$  și  $E'_x$  în funcție de coordonatele sistemului  $F'$ . Pentru momentul  $t' = 0$ , când  $Q$  trece prin originea sistemului de coordonate  $F'$ , avem:

$$\begin{aligned} E'_x = E_x &= \frac{\gamma Q x'}{4\pi\epsilon_0[(\gamma x')^2 + z'^2]^{3/2}} \\ E'_z = E_z &= \frac{\gamma Q z'}{4\pi\epsilon_0[(\gamma x')^2 + z'^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (10)$$

Înainte de toate, să observăm că  $E'_z/E'_x = z'/x'$ . Asta înseamnă că vectorul  $\mathbf{E}'$  formează cu axa  $x'$  același unghi ca și vectorul  $\mathbf{r}'$ . Prin urmare, vectorul  $\mathbf{E}'$  este îndreptat radial, prin exterior, de-a lungul dreptei ce trece prin poziția instantanee a lui  $Q$ , ca în figura 5.11, b. Reflectați o clipă asupra acestei concluzii! Înseamnă că dacă sarcina  $Q$  trece prin originea sistemului notat cu „prim“, la ora 12<sup>00</sup> fix (timpul „prim“), un observator, care staționează undeva în sistemul „prim“, raportează că la ora 12<sup>00</sup> în vecinătatea sa, intensitatea câmpului electric era îndreptată după direcția razei din originea sistemului. La prima vedere, asta aduce cu o transmitere instantanee de informație! Cum poate ști un observator, aflat la o distanță de o milă, unde se găsește particula în acest moment? Efectiv, nu poate. Dar nu despre asta era vorba. Reamintiți-vă că această particulă se mișcă dintotdeauna cu viteză constantă și după „orarul ei de zbor“ trebuia să treacă la amiază prin originea sistemului de coordonate. Această informație rămânea valabilă multă vreme. Dacă ne referim la cauză și efect, câmpul observat este determinat de istoria trecutului particulei. Vom vedea în curând, ce se întâmplă când în orarul de zbor apare o schimbare neprevăzută.

Pentru a găsi intensitatea câmpului, calculăm  $E'^2_x + E'^2_z$  care este egală cu pătratul intensității câmpului,  $E'^2$ .

$$\begin{aligned} E'^2 &= E'^2_x + E'^2_z = \frac{\gamma^2 Q^2 (x'^2 + z'^2)}{4\pi\epsilon_0[(\gamma x')^2 + z'^2]^3} = \\ &= \frac{Q^2 (x'^2 + z'^2)}{4\pi\epsilon_0 \gamma^4 (x'^2 + z'^2 - \beta^2 z'^2)^3} = \\ &= \frac{Q(1 - \beta^2)^2}{4\pi\epsilon_0 (x'^2 + z'^2)^2 \left(1 - \frac{\beta^2 z'^2}{x'^2 + z'^2}\right)^3} \end{aligned} \quad (11)$$

(Aici, folosirea lui  $\beta$  „curăță“ expresia.) Fie  $r'$ , distanța de la sarcina  $Q$  — ce se găsește la momentul dat în origine — la un punct  $(x', z')$ , în care se măsoară intensitatea câmpului  $r' = (x'^2 + z'^2)^{1/2}$ . Fie  $\theta'$ , unghiul dintre această rază



vectoare și viteza sarcinii  $Q$  care se mișcă în sensul pozitiv al axei  $x'$ , în sistemul  $F'$ . Întrucît  $z' = r' \sin \theta'$ , intensitatea cîmpului poate fi scrisă sub forma:

$$E' = \frac{Q(1 - \beta^2)}{4\pi\epsilon_0 r'^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}} \quad (12)$$

Originea sistemului de coordonate a fost aleasă arbitrar, iar planul  $x'z'$  nu se deosebește cu nimic de celelalte plane ce trec prin axa  $x'$ . Prin urmare, putem generaliza afirmația că, cîmpul electric al unei sarcini în mișcare uniformă, la un moment dat de timp, este îndreptat radial, pornind de la poziția instantanee a sarcinii, în timp ce mărimea lui este dată de ec. (12), în care  $\theta'$  este unghiul dintre direcția de mișcare a sarcinii și raza vectorie de la poziția instantanee a sarcinii pînă la punctul de observație.

Pentru viteze mici, expresia intensității cîmpului se reduce la  $E' \approx \approx Q/4\pi\epsilon_0 r'^2$  și practic, la orice moment, este același cu cîmpul unei sarcini aflate în repaus în  $F'$ , în punctul în care se găsește  $Q$  în acel moment. Dar dacă  $\beta^2$  nu este neglijabil, cîmpul este mai intens în direcția perpendiculară pe direcția mișcării decît în direcția mișcării, la aceeași distanță de sarcină.

Dacă am reprezenta intensitatea cîmpului, așa cum se obișnuiește, prin densitatea liniilor de forță, liniile tind să se concentreze într-un disc perpendicular pe direcția mișcării. În figura 5.12 este arătată densitatea liniilor de forță provenite de la o sarcină ce se mișcă pe direcția  $x'$ , cu viteza  $v/c = 0,866$ , în punctele în care ele intersectează suprafața unei sfere unitate. O reprezentare mai simplă a cîmpului este dată în figura 5.13 în care este redată o secțiune a cîmpului și cîteva linii de cîmp aflate în planul  $x'z'$ .

Acest cîmp electric are proprietăți remarcabile. El nu prezintă simetrie sferică, ceea ce nu este de mirare, întrucît în acest sistem de referință există o direcție preferată — direcția de mișcare a sarcinii. De asemenea, acest cîmp nu poate fi produs de nici o distribuție staționară de sarcini, indiferent de

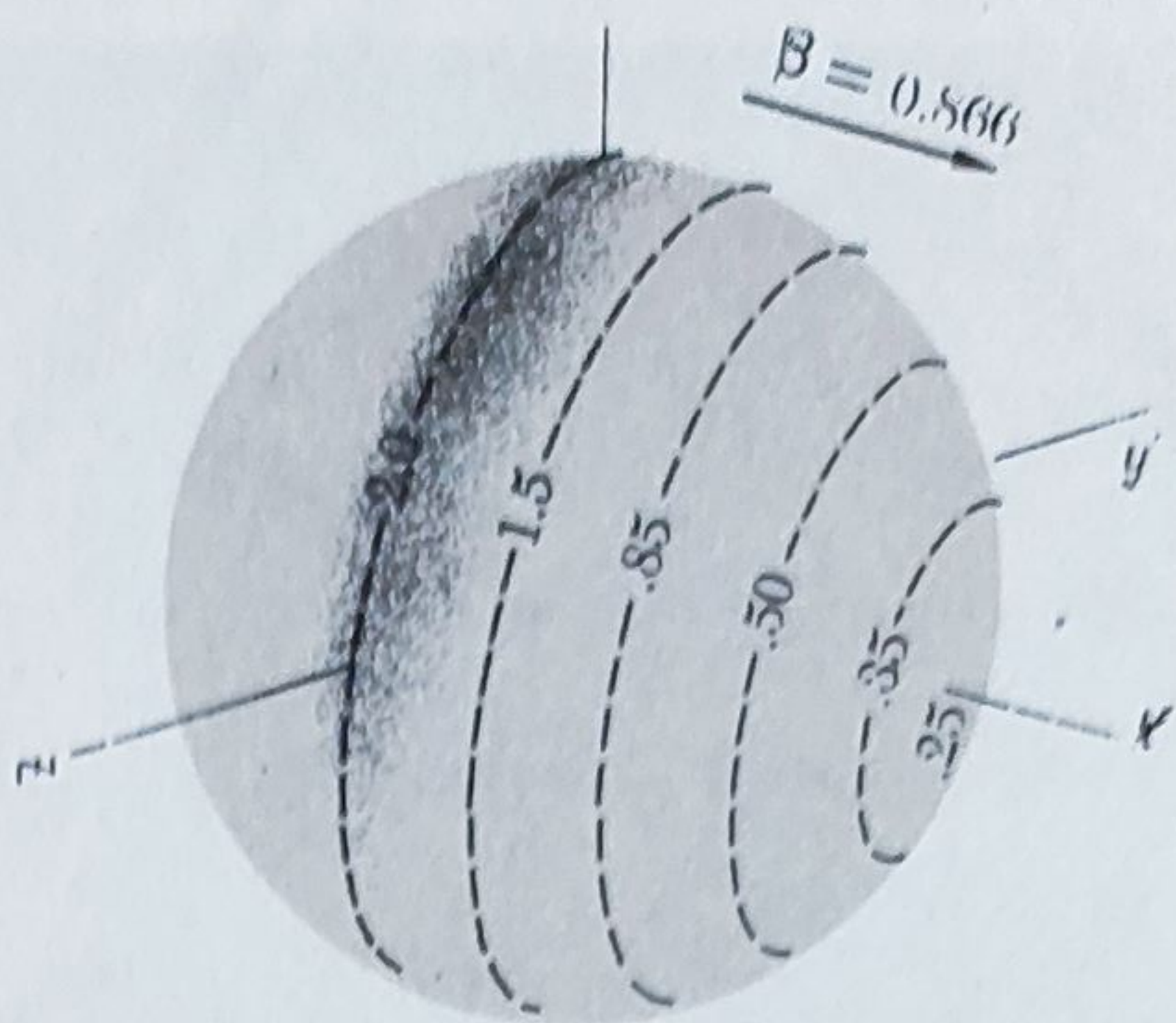


Fig. 5.12. Intensitatea cîmpului unei sarcini în mișcare, în diferite direcții. În acest moment sarcina trece prin originea sistemului de referință  $x', y', z'$ . Numerele reprezintă raportul dintre intensitatea cîmpului și mărimea  $Q/r'^2$ .

\* Într-o diagramă bidimensională ca cea din figura 5.13, este imposibilă reprezentarea corectă a intensității cîmpului prin densitatea liniilor de forță. Chiar dacă n-am întrerupe arbitrar cîteva linii, densitatea liniilor din figură va scădea proporțional cu  $1/r'$ , iar intensitatea cîmpului, pe care ne străduim s-o reprezentăm, scade proporțional cu  $1/r'^2$ ; ca urmare, figura 5.13 dă numai o idee calitativă asupra variației lui  $E'$  cu  $r'$  și  $\theta'$ .



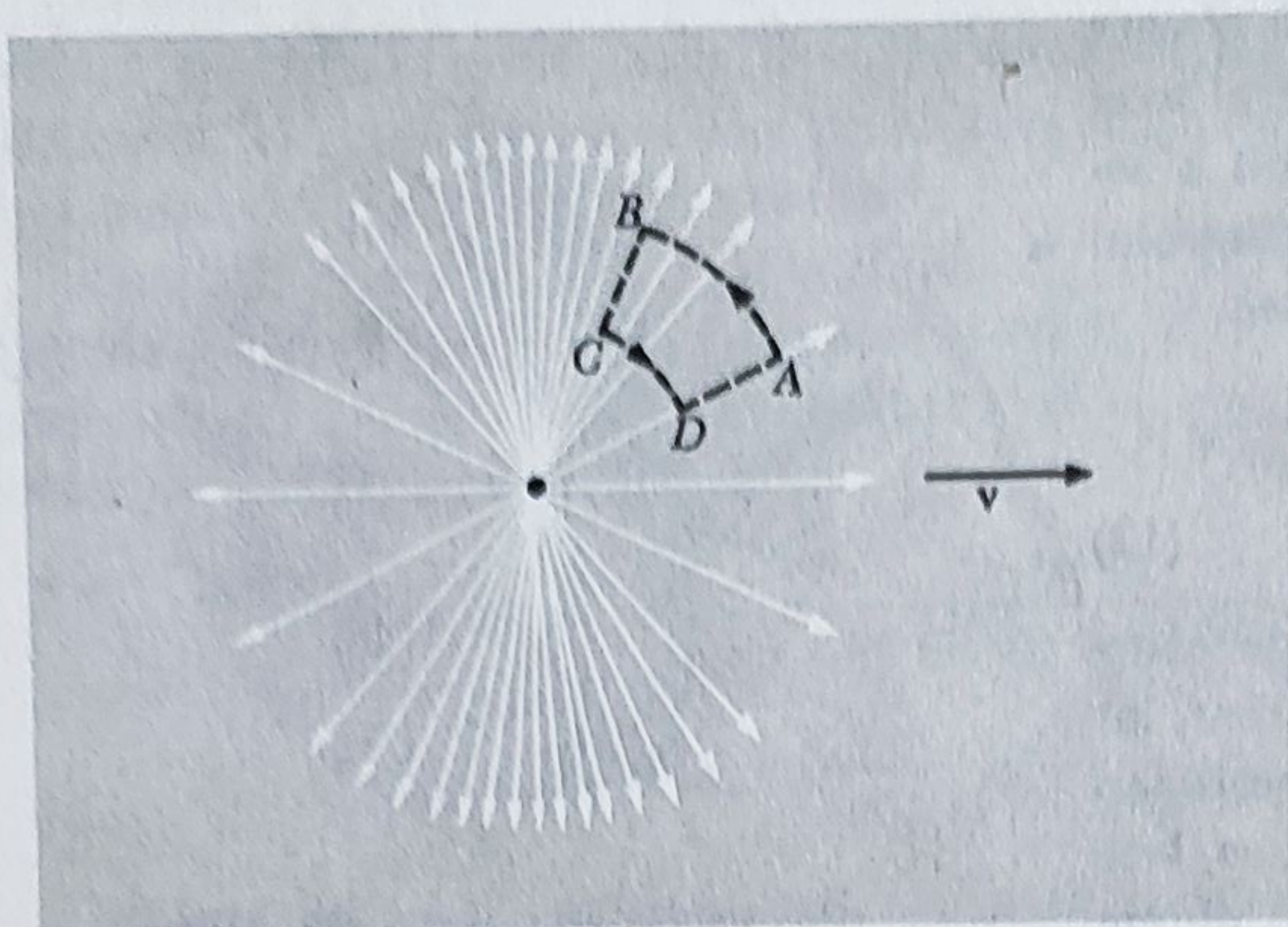


Fig. 5.13. O altă reprezentare a câmpului unui purtător de sarcină aflat în mișcare uniformă.

forma pe care ar avea-o. Din această cauză, în acest câmp integrala de linie din  $E'$  este *diferită de zero* pe orice drum închis. Să luăm, de exemplu, drumul închis  $ABCD$  din figura 5.13. Arcele circulare nu aduc nici o contribuție la integrala de linie, ele fiind perpendiculare pe câmp; pe porțiunile radiale, câmpul în lungul lui  $BC$  este mai intens decât în lungul lui  $DA$ , astfel încât *circulația* din  $E'$  pe acest drum este diferită de zero. Dar nu uitați că acesta nu este un câmp *electrostatic*. Întrucât sarcina sursă se mișcă în orice punct al sistemului  $F'$ , intensitatea câmpului electric  $E'$  variază în timp.

În figurile 5.14 și 5.15 se reprezintă câmpul electric la momente de timp bine determinate, observat în sistemul de referință în care electronul se mișcă cu viteză constantă, în direcția axei  $x$ .<sup>\*</sup> În figura 5.14, viteza electronului este  $0,33\ c$  și prin urmare, energia sa cinetică (vol. I, cap. 12) în jur de  $30\ 000\ \text{eV}$  ( $30\ \text{keV}$ ). Valoarea lui  $\beta^2$  este  $1/9$  și câmpul electric diferă puțin de cel al unei sarcini aflate în repaus. În figura 5.15, viteza este  $0,8\ c$ , corespunzând unei energii cinetice de  $335\ \text{keV}$ . Dacă unitatea de timp, pentru fiecare diagramă, se ia  $1,0 \cdot 10^{-10}\ \text{s}$ , atunci distanțele vor fi reprezentate în „mărime naturală”. Bineînțeles, diagrama este valabilă pentru orice particulă încărcată ce se mișcă cu viteza egală cu fracțiunea indicată din viteza luminii. Menționăm energiile echivalente pentru un electron, pentru a reaminti cititorului că vitezele relativiste nu sînt neobișnuite în laborator.

## 5.7. CÂMPUL UNUI PURTĂTOR DE SARCINĂ LA PORNIRE ȘI OPRIRE

Trebuie să ne fie clar că terminologia utilizată de *viteză constantă*, înseamnă o mișcare cu viteză constantă pe o dreaptă ce se întinde la infinit.

Ce se întâmplă dacă electronul, pînă a ajunge în câmpul nostru vizual la momentul  $t = 0$ , n-ar fi parcurs o distanță mare pe axa  $x$  negativă? Să

<sup>\*</sup> Pînă acum am notat cu „prim” sistemul în care sarcina se mișcă. Acum, coordonatele din sistemul în care se mișcă sarcina, le vom nota cu  $x, y, z$  pentru a nu încălca relațiile ce urmează.



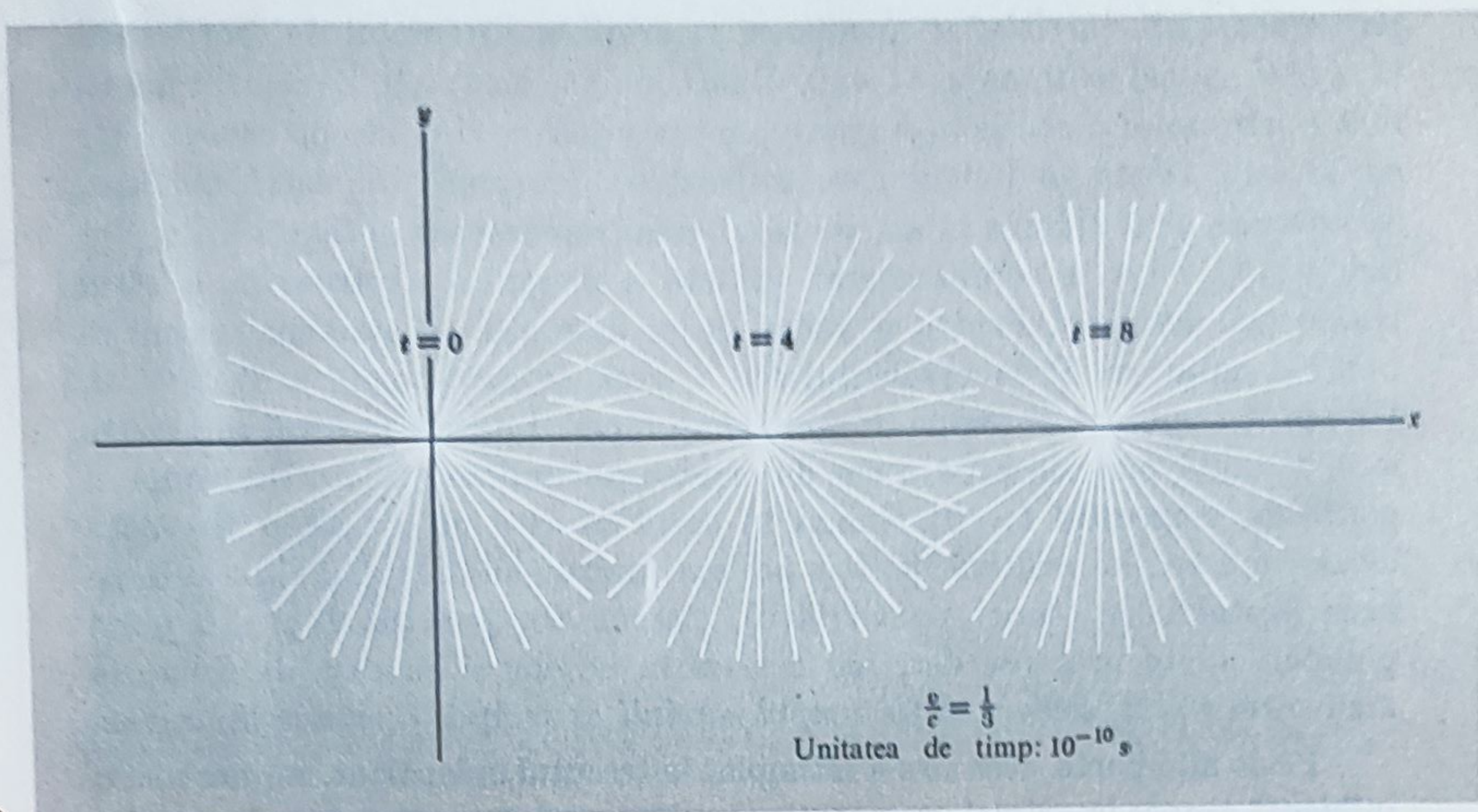
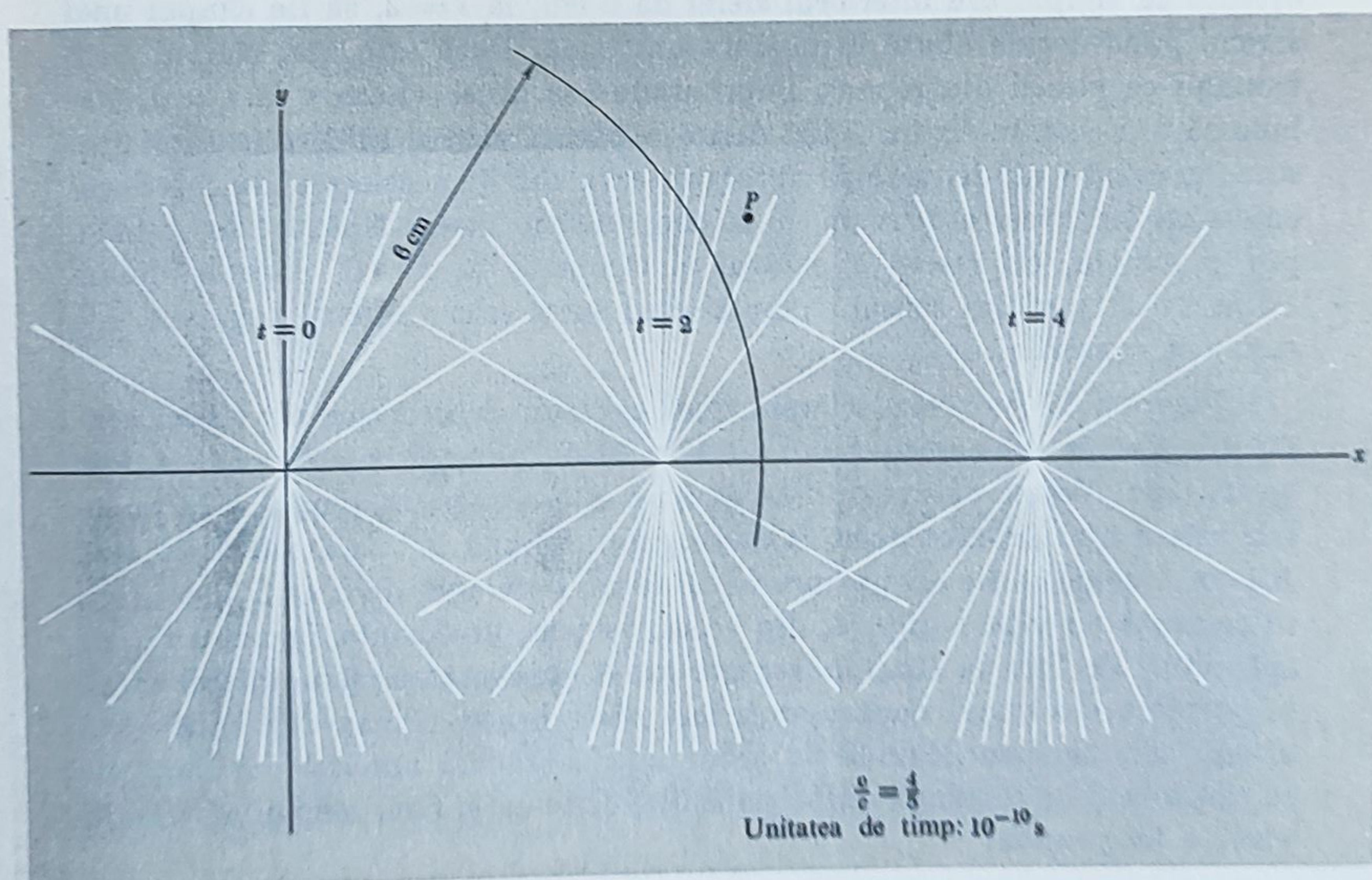


Fig. 5.14. Câmpul electric al unui purtător de sarcină în mișcare în trei momente diferite de timp:  $v/c = 1/3$ .

Fig. 5.15. Câmpul electric al unui purtător de sarcină în mișcare în trei momente diferite de timp:  $v/c = 4/5$ .





presupunem că s-ar fi aflat în repaus, în originea sistemului de coordonate, pînă cînd ceasul ar fi marcat  $t = 0$ . Exact înainte de  $t = 0$ , ceva ar fi imprimat electronului o accelerație mare, pînă la viteza  $v$  și el începe să se miște cu această viteză în lungul axei  $x$  pozitive. Începînd din acest moment, mișcarea sa ar fi aîdoma mișcării electronului reprezentat în figura 5.15. Dar figura 5.15 nu este reprezentarea corectă a cîmpului electronului a cărui istorie am descris-o. Pentru a vedea de ce este așa, să studiem cîmpul în punctul notat cu  $P$ , la momentul  $t = 2$ , ceea ce corespunde la  $2 \cdot 10^{-10}$  s. Un semnal luminos parcurge în acest timp 6 cm. Întrucît punctul se găsește la o distanță mai mare de 6 cm de origine, nu putem ști că electronul a pornit la momentul  $t = 0$ ! Numai în cazul în care nu există o flagrantă încălcare a teoriei relativității (iar noi am fundamentat întreaga discuție pe baza postulatelor teoriei relativității), cîmpul din punctul  $P$  și din toate punctele aflate în afara sferei cu centrul în origine și cu raza de 6 cm, la momentul  $t = 2$ , *trebuie să fie cîmpul sarcinii ce se află în repaus în origine.*

Pe de altă parte, ceea ce s-a întîmplat în trecutul îndepărtat, nu are nici o influență asupra imediatei vecinătăți a purtătorului de sarcină în mișcare. La momentul  $t = 2$ , pe măsura îndepărtării de sarcină, cîmpul se va schimba, trecînd de la cîmpul reprezentat în a doua diagramă a figurii 5.15, la cîmpul unei sarcini aflate în origine. Mai mult decît atît nu putem spune, dacă nu știm cît de rapid se răspîndesc „noutățile”. Să presupunem că se răspîndesc cu viteza maximă, fără a intra în conflict cu postulatele teoriei relativității. Atunci, dacă neglijăm intervalul în care s-a produs accelerarea, ne putem aștepta ca cîmpul din interiorul sferei de 6 cm, la  $t = 2$ , să fie cîmpul unei sarcini punctiforme aflate în mișcare uniformă. Dacă este așa, cîmpul electronului ce pleacă din repaus, imprimîndu-i-se brusc viteza  $v$  la  $t = 0$ , trebuie să arate ca în figura 5.16. Apare o pătură sferică subțire (a cărei grosime, în cazul real, depinde de durata intervalului de accelerare), în interiorul căreia are loc trecerea de la un tip de cîmp la altul. Această pătură se extinde, pur și simplu, cu viteza  $c$ , centrul ei rămînînd în  $x = 0$ . Săgețile de pe liniile de cîmp indică sensul cîmpului cînd sursa este o sarcină negativă, așa cum am considerat.

Figura 5.17 ilustrează cîmpul unui electron ce se mișca cu viteză constantă *pînă* la momentul  $t = 0$ , cînd a atins punctul  $x = 0$ , unde a fost *oprit* brusc. Vestea despre oprirea sa nu poate ajunge, în timpul  $t$ , în punctele aflate mai departe decît  $ct$  de origine. Cîmpul, în afara sferei de rază  $R = ct$ , trebuie să fie cel pe care l-ar fi creat electronul dacă ar fi continuat să se miște cu viteza inițială. De aceea, vedem, în dreapta figurii 5.17, un „pămătuț” de linii de cîmp îndreptate exact spre locul unde ar fi trebuit să se găsească electronul dacă n-ar fi fost oprit brusc. (Remarcați că această ultimă concluzie nu depinde de presupunerea, făcută anterior, că noutățile se răspîndesc cu viteza maximă posibilă.) Este ca și cum cîmpul ar avea o viață a lui proprie!



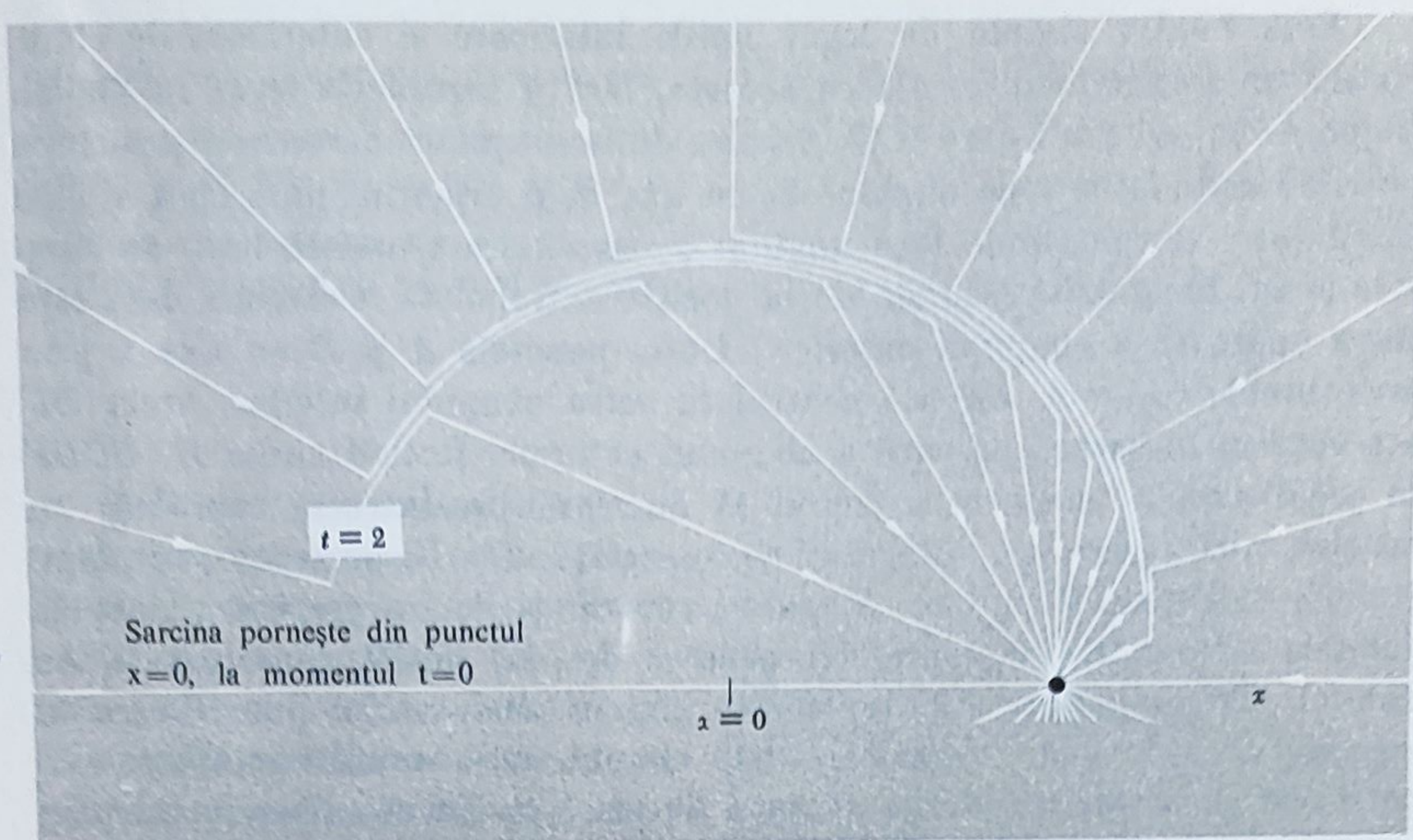
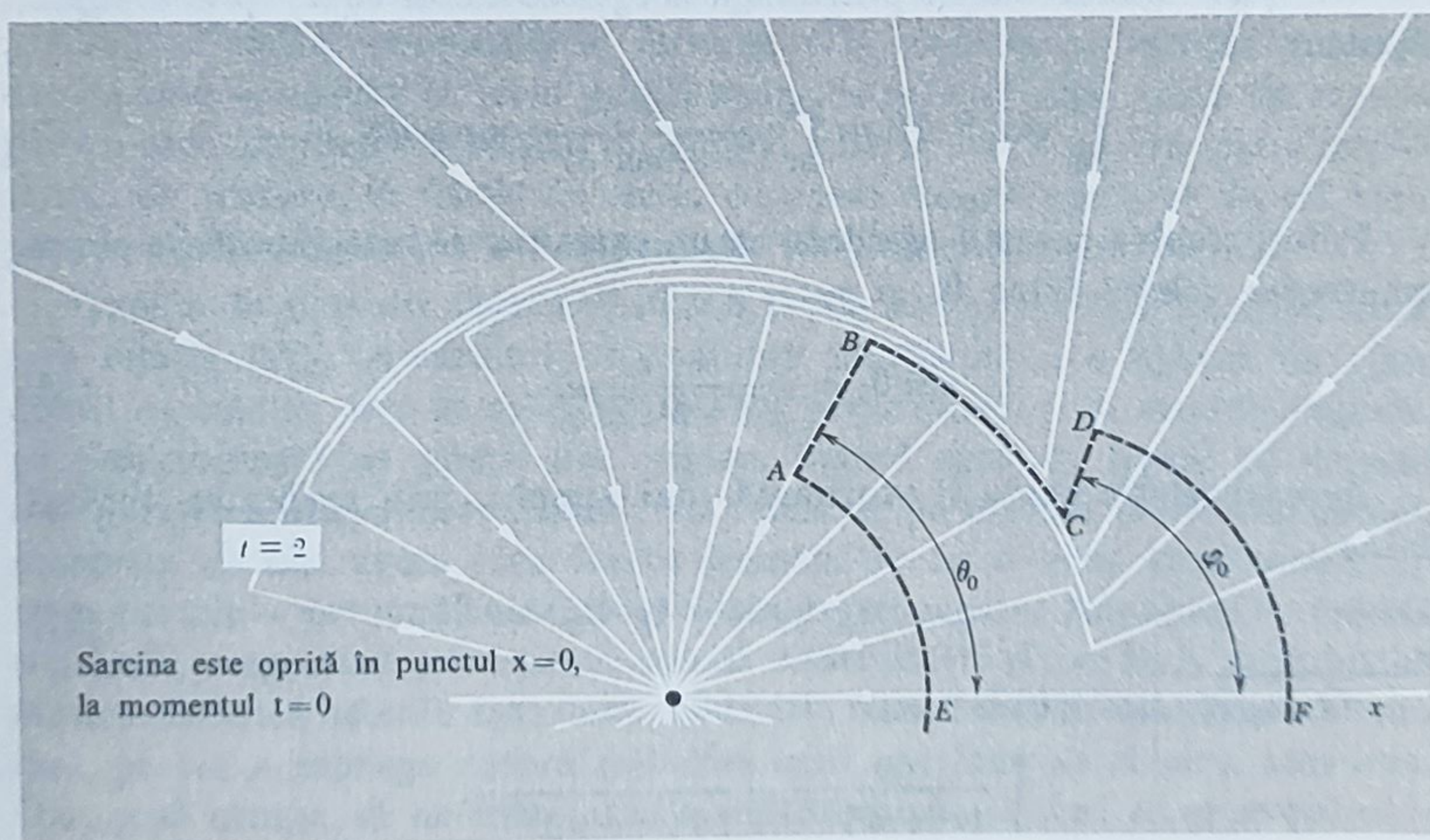


Fig. 5.16. Un purtător de sarcină, aflat inițial în repaus în punctul  $x=0$ , este accelerat brusc la momentul  $t=0$  și se mișcă apoi cu viteză constantă.

Fig. 5.17. Un purtător de sarcină ce se mișcă cu viteză constantă, ajunge în origine la  $t=0$ , este frânat brusc și rămâne în originea sistemului de coordonate.





Este relativ simplu de legat liniile interioare și exterioare de câmp. Există un singur mod de a face aceasta, fără a contrazice legea lui Gauss. Luând exemplul din figura 5.17, pornim de la un punct oarecare  $A$ , pe linia de câmp radială ce face unghiul  $\theta_0$  cu axa  $x$ , o urmărim pînă cînd ajunge în câmpul exterior, unde face unghiul  $\varphi_0$  cu axa  $x$ . (Această linie de câmp este și ea, bineînțeles, radială de la poziția extrapolată a sarcinii, care este sursa aparentă a câmpului exterior.) Unim punctele  $A$  și  $D$  cu axa  $x$  prin arce circulare; arcul  $AE$  are centrul în sursa câmpului interior, arcul  $DF$  are centrul în sursa aparentă a câmpului exterior. Rotind curba  $EABCD F$  în jurul axei  $x$ , obținem o suprafață de revoluție. Întrucît suprafața nu conține nici o sarcină, integrala de suprafață din  $E$ , pe toată suprafața, trebuie să fie egală cu zero. Singurele contribuții la integrală sînt date de calotele sferice, restul suprafeței generat de  $AB$  și  $CD$ , fiind paralel cu câmpul. Câmpul calotei interioare este câmpul unei sarcini punctiforme în repaus; câmpul calotei exterioare este câmpul unei sarcini punctiforme ce se mișcă cu viteză constantă  $v$ , dată de ec. (12). Să calculăm fluxul prin calota interioară din figura 5.18. Integrala din  $E$  pe această calotă, este:

$$\int_0^{\theta_0} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 2\pi r^2 \sin \theta \, d\theta = \frac{q}{2\epsilon_0} \int_0^{\theta_0} \sin \theta \, d\theta. \quad (13)$$

Integrala din  $E$  pe calota exterioară, este:

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi_0} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} 2\pi r^2 \sin \varphi \, d\varphi = \\ = \frac{q}{2\epsilon_0} \int_0^{\varphi_0} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \sin \varphi \, d\varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Din condiția ca fluxul ce intră prin stînga să egaleze fluxul ce iese prin dreapta, obținem:

$$\int_0^{\theta_0} \sin \theta \, d\theta = \int_0^{\varphi_0} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \sin \varphi \, d\varphi. \quad (15)$$

Puteți rezolva această egalitate ca un exercițiu de integrare.\* Se obține următoarea relație între  $\theta_0$  și  $\varphi_0$ :

$$\cos \theta_0 = \frac{\cos \varphi_0}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi_0}}. \quad (16)$$

Aceeași relație poate fi exprimată mai simplu, prin egalitatea echivalentă:

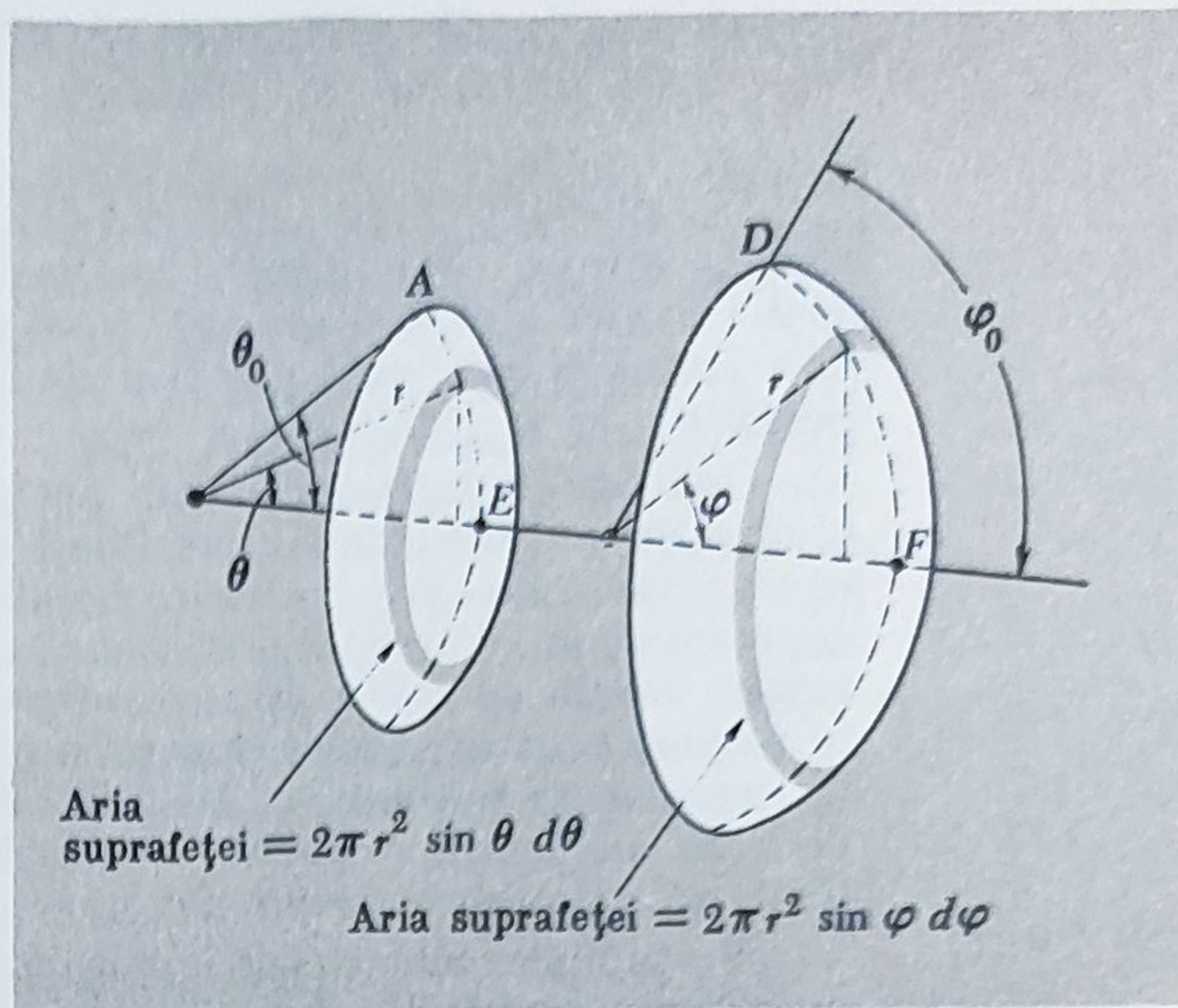
$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \gamma \operatorname{tg} \theta_0. \quad (17)$$

\* Integrala dată este de forma:

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(a^2 + x^2)^{1/2}}.$$



Fig. 5.18. Calota interioară, formată prin rotirea lui AE din figura 5.17 și calota exterioară, formată prin rotirea lui DF. Câmpul pe AE este cel al unei sarcini în repaus. Câmpul din DF este al unei sarcini ce se mișcă cu viteză constantă. Vrem ca fluxurile prin cele două calote să fie egale.



Întâmplător, această relație între  $\theta_0$  și  $\varphi_0$ , dedusă pe baza egalității fluxurilor, este aceeași cu relația dintre unghiurile pe care le formează cu direcția mișcării relative, o tijă rigidă în sistemul de referință propriu aflat în repaus, cu sistemul de referință aflat în mișcare. Aceasta ne permite să obținem

câmpul purtătorului de sarcină în mișcare printr-o cale extrem de simplă. Fie, ca fiecare „linie” să reprezinte un flux de o valoare bine determinată și să ne imaginăm liniile din sistemul de referință în care sarcina se află în repaus, ca niște tije rigide îndreptate spre exterior în toate direcțiile. În sistemul de referință aflat în mișcare, fiecare tijă reprezintă un flux de aceeași mărime, dar tijele apar îndreptate sub unghiuri mai mari, astfel încât mănunchiul de tije arată ca cel din figura 5.13.

Doar lărgimea regiunii de tranziție din figura 5.17, depinde de presupunerea noastră nefundamentată că „noutățile se răspîndesc cu viteza maximă posibilă”. Relația, exprimată în formula (17), trebuie să rămână valabilă, dacă există o regiune în jurul purtătorului de sarcină aflat acum în repaus, pentru care istoria purtătorului de sarcină pînă la  $t = 0$  nu are nici o importanță. Ca urmare, în liniile de câmp, ce unesc câmpul apropiat de cel îndepărtat, trebuie să existe o componentă transversală, adică radială.

Liniile de câmp din figurile 5.16 și 5.17, au fost astfel unite încît să satisfacă relația (17). Ca rezultat, în regiunea de tranziție, a apărut un câmp destul de intens, care în mare parte este perpendicular, în această regiune, pe raza vectoare ce pleacă din origine. Ținînd cont de faptul că această configurație a câmpului se extinde cu viteza  $c$ , pe măsura trecerii timpului, observăm că aici avem ceva foarte asemănător cu o undă transversală de câmp electric — perpendiculară pe direcția de propagare. Am ajuns la această concluzie, respectînd postulatele teoriei relativității și pe baza faptului că sarcina electrică este un invariant relativist. Vom folosi în continuare aceste idei, pentru a înțelege natura radiației unui purtător de sarcină accelerat. Dar, pînă atunci, să ne întoarcem la purtătorul de sarcină ce se mișcă uniform, care ne mai rezervă multe surprize.



## 5.8. FORȚA CE ACȚIONEAZĂ ASUPRA UNUI PURTĂTOR DE SARCINĂ ÎN MIȘCARE

Ecuatia (12) ne dă forța ce acționează asupra unui purtător de sarcină aflat în repaus, ce se găsește în câmpul unui alt purtător de sarcină ce se deplasează cu viteză constantă. Vom ridica acum o altă problemă: ce forță se exercită asupra unui purtător de sarcină, care se mișcă în câmpul altor purtători de sarcină?

Vom studia întâi cazul unui purtător de sarcină ce se mișcă în câmpul produs de purtători de sarcină aflați în repaus. Acesta poate fi un electron ce se mișcă între plăcile încărcate ale unui osciloscop sau o particulă alfa ce se mișcă în câmpul coulombian al unui nucleu atomic. Sursele câmpului, într-un sistem de referință pe care-l vom numi al „laboratorului”, sînt toate în repaus. Într-un anumit punct din spațiu și la un anumit moment, observăm în sistemul de referință al laboratorului o particulă ce poartă sarcina  $q$  și care, în momentul respectiv, se mișcă cu viteza  $v$  în câmpul electrostatic. Ce forță acționează asupra lui  $q$ ?

Forța înseamnă variația impulsului, așa încît, de fapt, întrebarea noastră este: care este variația de impuls a particulei  $dp/dt$ , în acest loc și la acest moment, în sistemul de referință al laboratorului? (Asta se și subînțelege prin forța ce acționează asupra unei particule în mișcare.) Răspunsul îl găsim direct din cele învățate. Să considerăm un sistem de coordonate  $F$ , ce se mișcă, la momentul respectiv, odată cu particula. În acest sistem „al particulei”, pentru moment această particulă se va afla în repaus, ceilalți purtători de sarcină găsindu-se în mișcare. Această situație ne este cunoscută. Forța ce acționează asupra unei sarcini în repaus este egală cu  $E'$ , unde  $E'$  este intensitatea câmpului electric observată în sistemul  $F'$ . Știm, de asemenea, cum să-l găsim pe  $E'$ , dacă-l cunoaștem pe  $E$ ; regula ne-o dă ec. (7). Cunoșcîndu-l pe  $E$ , putem găsi variația impulsului particulei, observate în  $F'$ . Rămîne doar să transformăm această mărime în sistemul  $F$ . Astfel, problema noastră se reduce la transformarea forței sau a variației de impuls dintr-un sistem inerțial într-altul.

Această problemă a fost studiată în vol. I, cap. 12. Ne putem reaminti etapele deducerii formulelor. Aceasta ne va ajuta să înțelegem ce se întîmplă aici. Să considerăm deci, un sistem inerțial  $F'$ , ce se mișcă în sensul pozitiv al axei  $x$ , cu viteza  $v$ , văzut de un observator aflat într-un alt sistem de referință  $F$ . Fie particula de masă de repaus  $m$ , ce se mișcă în sistemul de referință  $F'$ , în sensul pozitiv al axei  $x'$ , cu viteza  $v'$ . Vom nota cu  $p_x$  componenta  $x$ , a impulsului măsurată în  $F$  și cu  $p'_x$  componenta  $x'$  a impulsului, măsurată în  $F'$ . Pentru a găsi relația dintre  $p_x$  și  $p'_x$  observăm că

$$p'_x = \frac{mv'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = mc \beta' \gamma'. \quad (18)$$

Am folosit aici prescurtările cunoscute:  $\beta' = v'/c$  și  $\gamma' = 1/\sqrt{1 - \beta'^2}$ .

Pe de altă parte, în sistemul de referință  $F$ , viteza particulei este  $(v + v')/(1 + vv'/c^2)$ , care poate fi scrisă și sub forma  $(\beta + \beta')/(1 + \beta\beta')$ , astfel încît

$$p_x = \frac{mc(\beta + \beta')}{(1 + \beta\beta') \left[ 1 - \left( \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} \right)^2 \right]^{1/2}} = \frac{mc(\beta + \beta')}{[(1 - \beta^2)(1 - \beta'^2)]^{1/2}} = mc \gamma \gamma' (\beta + \beta'). \quad (19)$$



Comparând ecuația (18) cu ecuația (19), găsim relația dintre  $p_x$  și  $p'_x$ :

$$p_x = \gamma(p'_x + \beta\gamma' mc). \quad (20)$$

Observăm că în termenul  $\beta\gamma' mc$ ,  $\gamma' mc$  este egal cu  $\gamma' mc^2/c$  sau  $E'/c$ , unde  $E'$  (a nu se confunda cu intensitatea câmpului electric de care nu ne ocupăm momentan!) este energia totală a particulei în sistemul  $F'$ , adică energia de repaus plus energia cinetică. Să scriem ec. (20) sub forma:  $p_x = \gamma(p'_x + \beta E'/c)$  și oprindu-ne, s-o comparăm cu transformarea Lorentz a coordonatei  $x$  din același exemplu:  $x = \gamma(x' + \beta ct')$ . Analogia dintre aceste relații, ne reamintește că cele patru mărimi  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  și  $E/c$  se comportă, în transformarea Lorentz, exact ca cele patru coordonate spațiu-timp:  $x$ ,  $y$ ,  $z$  și  $ct$ . Într-adevăr, dacă am fi fost siguri de acest fapt, am fi putut scrie ec. (20) direct și am fi putut considera scurta noastră trecere în revistă ca o pierdere de timp. Să folosim acest fapt pentru găsirea relațiilor dintre componentele transversale ale impulsului. Întrucît în transformarea Lorentz  $y = y'$ , dacă viteza relativă este îndreptată pe direcția lui  $x$ , trebuie să ne așteptăm ca:

$$p_y = p'_y. \quad (21)$$

Relația dintre  $t$  și  $t'$  este dată de formula cunoscută:

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right). \quad (22)$$

Pe noi ne interesează relația dintre  $dp_x/dt$  și  $dp'_x/dt'$ . Diferențiind ec. (22), obținem:

$$dt = \gamma dt' + \gamma \frac{\beta}{c} \left(\frac{dx'}{dt'}\right) dt' = \gamma dt' (1 + \beta\beta'), \quad (23)$$

deoarece  $\frac{dx'}{dt'}$  este, pur și simplu,  $v'$ . Ecuația (21) ne dă:

$$dp_y = dp'_y \quad (24)$$

și diferențierea ecuației (20) dă

$$dp_x = \gamma dp'_x + \gamma \beta mc \left(\frac{d\gamma'}{dp'_x}\right) dp'_x. \quad (25)$$

În această ultimă expresie, factorul  $mc \left(\frac{d\gamma'}{dp'_x}\right)$  poate fi evaluat din ecuația (18)

$$p'_x = mc\gamma'\beta' = mc\sqrt{\gamma'^2 - 1} \quad (26)$$

și astfel

$$\frac{dp_x}{d\gamma'} = \frac{mc\gamma'}{\sqrt{\gamma'^2 - 1}} = \frac{mc}{\beta'}. \quad (27)$$

Atunci  $\frac{d\gamma'}{dp'_x} = \frac{1}{(dp'_x/d\gamma')} = \frac{\beta'}{mc}$  și înlocuind în ecuația (25), obținem

$$dp_x = \gamma dp'_x (1 + \beta\beta'). \quad (28)$$



Comparind ecuațiile 23 și 28, vedem că

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x}{dt'}, \quad (29)$$

și aceasta este valabilă indiferent de mărimea lui  $v'$ , întrucît factorul  $(1 + \beta\beta')$  apare în ambele ecuații. Pe noi ne interesează, de fapt, doar situațiile în care  $v'$  este foarte mic, adică acele cazuri, cînd particula este aproape în repaus în sistemul  $F'$ . În acest caz, termenul  $\beta\beta'$  poate fi neglijat și comparînd ec. (23) și (24), găsim transformarea impulsului transversal

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp'_y}{dt'}. \quad (30)$$

Sintetizînd aceste rezultate importante, găsim că:  $F'$  este un sistem de referință inertial în care particula se găsește, la un moment dat, în repaus sau se mișcă foarte lent.  $F$  este un alt sistem de referință în raport cu care  $F'$  se poate mișca oricît de repede. Folosind indicii  $\parallel$  și  $\perp$  pentru componentele impulsului, paralelă și perpendiculară pe viteza relativă a lui  $F'$  și  $F$ , putem afirma că:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dp_{\parallel}}{dt} &= \frac{dp'_{\parallel}}{dt'} \\ \frac{dp_{\perp}}{dt} &= \frac{1}{\gamma} \frac{dp'_{\perp}}{dt'} \end{aligned}} \quad (31)$$

Înarmați cu relațiile de transformare pentru forță (31) și cu relațiile de transformare pentru cîmp (ec. 7), să ne reîntoarcem la particula încărcată ce se mișcă în cîmpul  $E$  și vom descoperi un lucru uluitor de simplu. Să considerăm, în primul rînd,  $E_{\parallel}$  — componenta lui  $E$ , paralelă cu direcția instantanee de mișcare a particulei încărcate. Să trecem la sistemul  $F'$ , care se mișcă în acest moment, odată cu particula. În acest sistem, cîmpul electric longitudinal este  $E'_{\parallel}$  și, conform ec. (7),  $E'_{\parallel} = E_{\parallel}$ . Prin urmare, forța  $dp'_{\parallel}/dt'$  este

$$\frac{dp'_{\parallel}}{dt'} = E'_{\parallel}q = qE_{\parallel}. \quad (32)$$

Întorcîndu-ne la sistemul  $F$ , observatorii măsoară forța longitudinală, adică variația, componentei longitudinale a impulsului  $dp_{\parallel}/dt$ . Conform ec. (31),  $dp_{\parallel}/dt = dp'_{\parallel}/dt'$ , astfel încît, în sistemul  $F$ , ei vor găsi că componenta longitudinală a forței este

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{dp'_{\parallel}}{dt'} = qE_{\parallel}. \quad (33)$$

Bineînțeles că particula *nu rămîne* în repaus în sistemul  $F'$ , odată cu trecerea timpului. Ea va fi accelerată de cîmpul  $E'$ , și viteza  $v'$  a particulei, în sistemul inertial  $F'$ , va crește treptat de la zero. Totuși, deoarece avem de-a face numai cu accelerația instantanee, intervin numai valorile infinitezi-



Comparând ecuațiile 23 și 28, vedem că

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x}{dt'}, \quad (29)$$

și aceasta este valabilă indiferent de mărimea lui  $v'$ , întrucît factorul  $(1 + \beta\beta')$  apare în ambele ecuații. Pe noi ne interesează, de fapt, doar situațiile în care  $v'$  este foarte mic, adică acele cazuri, cînd particula este aproape în repaus în sistemul  $F'$ . În acest caz, termenul  $\beta\beta'$  poate fi neglijat și comparînd ec. (23) și (24), găsim transformarea impulsului transversal

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp'_y}{dt'}. \quad (30)$$

Sintetizînd aceste rezultate importante, găsim că:  $F'$  este un sistem de referință inertial în care particula se găsește, la un moment dat, în repaus sau se mișcă foarte lent.  $F$  este un alt sistem de referință în raport cu care  $F'$  se poate mișca oricît de repede. Folosind indicii  $\parallel$  și  $\perp$  pentru componentele impulsului, paralelă și perpendiculară pe viteza relativă a lui  $F'$  și  $F$ , putem afirma că:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dp_{\parallel}}{dt} &= \frac{dp'_{\parallel}}{dt'} \\ \frac{dp_{\perp}}{dt} &= \frac{1}{\gamma} \frac{dp'_{\perp}}{dt'} \end{aligned}} \quad (31)$$

Înarmați cu relațiile de transformare pentru forță (31) și cu relațiile de transformare pentru cîmp (ec. 7), să ne reîntoarcem la particula încărcată ce se mișcă în cîmpul  $E$  și vom descoperi un lucru uluitor de simplu. Să considerăm, în primul rînd,  $E_{\parallel}$  — componenta lui  $E$ , paralelă cu direcția instantanee de mișcare a particulei încărcate. Să trecem la sistemul  $F'$ , care se mișcă în acest moment, odată cu particula. În acest sistem, cîmpul electric longitudinal este  $E'_{\parallel}$  și, conform ec. (7),  $E'_{\parallel} = E_{\parallel}$ . Prin urmare, forța  $dp'_{\parallel}/dt'$  este

$$\frac{dp'_{\parallel}}{dt'} = E'_{\parallel}q = qE_{\parallel}. \quad (32)$$

Întorcîndu-ne la sistemul  $F$ , observatorii măsoară forța longitudinală, adică variația, componentei longitudinale a impulsului  $dp_{\parallel}/dt$ . Conform ec. (31),  $dp_{\parallel}/dt = dp'_{\parallel}/dt'$ , astfel încît, în sistemul  $F$ , ei vor găsi că componenta longitudinală a forței este

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{dp'_{\parallel}}{dt'} = qE_{\parallel}. \quad (33)$$

Bineînțeles că particula *nu rămîne* în repaus în sistemul  $F'$ , odată cu trecerea timpului. Ea va fi accelerată de cîmpul  $E'$ , și viteza  $v'$  a particulei, în sistemul inertial  $F'$ , va crește treptat de la zero. Totuși, deoarece avem de-a face numai cu accelerația instantanee, intervin numai valorile infinitezi-

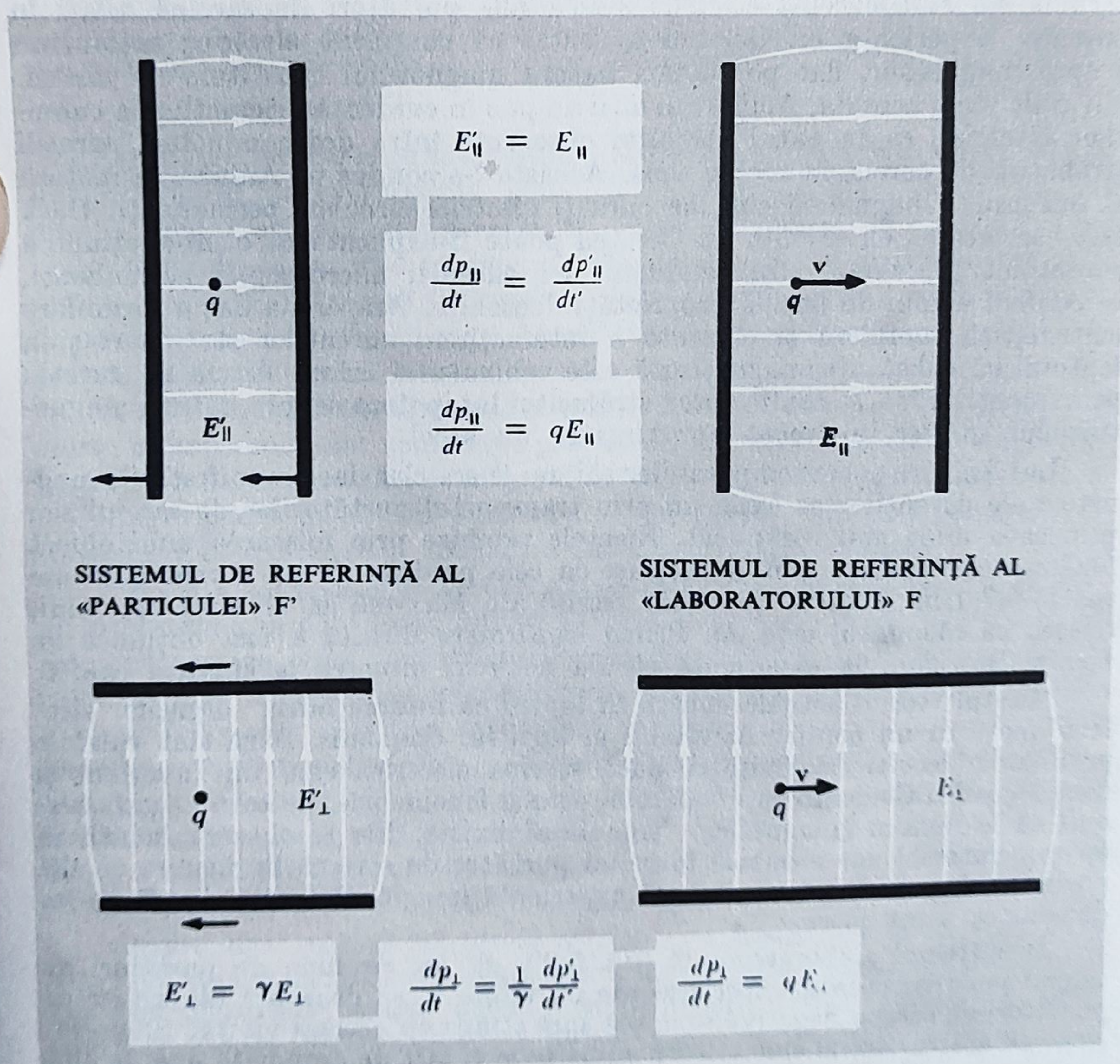


male ale lui  $v'$ , și astfel, restricția impusă ec. (31) este riguros îndeplinită. Pentru  $E_{\perp}$ , componenta transversală a câmpului în  $F$ , transformarea este  $E'_{\perp} = \gamma E_{\perp}$ , astfel încît  $(dp'_{\perp}/dt') = qE'_{\perp} = q\gamma E_{\perp}$ . Trecînd din nou în sistemul  $F$ , forța este egală cu  $(dp_{\perp}/dt) = \frac{1}{\gamma}(dp'_{\perp}/dt')$  astfel încît  $\gamma$  dispare pînă la urmă:

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = \frac{1}{\gamma} (\gamma E_{\perp} q) = qE_{\perp}. \quad (34)$$

Conținutul ecuațiilor (33) și (34) este, pur și simplu, următorul: forța ce acționează asupra unei particule, aflate în mișcare în  $F$ , este egală cu produsul dintre  $q$  și  $E$  — intensitatea câmpului electric din acest sistem, *total independentă* de viteza particulei. Figura 5.19, ne reamintește aceste concluzii și modul cum am ajuns la ele.

Fig. 5.19. Într-un sistem de referință în care sarcinile, ce produc câmpul  $E$ , sînt în repaus, forța, ce acționează asupra unei sarcini  $q$ , care se mișcă cu o viteză oarecare este, pur și simplu, egală cu  $qE$ .



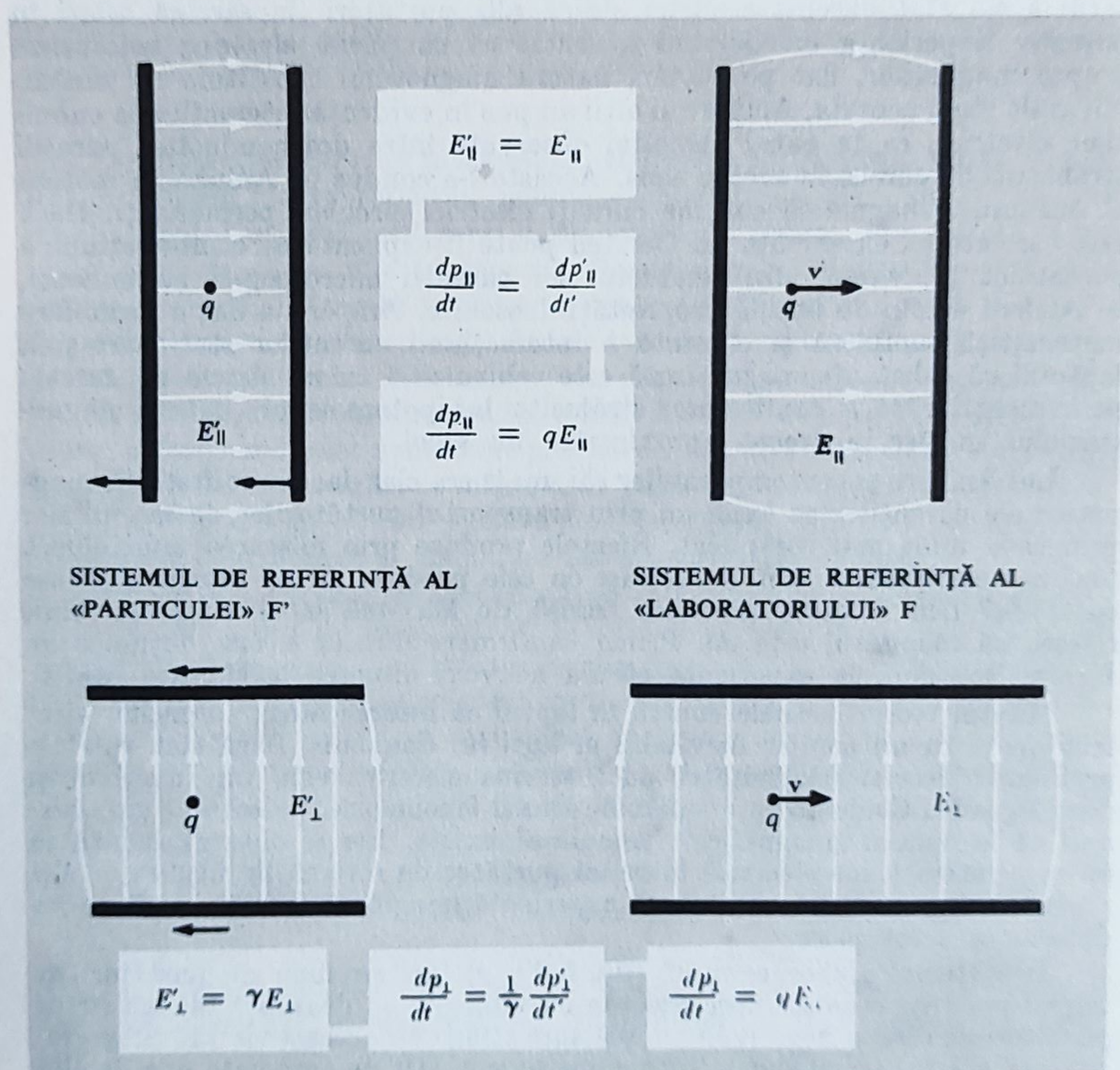


male ale lui  $v'$ , și astfel, restricția impusă ec. (31) este riguros îndeplinită. Pentru  $E_{\perp}$ , componenta transversală a câmpului în  $F$ , transformarea este  $E'_{\perp} = \gamma E_{\perp}$ , astfel încît  $(dp'_{\perp}/dt') = qE'_{\perp} = q\gamma E_{\perp}$ . Trecînd din nou în sistemul  $F$ , forța este egală cu  $(dp_{\perp}/dt) = \frac{1}{\gamma} (dp'_{\perp}/dt')$  astfel încît  $\gamma$  dispare pînă la urmă:

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = \frac{1}{\gamma} (\gamma E_{\perp} q) = qE_{\perp}. \quad (34)$$

Conținutul ecuațiilor (33) și (34) este, pur și simplu, următorul: forța ce acționează asupra unei particule, aflate în mișcare în  $F$ , este egală cu produsul dintre  $q$  și  $\mathbf{E}$  — intensitatea câmpului electric din acest sistem, *total independentă* de viteza particulei. Figura 5.19, ne reamintește aceste concluzii și modul cum am ajuns la ele.

Fig. 5.19. Într-un sistem de referință în care sarcinile, ce produc câmpul  $\mathbf{E}$ , sînt în repaus, forța, ce acționează asupra unei sarcini  $q$ , care se mișcă cu o viteză oarecare este, pur și simplu, egală cu  $q\mathbf{E}$ .





Acest rezultat l-am folosit mai înainte, cînd am pomenit că contribuția cîmpului electric la forța ce acționează asupra unei sarcini în mișcare este  $qE$ . Acest lucru este atît de cunoscut și simplu, încît poate fi considerat evident și pare a fi o pierdere de timp demonstrarea lui. Am fi putut să-l luăm ca un fapt experimental. S-a verificat, într-un domeniu foarte larg, pînă la viteze foarte apropiate de viteza luminii ca în cazul electronilor, că factorul  $\gamma$  este egal cu  $10^4$ . Din acest punct de vedere, este o lege remarcabilă. Toate discuțiile din acest capitol s-au dovedit a fi o consecință directă a invarianței sarcinii.

### 5.9. INTERACȚIUNEA DINTRE UN PURTĂTOR DE SARCINĂ ÎN MIȘCARE ȘI ALȚI PURTĂTORI DE SARCINĂ ÎN MIȘCARE

Știm că asupra unui purtător de sarcină în mișcare ar acționa o forță ce depinde de viteză. Această forță este asociată unui *cîmp magnetic* ale cărui surse sînt curenți electrici, adică alți purtători de sarcină aflați în mișcare. Experiența lui Oersted a arătat că cîmpurile electrice acționează asupra magnetilor, dar pe atunci, natura magnetului constituia un mister. Nu mult după aceasta, Ampère și alții au pus în evidență interacțiunea curenților electrici, ca în cazul atracției observate între doi conductori paraleli străbătuți de curenți în același sens. Aceasta l-a condus pe Ampère la ipoteza că substanța magnetică conține curenți electrici circulari permanenți. Dacă este așa, atunci experiența lui Oersted poate fi explicată ca o interacțiune a curențului „galvanic” din conductor cu curenții microscopici permanenți, ce conferă acului de busolă proprietăți deosebite. Ampère a dat o formulare matematică completă și elegantă a interacțiunii curenților staționari și a faptului că substanța magnetizată este echivalentă cu un sistem de curenți permanenți. Pînă la confirmarea strălucitei lui ipoteze asupra naturii magnetismului în fier, a trecut aproximativ un secol.

Lui Ampère și contemporanilor săi, nu le era clar dacă manifestările magnetice ale curenților se explicau prin transportul purtătorilor de sarcini sau prin ceva mult mai complicat. Efectele produse prin mișcarea unui obiect încărcat electrostatic pot fi aceleași cu cele produse de un curenți galvanic continuu? Din lucrarea teoretică, scrisă de Maxwell la sfîrșitul secolului, reieșea că răspunsul este *da*. Prima confirmare directă a fost obținută de Henry Rowland, la experiența căruia ne vom întoarce la sfîrșitul cap. 6.

Meritul teoriei actuale constă în faptul că interacțiunea curenților electrici apare ca un corolar inevitabil al legii lui Coulomb. Dacă sînt valabile postulatele teoriei relativității, dacă sarcina electrică este un invariant și dacă legea lui Coulomb este valabilă, atunci fenomenele, pe care ne-am obișnuit să le numim „magnetice”, trebuie să existe. Ele se observă îndată ce apare o interacțiune electrică între un purtător de sarcină în mișcare și alți purtători de sarcină în mișcare. O experiență imaginară foarte simplă ne va demonstra acest lucru.

În sistemul „laboratorului” (fig. 5.20, *a*), un șir lung de purtători de sarcini pozitive se mișcă spre dreapta cu viteza  $v_0$  și, deasupra lui, un șir de purtători de sarcini negative se mișcă spre stînga cu aceeași viteză. Se presupune că aceste sarcini sînt atît de numeroase și atît de apropiate una de alta



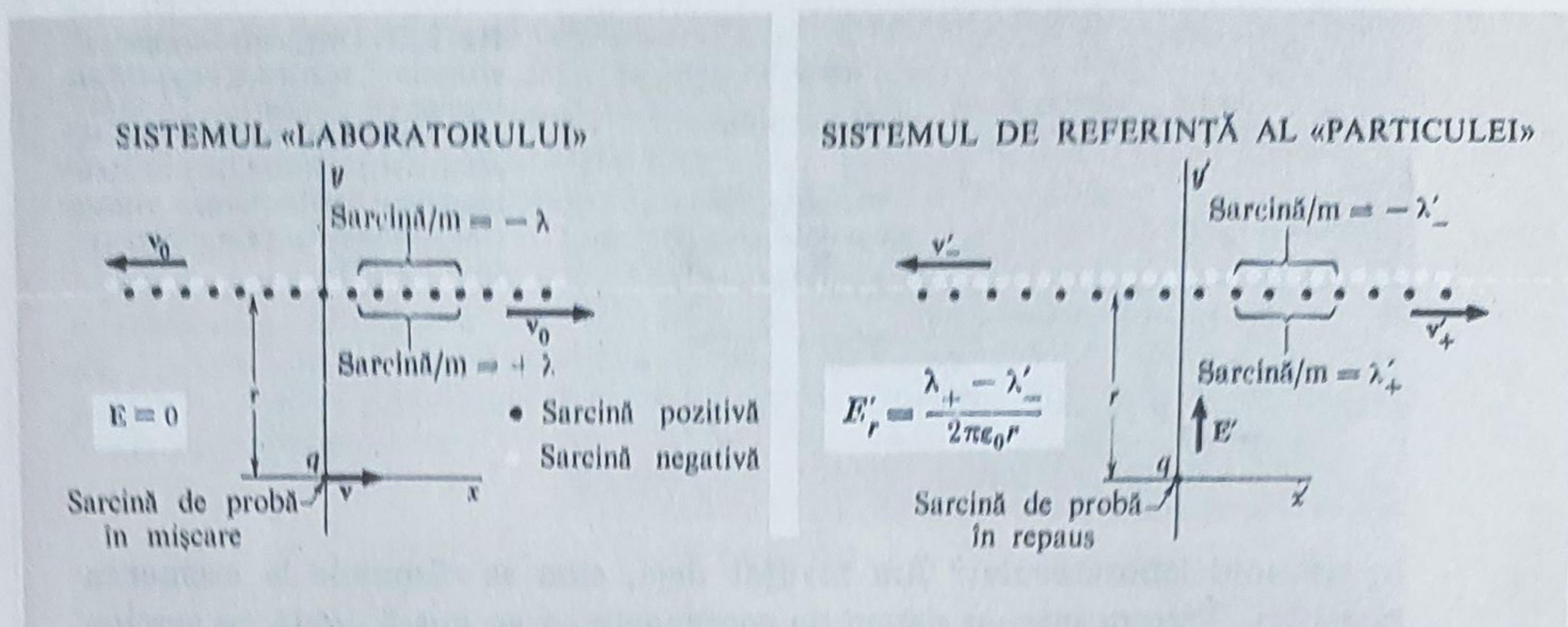


Fig. 5.20. Un șir de purtători de sarcină pozitivă și negativă în mișcare, așa cum se observă în două sisteme de referință diferite. (a) Purtătorii de sarcină negativă se mișcă spre stînga, cei pozitivi spre dreapta, cu viteze egale în sistemul laboratorului. În sistemul laboratorului densitățile sînt egale, dar în sistemul de referință al „particulei” (b), în care sarcina de probă  $q$  este în repaus, densitățile liniare de sarcină nu sînt egale.

Încît, la distanțele care ne interesează, structura lor discretă poate fi neglijată. În figură am reprezentat, pentru claritate, cele două șiruri ușor delimitate. Pentru această configurație, nu există un sistem de referință în care toate sarcinile să se afle în repaus. Presupunem că densitatea liniară de sarcină pozitivă, măsurată în sistemul laboratorului, este  $\lambda$  și că densitatea de sarcină negativă este aceeași. Atunci în sistemul laboratorului, densitatea liniară totală de sarcină este nulă. Prin urmare, intensitatea cîmpului electric  $E$ , în sistemul laboratorului, este nul. Această situație este echivalentă cu cea a unui conductor neîncărcat prin care trece un curent electric constant. Într-un conductor metalic, se mișcă doar purtătorii de sarcini negative (electronii), purtătorii de sarcini pozitive fiind în repaus. Am ales un model mai simetric, numai pentru a simplifica întrucîtva raționamentul.

Dacă  $v$ -ați fi mișcat cu aceeași viteză ca și purtătorii de sarcini pozitive, ați fi observat că densitatea liniară de sarcină variază. Această situație este asemănătoare cu cea a condensatorilor din figura 5.19. În sistemul laboratorului, distribuția de sarcină pozitivă va fi contractată în direcția  $x$  cu factorul  $(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$ , ceea ce o face mai densă decît în sistemul în care purtătorii de sarcini pozitive s-ar fi aflat în repaus. Întrucît am specificat că densitatea în sistemul laboratorului este  $\lambda$ , densitatea în sistemul în care sarcinile pozitive se află în repaus va fi mai mică și anume egală cu  $\lambda(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$ . Același lucru este valabil pentru densitatea liniară a sarcinilor negative în repaus. Aceste raționamente ne vor fi în curînd utile.

Asupra unei sarcini de probă  $q$  aflată în repaus, la o distanță oarecare  $r$  de conductor, nu acționează nici o forță, deoarece cîmpul electric este nul. Ne interesează, acum, forța exercitată asupra unei sarcini de probă aflate în mișcare. Presupunem că în sistemul laboratorului, sarcina  $q$  este pusă în mișcare cu viteza  $v$ , spre dreapta. Ce forță va acționa asupra ei,



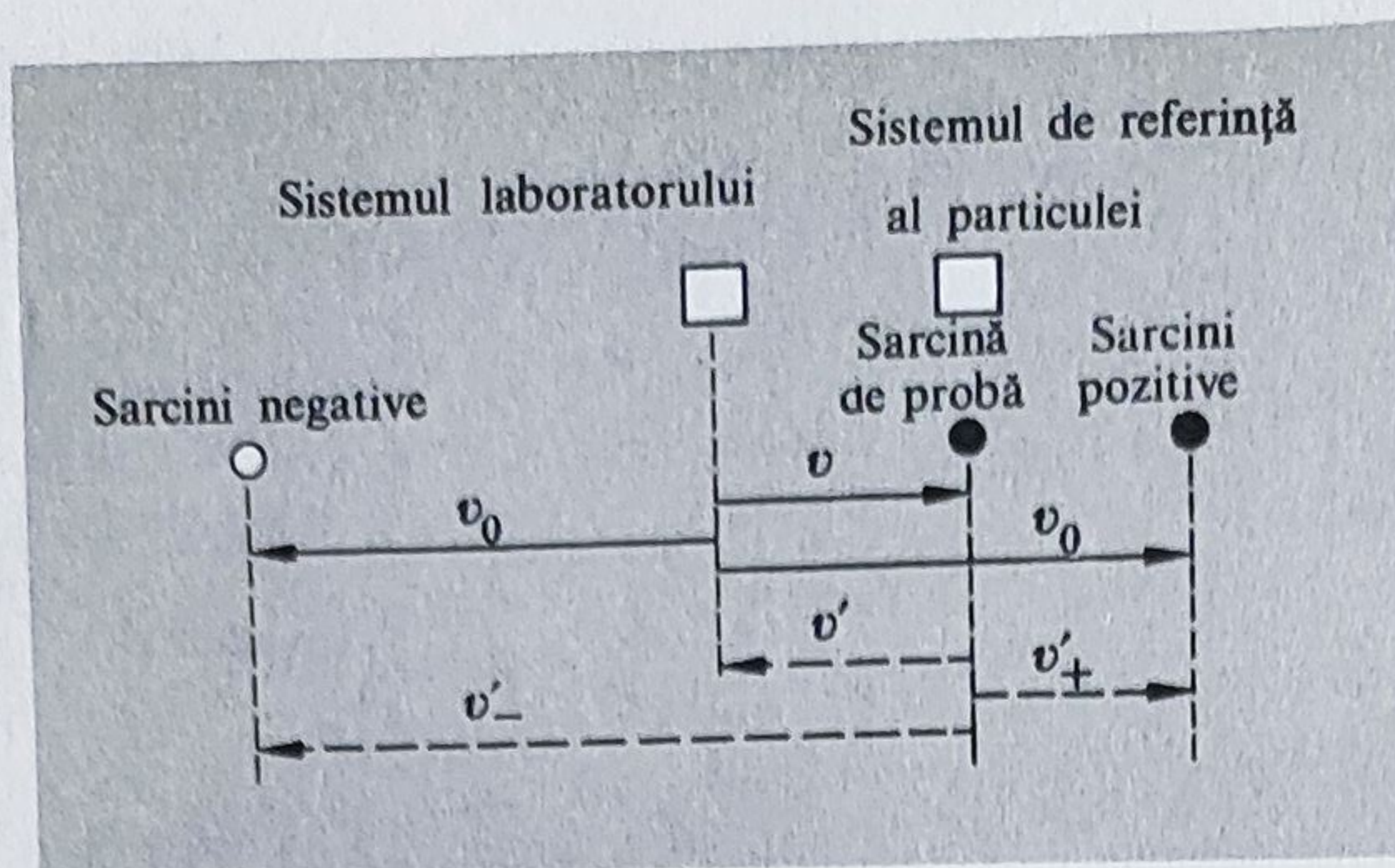


Fig. 5.21. Diagramă în „spațiul vitezelor” pentru a ne ajuta să înțelegem lucrurile. (Adunarea vitezelor trebuie făcută relativist.) Notățiile pentru modulele diferitelor viteze sînt aceleași cu cele din ecuațiile 35–44.

în sistemul laboratorului? Am învățat deja, cum se răspunde la asemenea întrebări. Trecem într-un sistem de coordonate ce se mișcă odată cu sarcina de probă  $q$ . În acest sistem de referință „al particulei”, sarcina  $q$  se află în repaus și forța ce acționează asupra ei este determinată numai de câmpul electric din acest sistem de referință.

De unde apare acest câmp electric în sistemul de referință „al particulei”, cînd în sistemul laboratorului acesta nu exista? Explicația constă în faptul că densitățile liniare de sarcină în sistemul „particulei”, pe care le vom nota cu  $\lambda'_+$  și  $\lambda'_-$ , *nu sînt egale*. Conductorul, observat în sistemul de referință „al particulei”, este încărcat! Pe fiecare unitate de lungime există un surplus de sarcini negative.\*

Pentru a ne descurca, trebuie să cunoaștem viteza purtătorilor de sarcini pozitive și a purtătorilor de sarcini negative în noul sistem de referință. Evident, ele nu sînt egale. De fapt, întrucît sistemul ales „al particulei” se mișcă spre dreapta față de sistemul laboratorului, el ajunge din urmă purtătorii de sarcini pozitive și se îndepărtează de cei negativi, chiar mai repede. Figura 5.21 ne ajută să determinăm vitezele care ne interesează. Nu vom face nici un fel de aproximații, așa încît, pentru obținerea vitezelor  $v'_+$  și  $v'_-$  a purtătorilor de sarcini pozitive și negative în sistemul „particulei”, trebuie să folosim formula compunerii vitezelor din mecanica relativistă. Aceste viteze sînt egale cu:

$$v'_+ = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v / c^2} \quad v'_- = \frac{v_0 + v}{1 + v_0 v / c^2}. \quad (35)$$

Aici ne convine să folosim notațiile  $\beta$  și  $\gamma$ . Fie  $\beta_0 = v_0/c$ ,  $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$ ;  $\beta'_+ = v'_+/c$ ,  $\gamma'_+ = (1 - \beta'^2_+)^{-1/2}$  ș.a.m.d. Cu aceste notații, ec. (35) devine:

$$\beta'_+ = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta} \quad \beta'_- = \frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0 \beta}. \quad (36)$$

\* Vă puteți întreba: „Cum rămîne cu invarianța sarcinii?” Am subliniat deja că sarcina totală cuprinsă într-un domeniu oarecare este aceeași, indiferent de sistemul de referință în care se măsoară. În cazul nostru, nu există nici o regiune care să poată include întreaga sarcină a conductorului, întrucît el tinde către infinit; ce se întîmplă la capetele lui, nu ne interesează.



Dificultatea problemei constă în faptul că cele două distribuții de sarcină suferă contracții Lorentz *diferite*. Densitatea liniară a sarcinilor pozitive, o putem găsi plecând de la densitatea sarcinilor pozitive în sistemul lor propriu de repaus și aplicând factorul de contracție în sistemul de referință al particulei. Înainte, găseam densitatea sarcinilor pozitive în sistemul lor propriu de repaus; ea era egală cu  $\lambda(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$  sau în noile notații,  $\lambda/\gamma_0$ . Distribuția de sarcină se micșorează liniar cu factorul  $1/\gamma_+$  în sistemul de referință al particulei, iar inversul lui,  $\gamma_+$  este factorul cu care crește densitatea liniară de sarcină față de densitatea din sistemul de referință în repaus a sarcinilor pozitive. Astfel, densitatea liniară de sarcină pozitivă, în sistemul de referință al particulei, va fi:

$$\lambda'_+ = \gamma'_+ \left( \frac{\lambda}{\gamma_0} \right). \quad (37)$$

Analog, densitatea de sarcină negativă, în sistemul de referință al particulei, este:

$$\lambda'_- = \gamma'_- \left( \frac{\lambda}{\gamma_0} \right). \quad (38)$$

Eliminând din aceste ecuații pe  $\gamma'_+$  și  $\gamma'_-$ , și folosind ec. (36), vrem să găsim densitatea totală de sarcină,  $\lambda'_+ - \lambda'_-$ . Deși pare că ne afundăm în algebră, substituția ne duce imediat la o surprinzătoare simplificare:

$$\lambda'_+ - \lambda'_- = \frac{\lambda}{\gamma_0} (\gamma'_+ - \gamma'_-). \quad (39)$$

Din ec. (36),

$$\begin{aligned} \gamma'_+ - \gamma'_- &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\beta} \right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0\beta} \right)^2}} = \\ &= \frac{1 - \beta_0\beta}{\sqrt{1 - \beta_0^2 - \beta^2 + \beta_0^2\beta^2}} - \frac{1 + \beta_0\beta}{\sqrt{1 - \beta_0^2 - \beta^2 + \beta_0^2\beta^2}} = \\ &= \frac{-2\beta_0\beta}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} = -2\beta_0\beta\gamma_0\gamma. \end{aligned} \quad (40)$$

Prin urmare, densitatea liniară totală de sarcină este egală cu:

$$\lambda'_+ - \lambda'_- = -2\lambda\beta_0\beta\gamma = -\frac{2\lambda\gamma v v_0}{c^2}. \quad (41)$$

Această sarcină electrică liniară dă naștere, în sistemul de referință al particulei, aceluiași câmp electric ca orice sarcină liniară de aceeași densitate. Trebuie doar să aplicăm teorema lui Gauss unui cilindru ce înconjoară linia și vom obține rezultatul cunoscut — un câmp electric radial egal cu:

$$E_r = \frac{(\lambda'_+ - \lambda'_-)}{2\pi\epsilon_0 r} = -\frac{\lambda\gamma v v_0}{\pi\epsilon_0 r c^2}. \quad (42)$$



Prin urmare, forța ce acționează asupra sarcinii de probă pozitive  $q$ , este îndreptată pe direcția razei, spre interior (în sistemul particulei, în sensul pozitiv al axei  $y'$ ) și are mărimea

$$F_y = \frac{q\gamma\lambda v v_0}{\pi\epsilon_0 r c^2}. \quad (43)$$

În sistemul de referință al particulei, aceasta este o forță transversală. Mărimea sa, măsurată în sistemul laboratorului, va fi diferită. Conform regulilor de transformare a forțelor, ec. (31),  $F_y = (1/\gamma)F'_y$ . Ca urmare,  $\gamma$  se simplifică. Ajungem la concluzia că valoarea forței care acționează asupra sarcinii  $q$ , ce se mișcă în sistemul laboratorului cu o viteză  $v$  paralelă cu conductorul, este

$$F_y = \frac{q\lambda v v_0}{\pi\epsilon_0 r c^2}. \quad (44)$$

Mărimea  $\lambda v_0$ , pe care o putem pune în evidență în ecuația (44), este chiar intensitatea curentului electric din conductor. Adică,  $\lambda v_0$  este viteza de transport a purtătorului de sarcină pozitivă spre dreapta — sau cantitatea de sarcină pozitivă ce trece într-o secundă prin fața unui punct dat — și aceeași contribuție la curent o aduce și transportul sarcinii negative spre stînga.

Notînd intensitatea acestui curent cu  $I$ , mărimea forței, ce acționează asupra unei sarcini în mișcare, este dată de

$$F = \frac{qvI}{4\pi\epsilon_0 r c^2}. \quad (45)$$

Este remarcabil faptul că forța ce acționează asupra unei sarcini de probă în mișcare, nu depinde de viteza sau densitatea tipului de purtători de sarcină din conductor, ci numai de combinația acestor mărimi care determină transportul total de sarcină. Dacă avem un anumit curent n-are importanță dacă acest curent este format din electroni de înaltă energie care se mișcă cu o viteză egală cu 99% din viteza luminii, din electronii unui metal ce execută o mișcare termică haotică cu o vagă mișcare ordonată suprapusă pe o direcție, sau din ioni încărcăți într-o soluție, cei pozitivi mișcîndu-se într-un sens și cei negativi într-altul. Indiferent de toate acestea, forța ce acționează asupra sarcinii de probă, este direct proporțională cu viteza sarcinii de probă. În deducerea noastră nu s-a impus în nici un fel restricția ca purtătorii de sarcină din conductor sau sarcina de probă să aibă viteze mici. Ec. (45) este exactă, fără nici un fel de restricții.

Să vedem cum explică această formulă respingerea reciprocă a doi conductori prin care curenții trec în sens opus, ca în figura 5.1, *b* de la începutul acestui capitol. Să presupunem, mai întîi, că în fiecare conductor există un număr egal de purtători de sarcină pozitivă și negativă, mișcîndu-se în sensuri opuse, cu aceeași viteză. În sistemul laboratorului avem ceva asemănător cu figura 5.22, *a*. Trecînd într-un sistem de referință, ce se mișcă odată cu purtătorii de sarcini negative din conductorul 1 și cu purtătorii de sarcini pozitive din conductorul 2, observăm că sistemul arată ca în figura 5.22, *b*. În acest sistem de referință, conductorul 1 are pe unitatea de lungime un surplus de purtători de sarcini pozitive; prin urmare, el *va respinge* purtătorii de sarcini pozitive din conductorul 2. Analog, purtătorii de sarcini negative din conductorul 1 sînt respinși de surplusul de purtători de sarcini negative din conductorul 2. Pentru a găsi forțele ce acționează asupra purtă-



torilor de sarcină rămași — pozitive în 1 și negative în 2 — le transferăm într-un sistem de referință în care ele se află în *repaus* (fig. 5.22, c). Aici, conductorul 2 apare cu un surplus de purtători de sarcini pozitive, astfel încât purtătorii de sarcini pozitive din 1 trebuie să simtă o respingere. Același lucru se întâmplă cu purtătorii de sarcini negative din conductorul 2.

Astfel, fiecare purtător de sarcină, aflat în sistemul său propriu în repaus, resimte respingerea exercitată de purtătorii de sarcină din celălalt conductor. Pentru a găsi mărimea exactă a forței, în sistemul laboratorului, trebuie să facem aceeași transformare a forțelor ca cea pe care am făcut-o trecînd de la ec. (43) la ec. (44). Dar aceasta nu schimbă *semnul* forței. Prin urmare, trebuie ca în sistemul laboratorului să observăm neapărat respingerea unui conductor de către celălalt.

Modelul pe care abia l-am descris, poate explica conductibilitatea unui electrolit sau a unui gaz ionizat și în general, două tipuri de purtători de sarcină pot avea viteze foarte diferite. Totuși, într-un metal, se mișcă numai purtătorii de sarcină negativă (electronii), în timp ce purtătorii de sarcină pozitivă corespunzător rămîn fixați în rețeaua cristalină. Doi asemenea conductori prin care trec curenți în sensuri opuse, văzuți în sistemul laboratorului, sînt reprezentați în figura 5.23, a. Conductorii fiind neutri, asupra ionilor pozitivi ce se află în repaus în sistemul laboratorului, nu se exercită nici o forță electrică din partea celuilalt conductor. Trecînd la un sistem de referință în care unul din grupurile de electroni se află în repaus (fig. 5.23, b), observăm că distribuția electronilor din celălalt conductor suferă o contracție Lorentz mai mare decît distribuția ionilor pozitivi. În figura 5.23, c este reprezentată o situație similară. Astfel, acest model prezice, de asemenea, o respingere între doi curenți paraleli de sensuri opuse. Ea ilustrează calitativ o afirmație făcută mai înainte, că forțele dintre curenți depind doar de

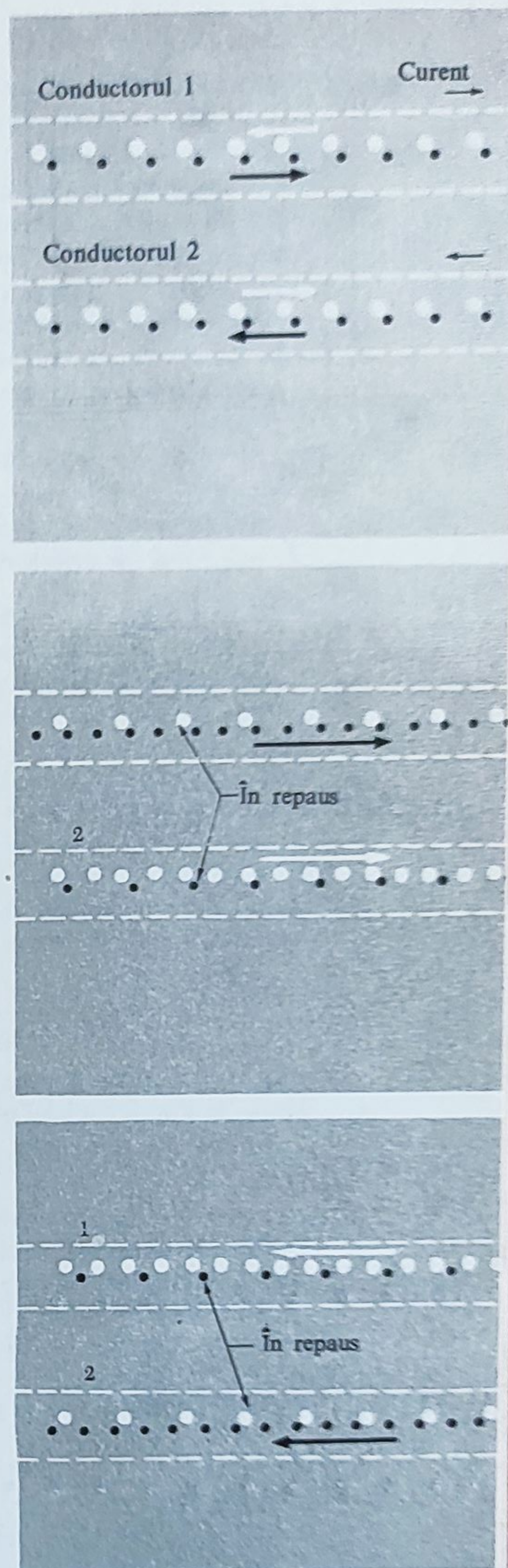
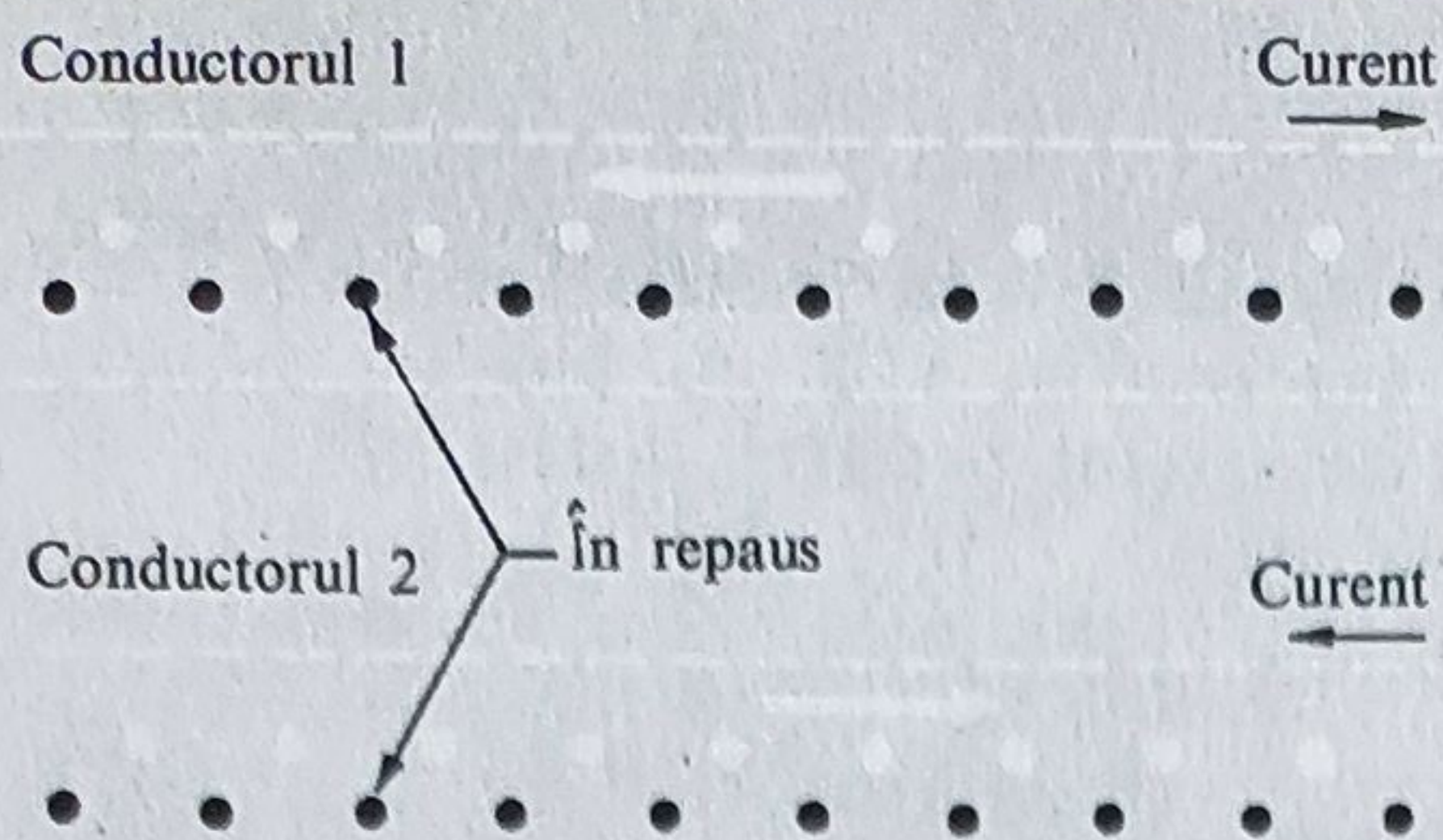


Fig. 5.22. (a) Doi conductori prin care trec curenți în sensuri opuse, în sistemul laboratorului. Curentul este dat de ionii pozitivi și negativi, ce se mișcă cu viteze egale.  
(b) Sistemul de referință în repaus al ionilor negativi din conductorul 1 și al ionilor pozitivi din conductorul 2.  
(c) Sistemul de referință în repaus al ionilor pozitivi din conductorul 1 și al ionilor negativi din conductorul 2.





mărimea curenților electrici nu și de modul cum se face transportul de sarcină. (Problema 5.15 dă o demonstrație generală a acestei afirmații.)

În acest capitol am văzut cum invarianța sarcinii implică existența forțelor dintre curenții electrici. Asta nu înseamnă că una este cauza celeilalte. Ele sînt, pur și simplu, două aspecte ale electromagnetismului, legătura dintre ele constituind o minunată ilustrare a unei legi mai generale: fizica este aceeași în toate sistemele de referință inerțiale.

Dacă pentru analiza fiecărui sistem de purtători de sarcină în mișcare, ar fi trebuit să facem transformările „directe și inverse” între diferitele sisteme de coordonate, sarcina noastră ar fi fost plictisitoare și confuză. Există o metodă mai bună. Acțiunea generală a unui curent asupra celuilalt, sau a unui curent asupra unui purtător de sarcină în mișcare, poate fi descrisă complet și concis, introducînd un nou câmp, *cîmpul magnetic*.

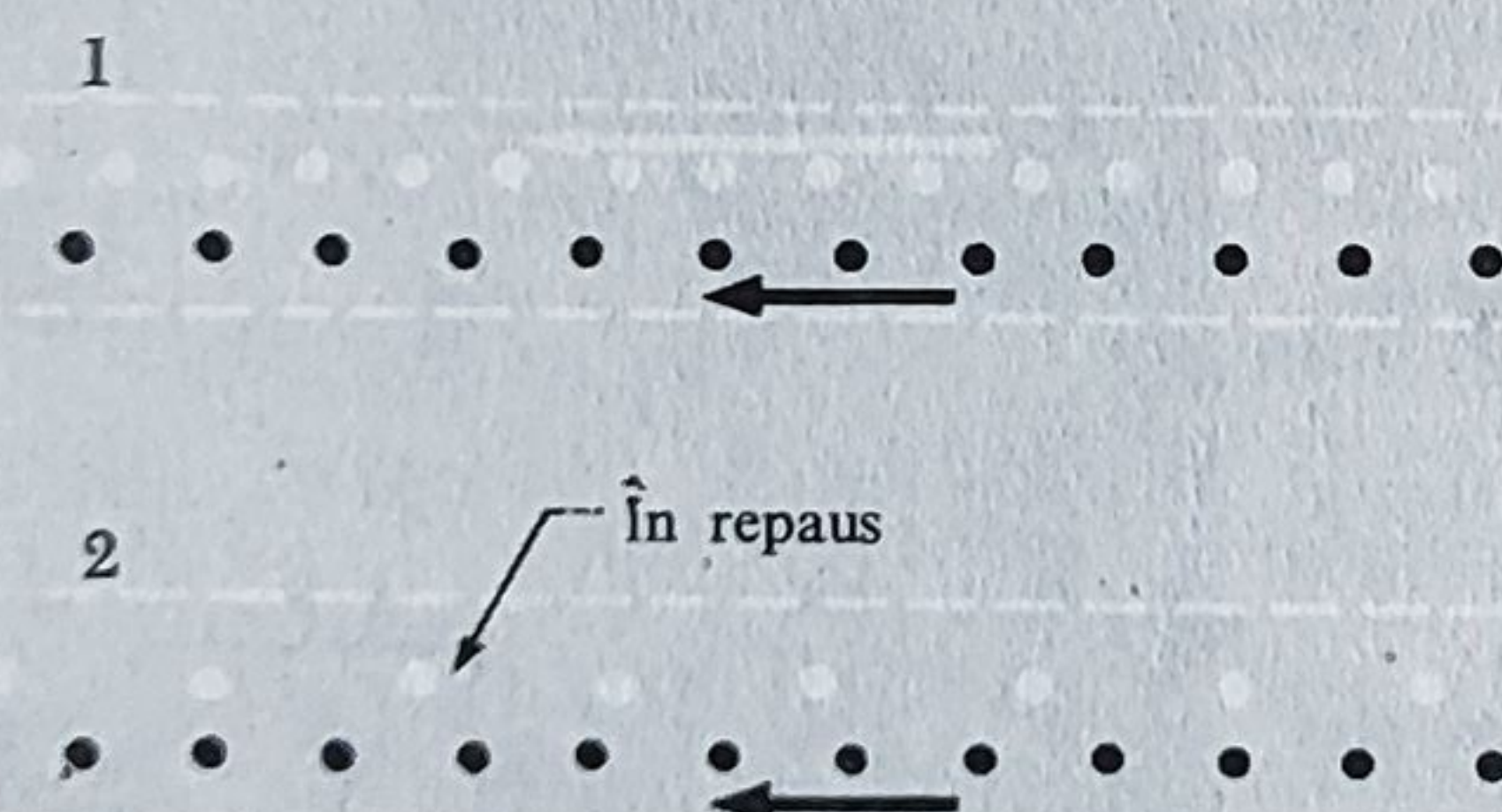
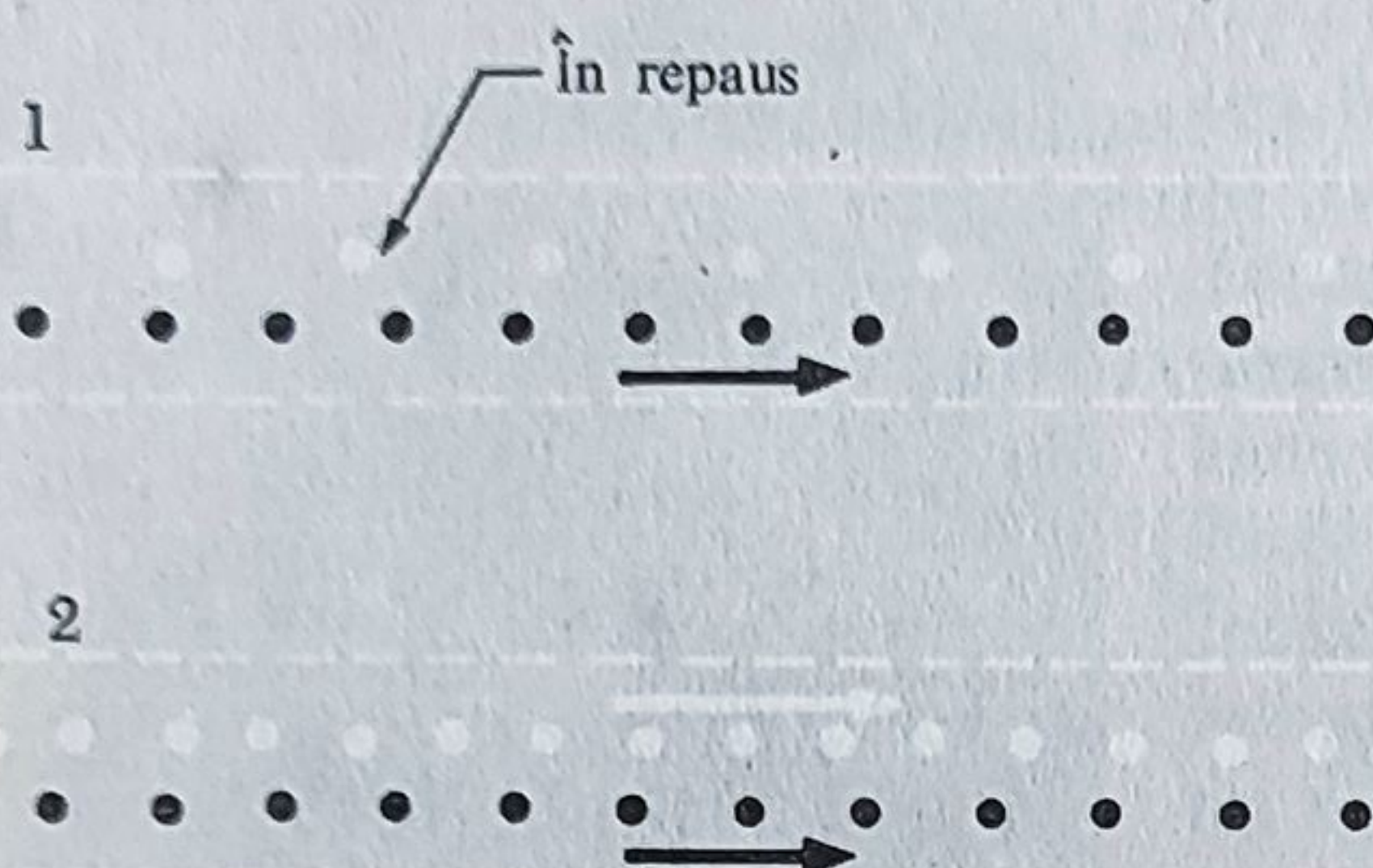


Fig. 5.23. (a) Doi conductori prin care trec curenți în sensuri opuse, în sistemul laboratorului. Curentul este dat doar de mișcarea ionilor negativi (electroni), ca în firul metalic.

(b) Sistemul de referință în repaus al electronilor din firul 1. Observați că, în firul 2, ionii pozitivi sînt comprimați, iar distribuția de electroni se contractă și mai mult.

(c) Sistemul de referință în repaus al electronilor din firul 2. La fel ca în (b) celălalt fir apare, în raport cu acești electroni aflați în repaus, încărcat negativ.



## PROBLEME

*Cîmpul electric în diferite sisteme de referință.*

**5.1.** Un condensator este format din două plăci dreptunghiulare, paralele, cu distanța dintre ele de 2 cm. Dimensiunile plăcii: de la est la vest este de 20 cm, de la nord la sud — de 10 cm. Condensatorul se încarcă prin conectarea lui, pentru un timp scurt, la o baterie de 300 V. Care este numărul electronilor în exces de pe placa negativă? Care este intensitatea cîmpului electric dintre plăci? Determinați, acum, următoarele mărimi care se măsoară într-un sistem de referință ce se mișcă spre răsărit cu viteza de  $0,6c$  în raport cu laboratorul, în care plăcile se găsesc în repaus: cele trei dimensiuni ale condensatorului, numărul electronilor în exces de pe placa negativă, intensitatea cîmpului electric dintre plăci. Răspundeți la aceleași întrebări pentru cazul unui sistem de referință ce se mișcă în sus cu viteza de  $0,6c$ .

*Cîmpul unei sarcini în mișcare la limita regimului extrem relativist.*

**5.2.** Pentru o evaluare grosolană a „turtirii” relativiste a configurației liniilor de cîmp ale unui purtător de sarcină în mișcare, putem folosi unghiul  $\alpha$  dintre două suprafețe conice ce includ jumătate din fluxul total al cîmpului electric. Înseamnă că jumătate din fluxul printr-o sferă va fi cuprins în zona ecuatorială dintre  $\theta' = \pi/2 + \alpha/2$  și  $\theta' = \pi/2 - \alpha/2$ . Considerăm doar cazul regimului extrem relativist cînd  $\gamma \gg 1$ . În acest caz, vor fi luate în considerație doar unghiurile  $\theta'$ , astfel încît  $\theta' = \pi/2 - \varepsilon$  cu  $|\varepsilon| \ll 1$ . Să arătăm, în primul rînd, că ec. (12), în acest caz, poate fi aproximată cu:

$$E' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(r')^2} \frac{\gamma}{(1 + \gamma^2\varepsilon^2)^{3/2}}.$$

Apoi vom integra după  $\varepsilon$ , pentru a obține fluxul prin cordonul ecuatorial îngust, între limitele  $-\alpha/2$  și  $+\alpha/2$ .

$$R: \alpha = 2/(\sqrt{3}\gamma).$$

*Aplicarea rezultatelor problemei 5.2.*

**5.3.** Un proton de 30 BeV trece la distanța de  $10^{-7}$  cm de un atom de hidrogen. Evaluați maximul intensității cîmpului electric și aproximați durata impulsului cîmpului electric ce acționează asupra atomului. Faceți același lucru pentru un electron de 30 BeV, ce trece la o aceeași distanță. Folosiți următoarele valori echivalente pentru masele de repaus: 1 BeV pentru proton și 0,5 MeV pentru electron.

*O scurtă problemă pentru discuție.*

**5.4.** Considerăm traiectoria unei particule încărcate ce se mișcă în direcția  $x$ , cu viteza de  $0,8c$ , cînd intră într-un domeniu larg, în care există un cîmp electric



pe direcția  $y$ . Arătați că viteza particulei pe direcția  $x$  trebuie să scadă. Ce se întâmplă cu componenta pe axa  $x$  a impulsului?

*Echivalența dintre descrierea în sistemul laboratorului și sistemul de referință al particulei.*

5.5. Plăcile de deflecție într-un osciloscop catodic de înaltă frecvență, sînt două plăci dreptunghiulare de 4 cm lungime și 1,5 cm lățime, așezate la distanța de 0,8 cm una de alta. Diferența de potențial dintre plăci este de 6000 V. Un electron, care a fost accelerat la o diferență de potențial de 250 kV, intră între plăcile de deflecție dinspre stînga mișcîndu-se, inițial, paralel cu ele și aflîndu-se la jumătatea distanței dintre ele. Vrem să găsim poziția electronului și direcția mișcării sale cînd părăsește cîmpul de deflecție, la celălalt capăt al plăcilor.

Vom neglija cîmpul de la margini și presupunem că cîmpul electric dintre plăci este uniform. Masa de repaus a electronului poate fi luată egală cu 500 keV. Vom analiza, întîi, ce se întâmplă în sistemul laboratorului, răspunzînd la următoarele întrebări:  $\gamma = ?$ ;  $\beta = ?$ ;  $p_x$ , în unități  $mc = ?$ ; timpul petrecut între plăci (se neglijează variația vitezei orizontale, discutate în problema 5.4); componenta transversală a impulsului căpătat, în unități  $mc = ?$ ; viteza transversală la ieșire = ?; poziția pe verticală, la ieșire = ?; direcția după care iese = ? Descrieți apoi întregul proces, așa cum apare el, într-un sistem de referință inertial ce se mișcă împreună cu electronul, în momentul în care intră în regiunea de deflecție; cum arată plăcile? Care este cîmpul dintre ele? Ce se întâmplă cu electronul în acest sistem de coordonate? Important în acest exercițiu este să ne convingem că cele două descrieri sînt complet echivalente.

*Problemă pentru discuție.*

5.6. Observați ce reprezintă suprapunerea figurilor 5.16 și 5.17. Cîmpurile, din regiunea de tranziție, se adună sau se scad? Puteți explica acest lucru în funcție de natura mișcării purtătorilor de sarcină implicați?

5.7. Un purtător de sarcină se mișcă în lungul axei  $x$  pozitive, spre origine, cu viteza  $v$ . La momentul  $t = 0$ , ajunge în origine și se oprește instantaneu, apoi (ca și cum ar fi fost respins elastic), se întoarce, mișcîndu-se cu aceeași viteză constantă în sensul pozitiv al axei  $x$ . Schițați cîmpul, la un moment oarecare, după reflectarea particulei.

5.8. Figura reprezintă o particulă pozitivă, la o viteză apropiată de viteza luminii, ce se apropie de origine dinspre stînga și o particulă negativă ce vine dinspre dreapta, cu aceeași viteză. Ele se ciocnesc în origine, la  $t = 0$ , își cheltuiesc într-un mod oarecare energia cinetică și rămîn aici ca niște entități neutre. Cum credeți



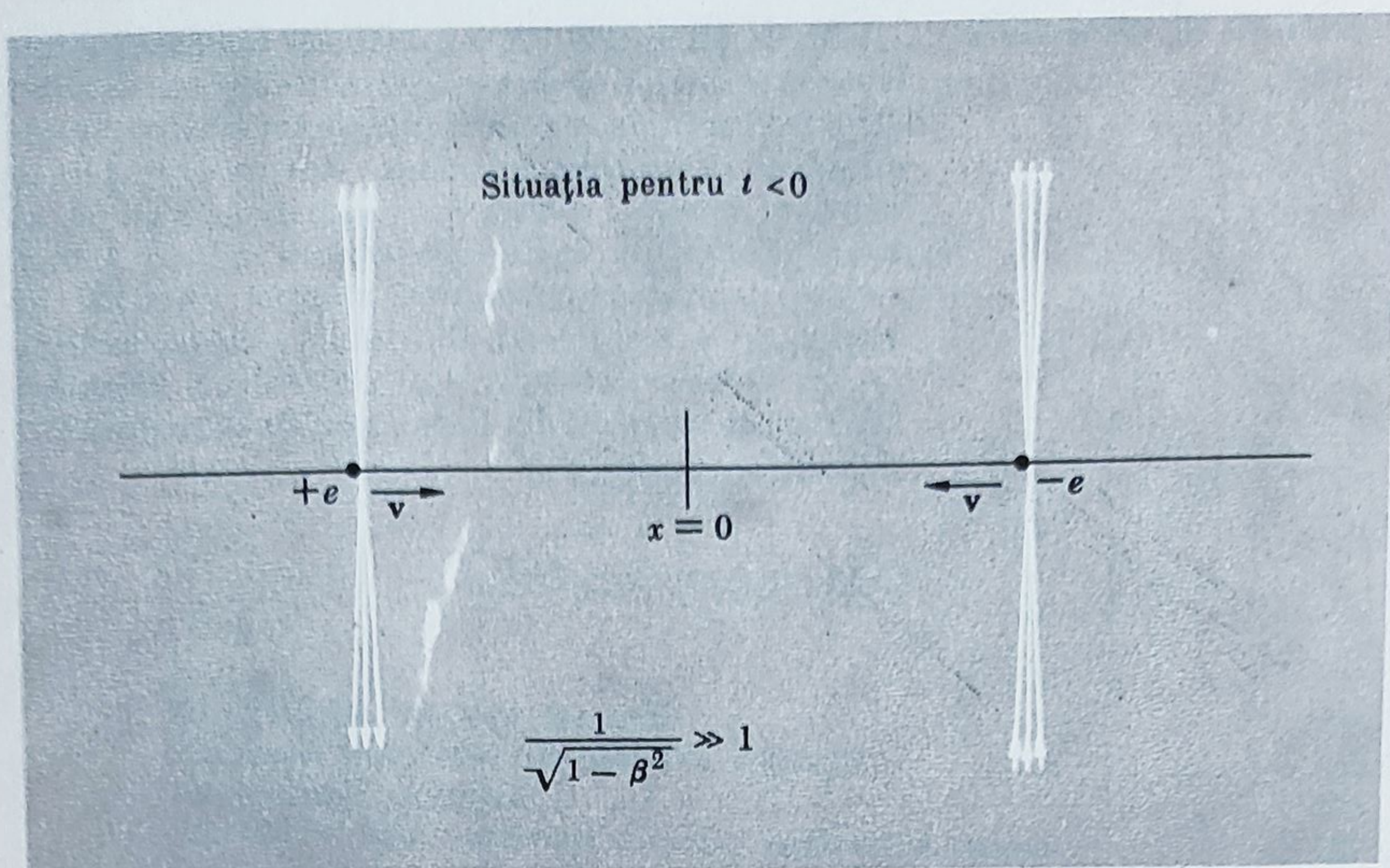


Fig. la problema 5.8.

că arată câmpul electric la un moment oarecare  $t > 0$ ?  
Desenați liniile de câmp. Cum se schimbă câmpul cu trecerea timpului?

*O interacțiune a particulelor încărcate în „aproximația de impuls”.*

5.9. Particula 1, cu sarcina  $q_1$ , se găsea în repaus. Particula 2, cu sarcina  $q_2$ , trece pe lângă ea, la distanța minimă  $b$ , mișcându-se cu viteza  $v$ . Prima particulă era atât de masivă, încât viteza imprimată de forța coulombiană îi permite în timpul trecerii o deplasare neglijabilă. A doua particulă era la fel de masivă, astfel încât orice variație în viteza ei sau deviație de la traiectoria rectilinie, este neglijabilă. Cât de mare este impulsul transversal căpătat de fiecare particulă în urma întâlnirii lor? (Aici, transversal înseamnă perpendicular pe direcția de mișcare a particulei 2.) Răspundeți, întâi, pentru cazul particulei 2, lucrând în sistemul de referință în care particula 1 se află în repaus. Aplicând legea lui Gauss unui cilindru, nu mai este necesară integrarea. Este exactă formula din punctul de vedere al teoriei relativiste? Studiați, acum, impulsul căpătat de particula 1. Câmpul ce acționează asupra ei este cel al unui purtător de sarcină în mișcare, dat de ecuația (12). Momentul transversal poate fi calculat cu ajutorul unor integrări aproximative. Totuși, în loc de asta puteți folosi legea lui Gauss sau puteți argumenta direct cu ajutorul primului rezultat obținut.

R:  $2q_1q_2/vb$ . (pentru fiecare particulă).



O problemă de conservare a sarcinii.

**5.10.** În paragraful 5.9, s-a subliniat deosebirea dintre invarianța sarcinii și conservarea sarcinii și s-a remarcat că conservarea nu implică neapărat invarianța. Totuși, afirmația că teorema lui Gauss este valabilă într-un sistem de referință, pentru orice suprafață, împreună cu teoria relativității, implică conservarea sarcinii. Arătați aceasta, analizând următoarea situație ipotetică: În origine, la  $t = 0$ , se creează dintr-odată o sarcină pozitivă. La un anumit moment  $t = t_1$ , observatorii determină integrala de suprafață din  $\mathbf{E}$ , pe suprafețe de raze diferite. Folosiți-le.



## Capitolul 6

# Cîmpul magnetic

6.1. Definiția cîmpului magnetic	202
6.2. Unele proprietăți ale cîmpului magnetic	208
6.3. Vectorul potențial	213
6.4. Cîmpul unui conductor oarecare străbătut de curent	217
6.5. Cîmpul produs de spire și bobine	219
6.6. Variația lui $B$ în apropierea unei foițe de curent	224
6.7. Cum se transformă cîmpurile	228
6.8. Experiența lui Rowland	233
6.9. Conductibilitatea electrică într-un cîmp magnetic: Efectul Hall.	234
Probleme	237



## 6.1. DEFINIȚIA CÎMPULUI MAGNETIC

Asupra unui purtător de sarcină, ce se mișcă paralel cu un curent de alți purtători, se exercită o forță perpendiculară pe viteza lui. Aceasta decurge din analiza situației prezentate în figura 5.20 din capitolul precedent. Că așa se întâmplă, putem vedea din devierea unui fascicul de electroni de către un curent aflat în apropierea sa (fig. 5.3). Vom arăta, acum, ce se întâmplă dacă sarcina de probă se va mișca în altă direcție. Știți, deja, că în jurul unui conductor străbătut de curent există un câmp magnetic, ce exercită o forță asupra unui purtător de sarcină în mișcare. La fel cum am definit vectorul intensitatea câmpului electric  $E$ , ca fiind forța ce acționează asupra unității sarcinii de probă aflată în repaus, putem defini un *alt* câmp, prin acea parte a forței ce acționează asupra sarcinii de probă în mișcare, fiind proporțional cu viteza. Pentru a fi mai preciși, să presupunem că într-un anumit punct din spațiu, la un anumit moment, într-un sistem de coordonate oarecare, experiențele arată că forța ce se exercită asupra unei sarcini de probă  $q$ , care se mișcă cu o viteză constantă  $v$ , este dată de:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

în care  $E$  și  $B$ , sînt vectori ce nu depind de  $v$ . Dacă această relație este adevărată, *definim*  $E$  ca fiind intensitatea câmpului electric în acel loc și  $B$  ca fiind inducția magnetică în acel loc.

Pentru a justifica această determinare trebuie să arătăm, experimental sau pe altă cale, că o asemenea relație poate fi găsită oricînd. N-am făcut acest lucru pînă acum dar am arătat că în unele cazuri importante și instructive, această relație este valabilă. În paragr. 5.8, am arătat că forța ce acționează asupra sarcinii de probă, nu depinde de loc de viteza ei, dacă toate celelalte sarcini se află în repaus. Asta înseamnă că pentru  $B = 0$ , ec. (1) este valabilă peste tot. Știm din capitolul precedent că asupra unei particule, ce se mișcă paralel cu curentul constant de purtători de sarcină din conductor, se exercită o forță proporțională cu viteza și perpendiculară pe ea așa cum cere produsul vectorial din ec. (1). De fapt, noi putem spune exact cum trebuie să fie vectorul inducția magnetică  $B$ , pentru ca să fie în concordanță cu observațiile noastre și cu simetria sistemului. Va fi un vector perpendicular pe planul figurii, adică, perpendicular și pe conductor și pe viteza  $v$  a sarcinii de probă. Pentru ca ec. 5.45 să fie în concordanță cu ec. (1), trebuie ca mărimea lui  $B$  să fie egală cu:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (2)$$



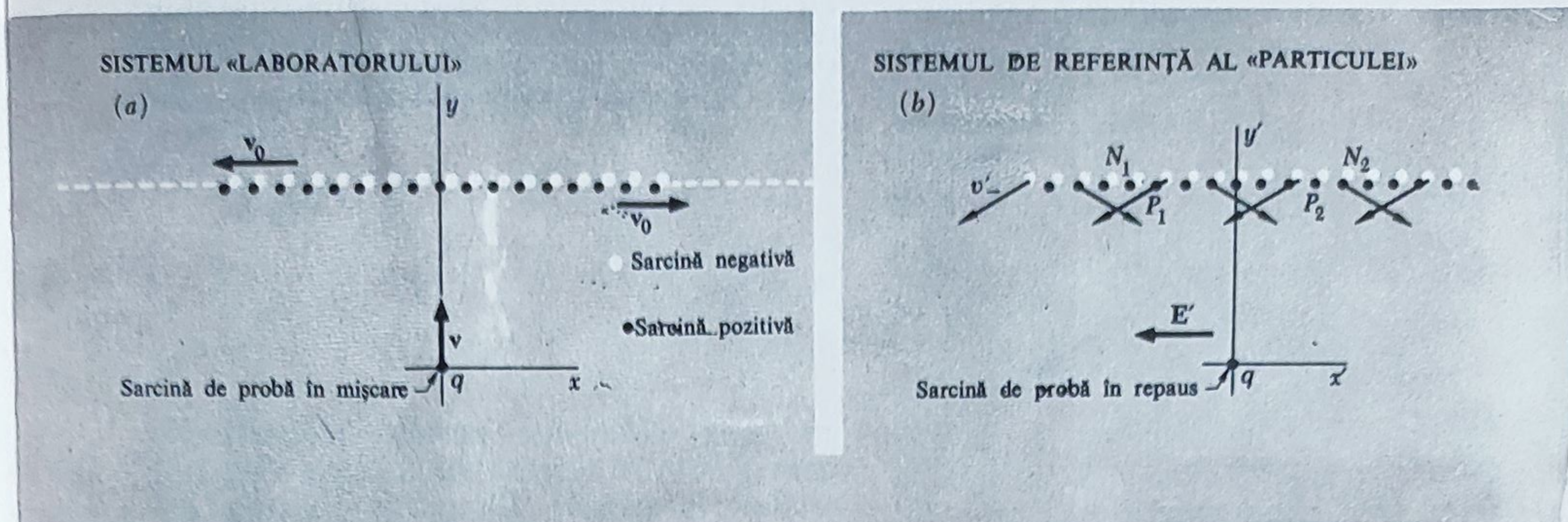


Fig. 6.1. (a) O sarcină de probă se mișcă, în sistemul laboratorului, perpendicular pe șirul de purtători de sarcină. (b) În sistemul de referință al „particulei”, șirul de purtători de sarcină se mișcă în întâmpinarea sarcinii de probă.

Am dedus câmpul magnetic al unui curent rectiliniu, doar pe baza studiului câmpului *electric* al purtătorilor de sarcină în mișcare. Doar câteva puncte neesențiale ale deducerii noastre sînt incomplete. Trebuie să arătăm că o forță dependentă de viteză, de aceeași mărime și direcție corespunzătoare ia naștere și în cazul cînd sarcina de probă se apropie sau se îndepărtează de conductor radial. Acest lucru îl putem face în același mod, numai că amănuntele matematice sînt puțin greoaie dacă încercăm să le rezolvăm riguros, fără aproximări. Interesante sînt nu transformările matematice de coordonate ci ceea ce determină existența forței. Această cauză poate fi găsită fără nici un fel de calcule.

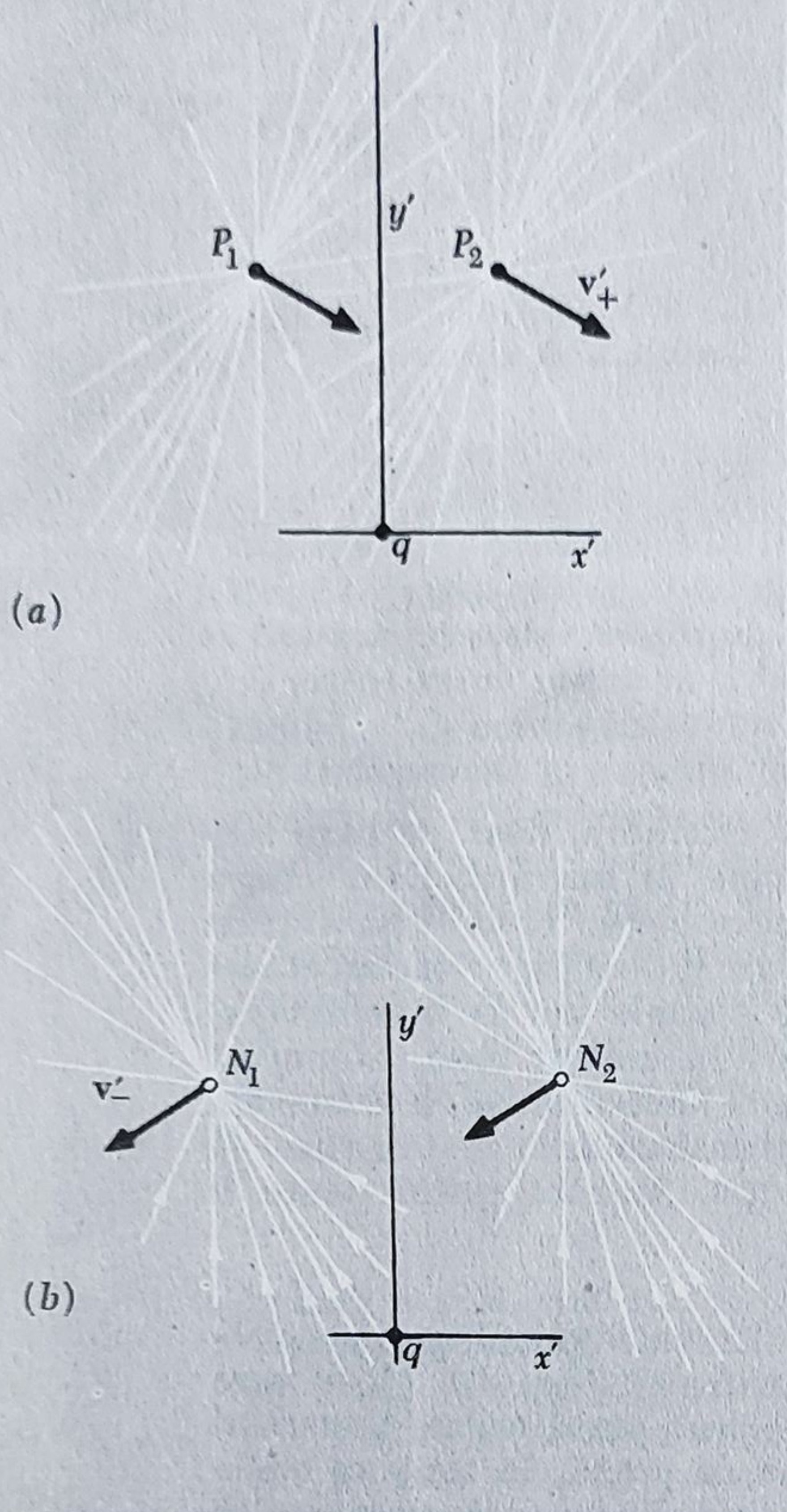
În figura 6.1, *a* am schițat particula de probă, ce se mișcă spre conductor, în sistemul „laboratorului”. În sistemul „particulei” (fig. 6.1, *b*), în care sarcina de probă este în repaus, observăm că șirul purtătorilor de sarcini pozitive și negative se mișcă în jos, spre sarcina de probă, în timp ce unele particule se mișcă oblic, cele pozitive spre dreapta, în jos, cele negative în jos, spre stînga. Aceasta ne sugerează mișcarea unui grup de elevi în excursie. Sperăm să descoperim, în acest sistem, o intensitate a câmpului electric  $E'$ , îndreptat spre stînga.\* Dar, atîta timp cît totul pare perfect simetric, cum poate să apară un asemenea câmp?

Să considerăm un purtător de sarcină pozitivă  $P_1$  din sistemul particulei și un purtător de sarcină pozitivă  $P_2$ , simetric cu acesta. (Dacă ar fi trebuit să sumăm contribuțiile tuturor purtătorilor de sarcini pozitive, i-am fi putut

\* Căutăm o forță, care să apară unui observator, aflat în sistemul de referință al laboratorului, perpendiculară pe viteza particulei de probă, exact ca în primul caz, cînd forța era perpendiculară pe viteză și orientată spre stînga față de vectorul viteză.



Fig. 6.2. Se arată cum apare o forță în sistemul de referință al particulei în figura 6.1, b. Cîmpurile electrice (a) — a două sarcini pozitive, simetric dispuse și (b) a două sarcini negative, simetric dispuse.



grupa în asemenea perechi simetrice — unul aflat în jumătatea din dreapta a șirului, celălalt în stînga). Cîmpurile electrice ale acestor doi purtători de sarcină sînt ilustrate în figura 6.2, a. Acum este clar de ce acțiunea lor asupra lui  $q$  este diferită. Ca urmare a contracției relativiste a cîmpului, dată de factorul  $[1 - \beta^2 \sin^2 \theta']^{-3/2}$  în ec. 5.12, cîmpul purtătorului de sarcină  $P_2$  în  $q$  este mai intens decît cîmpul purtătorului de sarcină  $P_1$ . Dacă cîmpurile ar fi avut simetrie sferică după direcția  $x'$ , ele s-ar fi anulat reciproc. În loc de asta, cîmpul purtătorului de sarcină  $P_2$  predomină, dînd naștere unei componente orientate spre stînga lui  $x'$ .

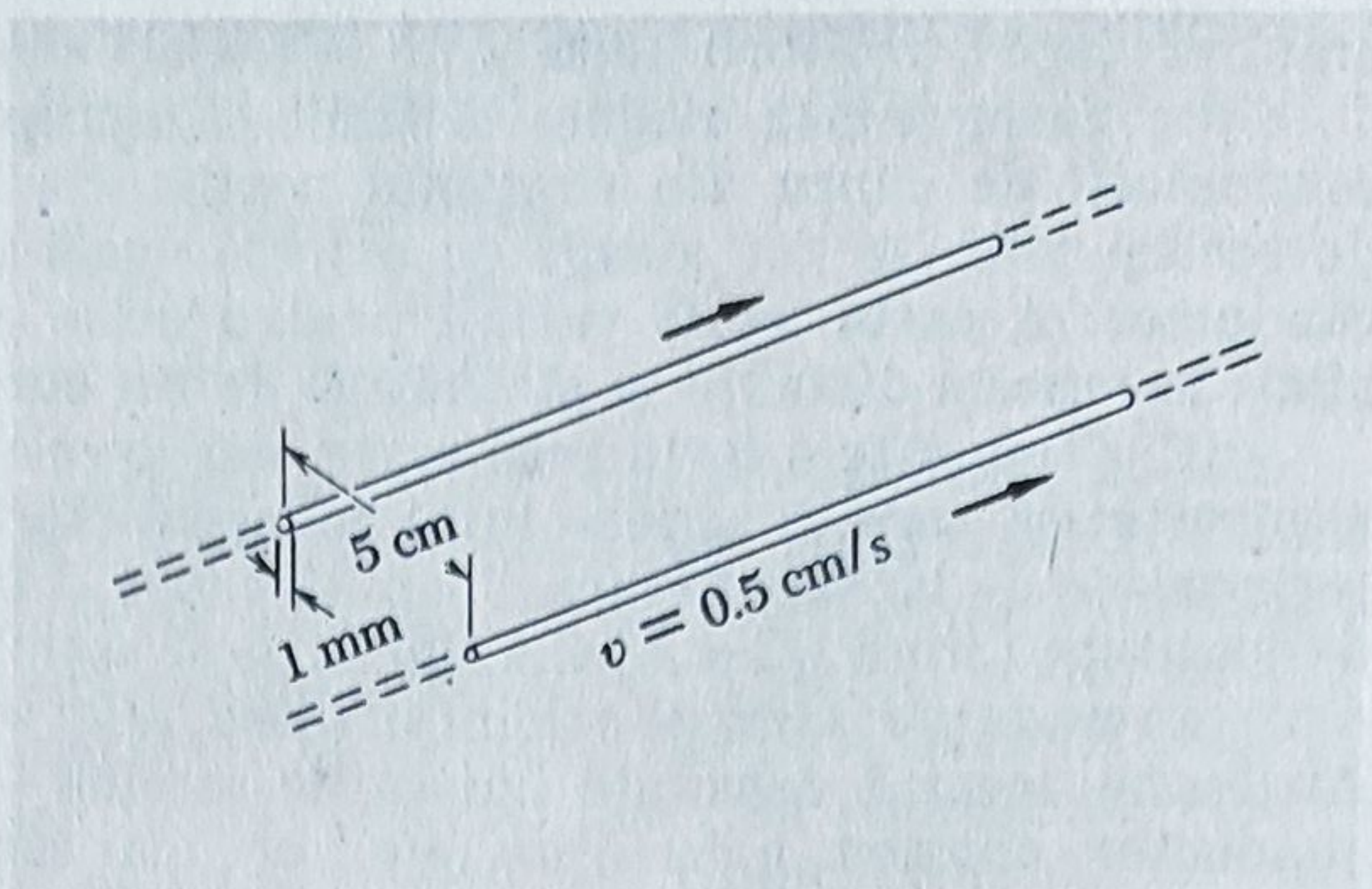
Să considerăm acum, doi purtători de sarcină negativă  $N_1$  și  $N_2$ , dispuși simetric ca în figura 6.2, b. În acest caz,  $N_1$  produce un cîmp mai intens și rezultă, de asemenea, o componentă a cîmpului electric în sensul negativ al lui  $x'$ . Pe de altă parte, este evident că componentele  $y'$  ale cîmpurilor purtătorilor de sarcină pozitive și negative se anulează reciproc. Rămîne o intensitate a cîmpului electric  $E'$  și, prin urmare, o forță ce acționează asupra lui  $q$ , paralelă la conductor și îndreptată în sensul negativ al lui  $x'$ .

Ne este clar acum că interacțiunea magnetică dintre doi purtători de sarcină în mișcare este un efect relativist. Acest lucru era indicat și de apariția factorului  $vv_0/c^2$  în ec. (5.44). În lumea purtătorilor de sarcini electrice în mișcare, dacă  $c$  ar fi infinit de mare, magnetismul ar dispărea. De aceea pare straniu că forțele magnetice sînt atît de mari încît pot pune în mișcare rotoarele motoarelor și ridica greutatea. Am remarcat, mai înainte, că forțele electrostatice ce se exercită între obiectele mari nu sînt prea semnificative. De ce nu sînt forțele magnetice mult mai mici? Explicația se află în neutralitatea electrică aproape completă a substanțelor de masă mare. Exemplul următor constituie o bună ilustrare a celor afirmate. Vom calcula forța ce apare între doi conductori paraleli străbătuți de curenți.

Deoarece, în acest exemplu, ne întîlnim pentru prima oară cu cîmpul magnetic din interiorul substanței, ne vom întrerupe expunerea pentru a ne opri asupra acestei chestiuni. Majoritatea metalelor, inclusiv cuprul (dar



Fig. 6.3. Doi conductori în care se presupune că electronii de conducție se mișcă cu viteza medie a mișcării ordonate de 0,5 cm/s.



nu și fierul), și majoritatea substanțelor în general, n-au aproape nici o influență asupra câmpului magnetic. Putem presupune că inducția magnetică  $B$  din interiorul cuprului este practic același ca în cazul în care curenții ar trece prin vid. Asupra acestor chestiuni vom reveni mai amănunțit în cap. 10. Până atunci, vom evita să vorbim despre fier.

Considerăm doi conductori de cupru cu diametrul de 1 mm, cu distanța dintre ei de 5 cm (fig. 6.3). Prin fiecare conductor trece un curent; să presupunem că viteza medie a electronilor de conducție din fiecare conductor, este de 0,5 cm/s. După cum știm, această viteză medie a mișcării ordonate este mult mai mică decât vitezele de mișcare dezordonată a electronilor. Dacă presupunem că la un atom de cupru revine un electron de conducție, putem găsi ușor numărul electronilor de conducție dintr-un conductor de 1 cm lungime și diametru 1 mm. Este aproximativ egal cu  $6 \cdot 10^{20}$ . (Pentru această evaluare trebuie să cunoaștem densitatea cuprului — 8 g/cm<sup>3</sup>, masa atomică a cuprului — 64 și numărul lui Avogadro.) Atunci, densitatea liniară  $\lambda$  a purtătorilor de sarcini negative în mișcare este

$$\lambda = (6 \cdot 10^{20}) \cdot (1,6 \cdot 10^{-19}) \approx 10^2 \frac{C}{cm} = 10^4 \frac{C}{m}. \quad (3)$$

Purtătorii de sarcini pozitive sînt în repaus. Produsul dintre  $\lambda$  și viteza de drift este egal cu  $10^2 \cdot 0,5$  ceea ce corespunde unei intensități a curentului de 50 A.

Să găsim forța exercitată asupra unui electron din celălalt conductor, aflat la distanța  $r = 5$  cm. Acest electron se mișcă, de asemenea, cu viteza medie de 0,5 cm/s, dacă prin conductor trece același curent. Aplicînd ec. (5.45), obținem:

$$F = \frac{q\lambda vv_0}{2\pi\epsilon_0 r c^2} \approx 1,6 \cdot 10^{-25} \text{ N}. \quad (4)$$

Întrucît o asemenea forță se exercită asupra fiecărui electron de conducție din celălalt conductor, forța totală ce acționează asupra electronilor dintr-un conductor de lungime 1 cm este  $(6 \cdot 10^{20}) (1,6 \cdot 10^{-25})$  sau aproximativ  $10^{-3}$  N/m. Noi o observăm ca o forță ce acționează asupra conductorului; orice impuls primit de electroni se transmite rețelei în care sînt dispuși. În ceea ce privește direcția forței, analiza situației reprezentate în figura 5.20



arată că dacă purtătorii de sarcini de același semn se mișcă paralel unii față de alții, interacțiunea magnetică tinde să apropie conductorii. Prin urmare, conductorii de cupru din exemplul nostru, dacă sînt străbătuți de curenți de același sens, se vor atrage cu o forță egală cu  $10^{-5}$  N pe centimetru de conductor. Aceasta va fi valabil pentru orice conductori rectilinii paraleli, aflați la aceeași distanță și străbătuți de un curent cu intensitatea de 50 A.

$10^{-5}$  N nu este o forță prea mare, dar decelabilă. S-o comparăm cu forța electrostatică care ar acționa între doi conductori ce poartă sarcini statice ne-compensate de  $10^4$  C/m fiecare. Cîmpul electric al unui șir de purtători de sarcină de densitate  $\lambda$  fiind  $\lambda/2\pi\epsilon_0 r$  (ec. 1.26), forța ce acționează asupra unui centimetru dintr-un șir de purtători de sarcini similare, aflat la  $r$  cm, trebuie să fie  $\lambda^2/2\pi\epsilon_0 r$ . Atribuind această densitate liniară de sarcină —  $10^4$  C/m — electronilor din conductor, obținem o forță de  $(c/v)^2$  ori mai mare decît forța magnetică de interacțiune de  $10^{-3}$  N/m, ceea ce reprezintă  $36 \cdot 10^{14}$  N/m sau aproape  $4 \cdot 10^{13}$  t/cm! Fenomenele magnetice ar fi trecut neobservate, dacă natura n-ar fi conceput două feluri de sarcini capabile să anihileze interacțiunea electrostatică. Evident, o lume cu un singur fel de sarcini ar fi fost atît de diferită, încît nici nu ne-o putem imagina. La scară atomică, unde rolul primordial în interacțiunea dintre particulele elementare îl joacă forțele de tip coulombian, efectele magnetice trec pe locul al doilea în comparație cu interacțiunile electrice. În general vorbind, ele sînt mai slabe exact cu acel factor, care era de așteptat, pătratul raportului dintre viteza particulei și viteza luminii.

Interacțiunea magnetică dintre curenții paraleli depinde doar de produsul dintre intensitățile curenților și nu de densitățile de sarcină și vitezele cu care se mișcă, luate în parte. În exemplul de mai sus, am introdus densitatea de sarcină și viteza de mișcare pentru a compara interacțiunile electrostatice și magnetice. De obicei, avem de-a face doar cu curentul total din fiecare conductor, iar mecanismul transportului de sarcină — dacă sînt mulți purtători de sarcină ce se mișcă lent sau numai cîțiva care se mișcă rapid — nu ne interesează. Fie  $I_1$  — intensitatea curentului din conductorul 1 (fig. 6.4). Presupunem că în conductorul 2, aflat la distanța  $r$ , cantitatea de sarcină  $\lambda$  C/m se mișcă cu viteza  $v_2$ . Știm că forța exercitată pe unitatea de lungime a conductorului 2 trebuie să fie egală cu  $I_1 \lambda v_2 / 2\pi\epsilon_0 r c^2$ , ceea ce este echivalent cu:

$$\text{Forță pe metru} = \frac{I_1 I_2}{2\pi\epsilon_0 r c^2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \quad (5)$$

deoarece  $\lambda v_2$  reprezintă intensitatea curentului  $I_2$  din conductorul al doilea.

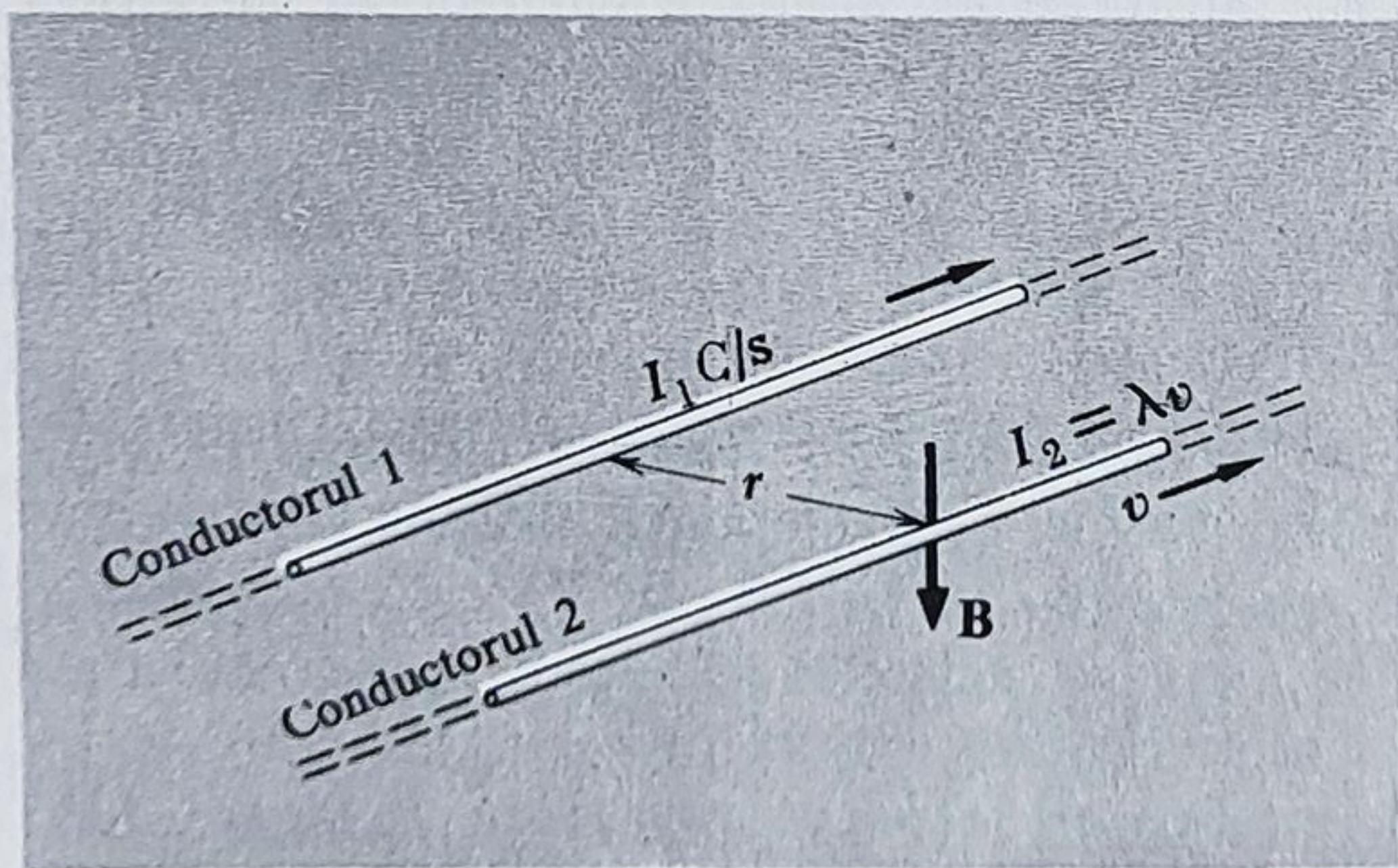


Fig. 6.4. Conductorul 1 produce o inducție magnetică  $B$  în apropierea conductorului 2. Forța exercitată asupra conductorului 2, pe lungimea de 1 cm, este dată de ec. 5.



Dacă exprimăm forța exercitată asupra unui conductor, prin care trece un curent constant de intensitate  $I$ , aflat într-un câmp de inducție magnetică  $\mathbf{B}$  produs de alți curenți, în funcție de inducția magnetică  $\mathbf{B}$ , ea este egală cu  $I\mathbf{B}$  pe lungimea de 1 cm a conductorului. Forța este perpendiculară pe conductor și pe câmpul magnetic, putând fi exprimată vectorial în modul următor:

$$\boxed{d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}} \quad (6)$$

În ecuația (6),  $d\mathbf{F}$  este forța exercitată asupra unei porțiuni mici de conductor, de lungime  $dl$ , străbătut de un curent constant  $I$  măsurat în amperi. Vectorul  $d\mathbf{l}$  este îndreptat pe direcția curentului de purtători de sarcini pozitive. Ecuația (6) decurge direct din definiția lui  $\mathbf{B}$  în ec. (1) și din definiția curentului în funcție de transportul de sarcină. Ea este valabilă pentru o porțiune conductoare de orice formă; trebuie, doar, să cunoaștem vectorul inducție magnetică  $\mathbf{B}$  în orice punct al traiectoriei. Observați că ec. (6) poate fi obținută, reamintindu-ne că forța exercitată asupra unui element de sarcină  $dq$ , ce se mișcă cu viteza  $\mathbf{v}$ , este  $d\mathbf{F} = dq(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Cum  $\mathbf{v} = d\mathbf{l}/dt$  și  $dq = Idt$ , expresia pentru  $d\mathbf{F}$  devine:

$$d\mathbf{F} = Idt \frac{d\mathbf{l}}{dt} \times \mathbf{B} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (7)$$

Unitatea practică pentru intensitatea curentului este amperul. Dacă intensitatea curentului dintr-un conductor rectiliniu este exprimată în amperi, inducția magnetică la distanța  $r$  m de conductor este

$$B(T) = \frac{\mu_0 \left( \frac{\text{H}}{\text{m}} \right) I(\text{A})}{2\pi r(\text{m})}. \quad (8)$$

Analog, forța ce se exercită asupra unui conductor străbătut de curentul de  $I$  A, într-un câmp de inducție magnetică de  $B$  tesla, este egală cu

$$d\mathbf{F}(\text{N}) = I(\text{A}) d\mathbf{l}(\text{m}) \times \mathbf{B}(\text{T}). \quad (9)$$

Unitatea de măsură pentru  $\mathbf{B}$ , care rezultă din aceste formule, dacă forța este exprimată în N și distanța în m, se numește *tesla*. Ea este de multă vreme folosită de fizicieni și ingineri și deși există și alte sisteme de unități, ea este unitatea cel mai des utilizată pentru inducția câmpului magnetic. Inducția câmpului magnetic a Pământului, în apropierea suprafeței sale, este în jur de aproximativ  $5 \cdot 10^{-5}$  T. Câmpul într-unul din conductorii din figura 6.3, produs de curentul din celălalt conductor, are intensitatea de  $2 \cdot 10^{-4}$  T. Câmpul dintre polii unui electromagnet mare se măsoară în zecimi de tesla. Sînt destul de ușor de atins valori de 1—2 tesla într-un magnet obișnuit și 6—8 tesla într-un magnet industrial supraconductor. Obținerea câmpurilor de 10 tesla cer eforturi deosebite. Câmpurile magnetice din petele solare sînt de ordinul sutimilor de tesla și se cunosc cîteva stele la suprafața cărora câmpurile sînt mai mari decît o zecime de tesla. În general, câmpurile magnetice extinse în univers sînt relativ slabe. O măsurătoare



recentă (un tip special de măsurătoare spectroscopică) a unui câmp magnetic interstelar dintr-o regiune mică a Galaxiei noastre, a dat o valoare în jur de  $10^{-9}$  T. La scară galactică, o asemenea valoare a câmpului nu este neglijabilă. De fapt, câmpurile magnetice au un rol esențial, uneori determinant în dinamica galactică. Astfel,  $10^{-4}$  T — valoare studiată de om de-a lungul secolelor, reprezintă acum, evaluat grosolan, media geometrică dintre câmpurile magnetice importante în cosmologie și cele mai puternice câmpuri obținute în laborator.

## 6.2. UNELE PROPRIETĂȚI ALE CÂMPULUI MAGNETIC

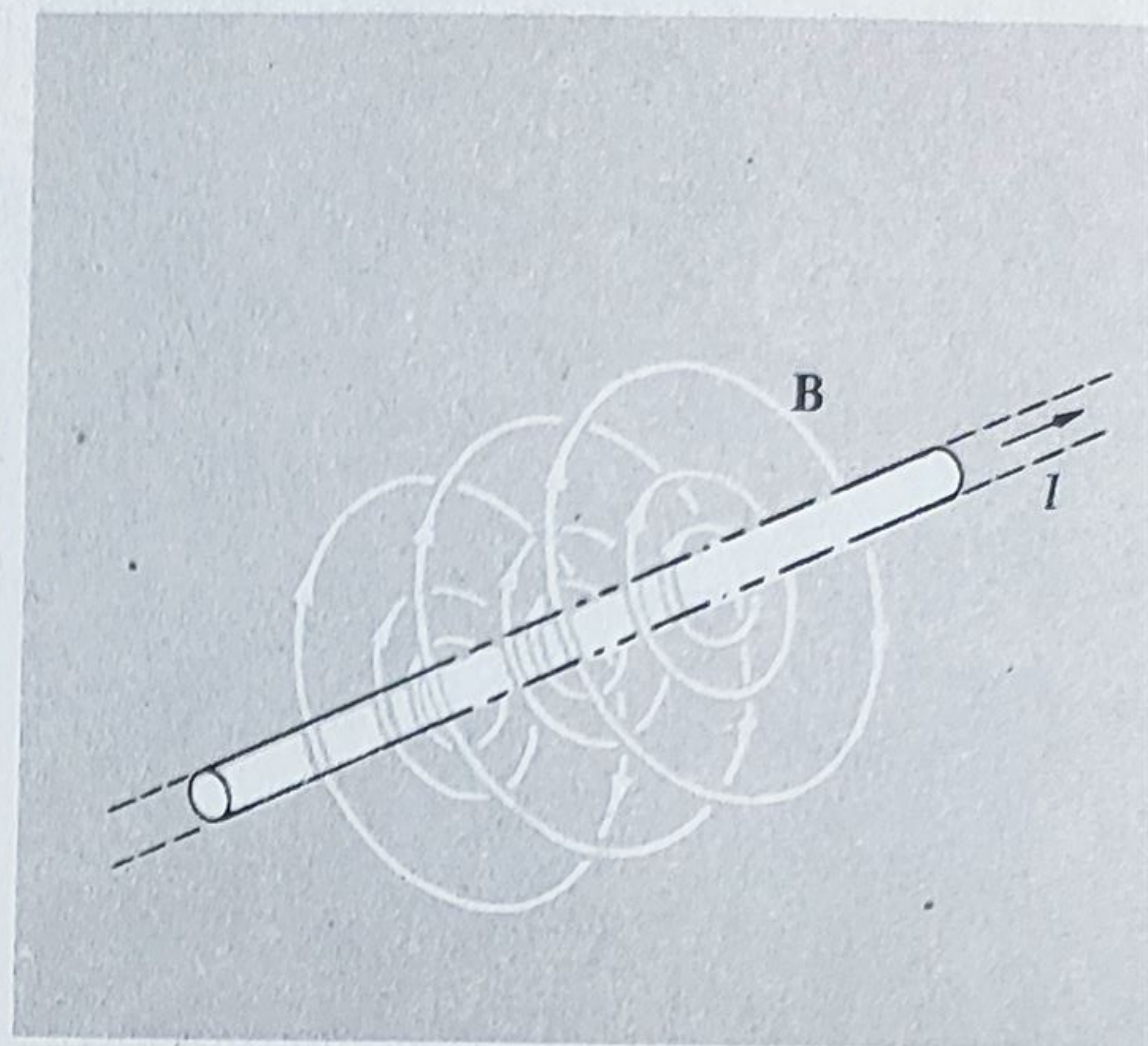
Câmpul magnetic ca și câmpul electric, ne ajută să descriem cum interacționează particulele încărcate unele cu altele. Dacă spunem că inducția magnetică în punctul (4,5; 3,2; 6,0) la orele 12<sup>00</sup> este îndreptat orizontal, în sensul negativ al axei  $y$  și are valoarea de  $5 \cdot 10^{-4}$  T, determinăm prin aceasta accelerația cu care se mișcă particula încărcată în acest punct de coordonate spațiu-timp. Remarcabil este faptul că o asemenea afirmație care determină, pur și simplu, mărimea vectorială  $\mathbf{B}$ , epuizează tot ce se poate spune. Cunoscând această mărime, se poate determina în mod univoc acea parte a forței care depinde de viteză și care acționează asupra unei particule încărcate *oarecare*, ce se mișcă cu o viteză *oarecare*. Aceasta face inutilă descrierea celorlalte particule încărcate care sînt surse ale câmpului. Cu alte cuvinte, dacă două sisteme complet diferite de particule în mișcare produc, într-un punct oarecare, același  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$ , atunci comportarea oricărei particule de probă în acel punct, în cele două sisteme, va fi exact aceeași. Acesta este și motivul pentru care, concepția de câmp ca intermediar în interacțiunea particulelor, este utilă. Și tot din acest motiv, considerăm câmpul ca o existență obiectivă, reală.

Ce este mai real, câmpul sau particulele, a căror interacțiune o descriem cu ajutorul câmpului? Aceasta este o chestiune mai profundă, pe care deocamdată o amînăm. Celor doi oameni, Faraday și Maxwell, câmpul electric și magnetic le-au apărut cu desăvîrșire reale, permițîndu-le pătrunderea esenței fenomenelor și ducîndu-i, astfel, la mari descoperiri. Vom considera și noi câmpul magnetic tot atît de real ca și ei și să studiem cîteva din proprietățile lui.

Pînă acum, am studiat doar câmpul magnetic al unui conductor rectiliniu sau al unui filament, parcurse de un curent constant. Am găsit că direcția câmpului este în orice punct perpendiculară pe planul ce conține filamentul și punctul în care se observă câmpul. Mărimea câmpului este proporțională cu  $1/r$ . Liniile de câmp sînt cercuri ce înconjoară filamentul, așa cum este arătat în figura 6.5. Sensul lui  $\mathbf{B}$  este dat de produsul vectorial definit mai înainte și de convenția, adoptată (arbitrar), de a scrie termenul al doilea din ecuația (1) sub forma  $+q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , și din punct de vedere fizic, de faptul că o sarcină pozitivă ce se mișcă în direcția unui curent pozitiv, este atrasă



Fig. 6.5. Liniile câmpului magnetic în jurul unui conductor rectiliniu străbătut de curent.



de acesta. Toate acestea sînt în concordanță, dacă sensul lui  $\mathbf{B}$  este raportat la sensul curentului, care este și sursa lui, în modul indicat în figura 6.5. Dacă privim în sensul pozitiv a curentului, sensul liniilor de câmp este în sensul acelor de ceasornic. Sau, dacă vreți, o puteți reține ca regula burghiului drept.

Să studiem integrala de linie din  $\mathbf{B}$  de-a lungul unui contur închis din acest câmp. (Să ne amintim că un studiu similar al câmpului electric al unei sarcini punctiforme, ne-a dus la o proprietate simplă și fundamentală a tuturor câmpurilor electrostatice.) Să începem cu conturul  $ABCD$  din figura 6.6, *a*. Acesta se găsește într-un plan perpendicular pe conductor; de fapt, ne interesează doar acest plan întrucît  $\mathbf{B}$  nu are componente paralele cu conductorul. Integrala de linie din  $\mathbf{B}$  pe acest contur este nulă din următoarele motive. Porțiunile  $BC$  și  $DA$  sînt perpendiculare pe  $\mathbf{B}$  și nu aduc nici o contribuție. De-a lungul lui  $AB$ ,  $\mathbf{B}$  este mai mare cu  $r_2/r_1$  decît de-a lungul lui  $CD$ ; dar  $CD$  este mai lung decît  $AB$  cu același factor, întrucît aceste arce subîntind același unghi. Astfel, contribuțiile ambelor arce sînt egale și de sens contrar și integrala totală este nulă.

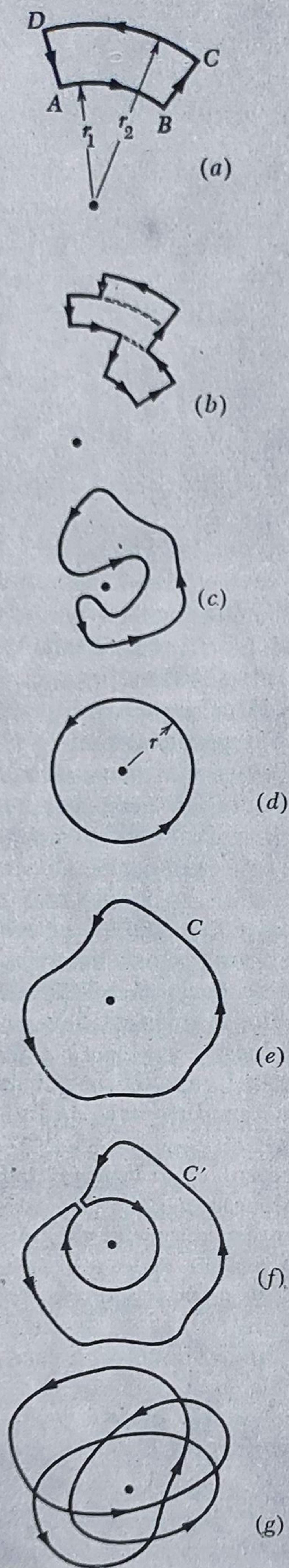
Rezultă că integrala de linie pe orice contur format din segmente radiale și arce, ca în figura 6.6, *b*, este, de asemenea nulă. De aici și pînă la a conchide că integrala de linie pe *orice* contur ce nu include conductorul este zero, nu e decît un pas. Pentru a clarifica totul, nu trebuie decît să arătăm că integrala pe un contur triunghiular mic tinde spre o valoare suficient de mică. În cazul câmpului electric, ne-am folosit de același lucru.

Un contur ce nu include conductorul este arătat în figura 6.6, *c* și care dacă ar fi din sfoară, ar putea fi îndepărtat de conductor. Integrala de linie pe orice contur asemănător este nulă.

Să considerăm, acum, un contur ce include conductorul, ca în figura 6.6, *d*. Circumferința este  $2\pi r$ , inducția magnetică are valoarea  $\mu_0 I / 2\pi r$  și este, peste tot, perpendiculară pe contur, astfel încît valoarea integralei de linie pe acest contur este  $(2\pi r) (\mu_0 I / 2\pi r)$  sau  $\mu_0 I$ . Putem afirma acum că *orice* contur ce înconjoară o dată conductorul trebuie să dea aceeași valoare. Să considerăm, de exemplu, conturul curbiliniu  $C$  din figura 6.6, *e*. Să desenăm un contur  $C'$  (fig. 6.6, *f*), la fel cu  $C$ , dar care *nu* include conductorul. Integrala de linie pe  $C'$  este nulă și prin urmare, integrala pe  $C$  trebuie să fie negativă față de integrala de pe cerc pe care am evaluat-o găsind valoarea  $\mu_0 I$ . Evident, semnul va depinde de sensul de parcurgere a conturului. În general, concluzia noastră poate fi scrisă sub forma:

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \times \text{intensitatea curentului din interiorul conturului} \quad (10)$$





Ecuatia (10) este valabilă numai în cazul în care conturul înconjoară filamentul doar o dată. Evident, pentru un contur ce-l înconjoară de  $N$  ori, ca cel din figura 6.6, g, integrala de linie va fi de  $N$  ori mai mare.

Inducția magnetică, după cum am mai precizat, depinde doar de viteza de transport a sarcinilor, adică de numărul unităților de sarcină ce trec pe secundă printr-un punct dat al circuitului. În figura 6.7 este dat un circuit cu intensitatea curentului egală cu 5 mA. Viteza medie a purtătorilor de sarcină variază între  $10^{-4}$  cm/s, în unele părți ale circuitului și 0,8 c, în alte părți. Integrala de linie din  $\mathbf{B}$  pe un contur închis are aceeași valoare pe fiecare parte a acestui contur și anume:

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 6,28 \cdot 10^{-9} \text{ T} \cdot \text{m}. \quad (11)$$

Ceea ce am demonstrat pentru cazul unui fir lung străbătut de curent, este perfect valabil — pe baza principiului superpoziției — pentru câmpul oricărui sistem de fire rectilinii. În figura 6.8, prin câțiva conductori, curentul trece în direcții diferite. Dacă ecuația (10) este valabilă pentru câmpul magnetic al unuia din acești conductori, atunci ea este valabilă și pentru câmpul rezultat, care, în orice punct, este suma vectorială a câmpurilor conductoarelor individuali. Acesta este un câmp destul de complicat. Cu atât

Fig. 6.6. Integrala de linie din inducția magnetică  $\mathbf{B}$  pe un contur închis depinde doar de curentul inclus.

- a) Conturul se află într-un plan perpendicular pe conductor.
- b) Contur format din segmente radiale și arce.
- c) Contur ce nu include conductorul.
- d) Contur circular ce include conductorul.
- e) Contur curbiliniu ce include conductorul.
- f) Contur circular și curbiliniu ce nu include conductorul.
- g) Buclă din  $n$  ochiuri ce include conductorul.



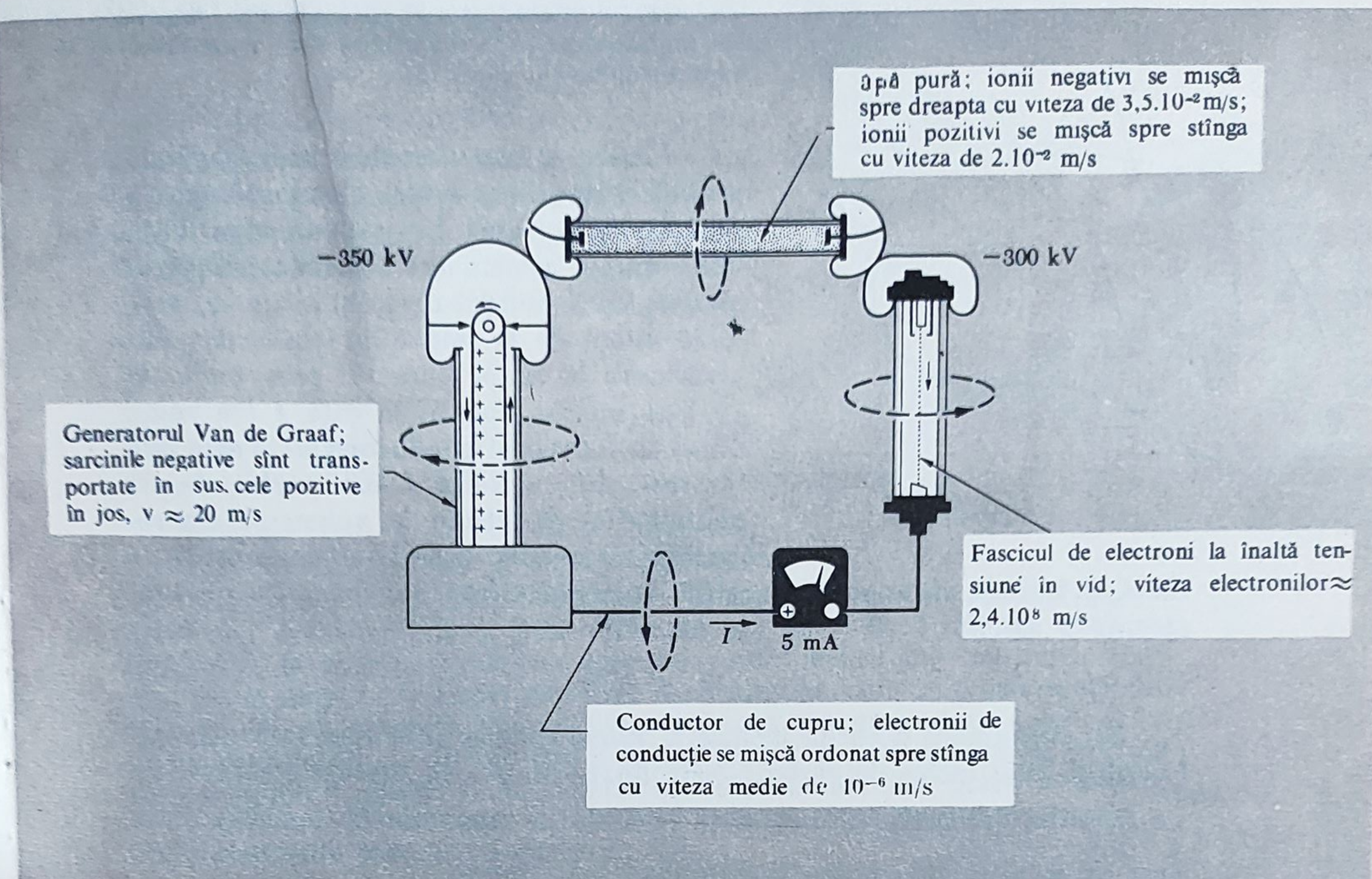
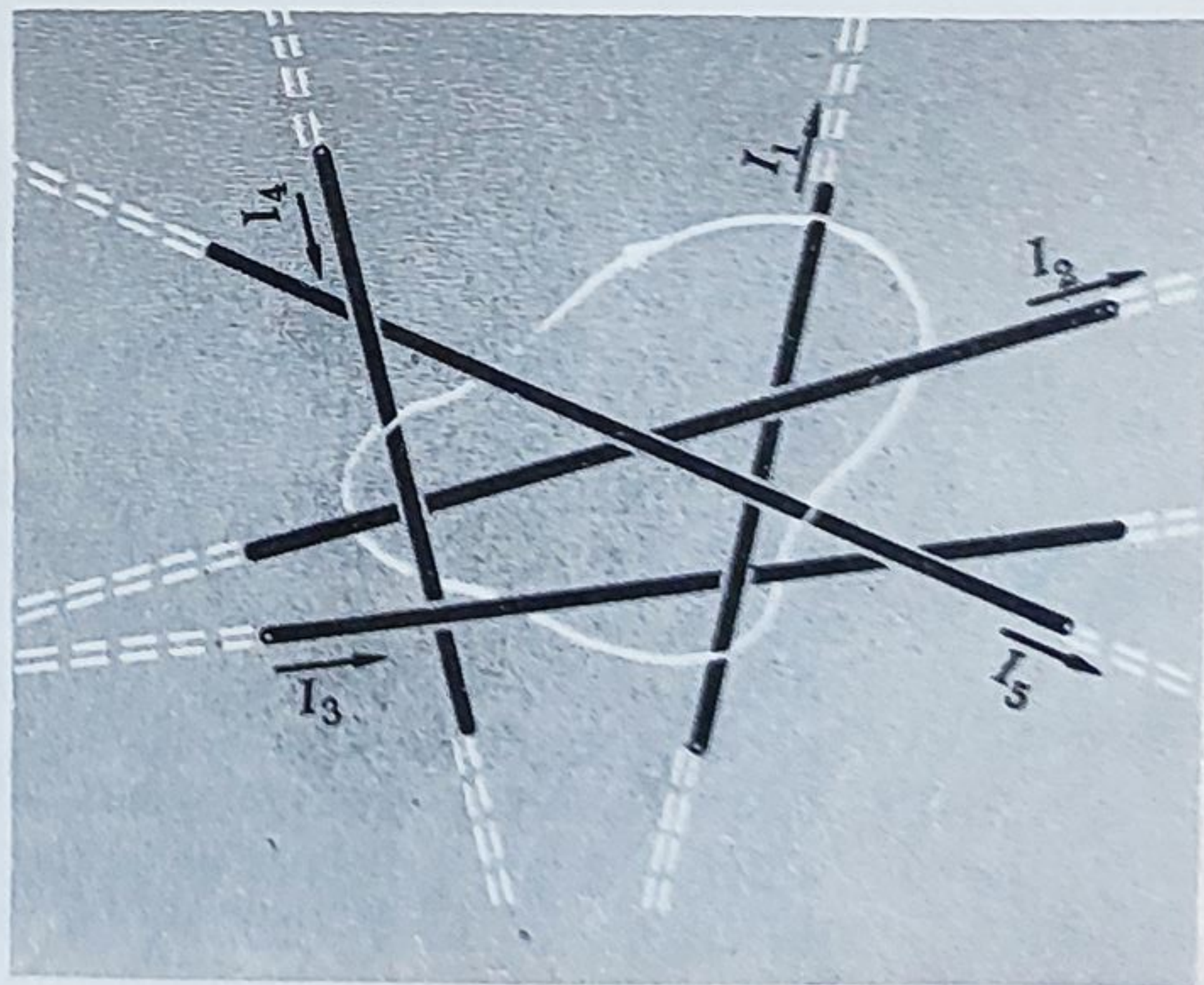


Fig. 6.7. Integrala de linie din  $\mathbf{B}$  are exact aceeași valoare în jurul oricărei porțiuni din acest circuit, deși viteza purtătorilor de sarcină, în fiecare porțiune, este diferită.

mai mult, putem găsi valoarea integralei de linie din  $\mathbf{B}$ , pe conturul închis din figura 6.8, cunoscînd ce curenți trec prin contur și în ce sens.

Totuși, pe noi ne interesează nu numai conductorii rectilinii lungi. Vrem să cunoaștem cîmpul magnetic al oricărei distribuții de curenți, de exemplu, cel al unui curent ce trece printr-o buclă. Se ajunge la concluzia că și aceste cîmpuri mai complicate, *se supun exact aceleiași legi*, dată de ecuația (10). Integrala de linie din  $\mathbf{B}$ , de-a lungul unui conductor curb este egală cu integrala de-a lungul unui conductor rectiliniu lung străbătut de același curent. Demonstrarea acestei afirmații depășește cadrul demonstrațiilor făcute pînă acum, astfel încît, îl vom considera ca un postulat, confirmat experimental.

Fig. 6.8. O suprapunere de curenți rectilinii. Integrala de linie din  $\mathbf{B}$  de-a lungul traiectoriei închise, în sensul indicat de săgeată, este egală cu  $(4\pi/c)(-I_4 + I_5)$ .





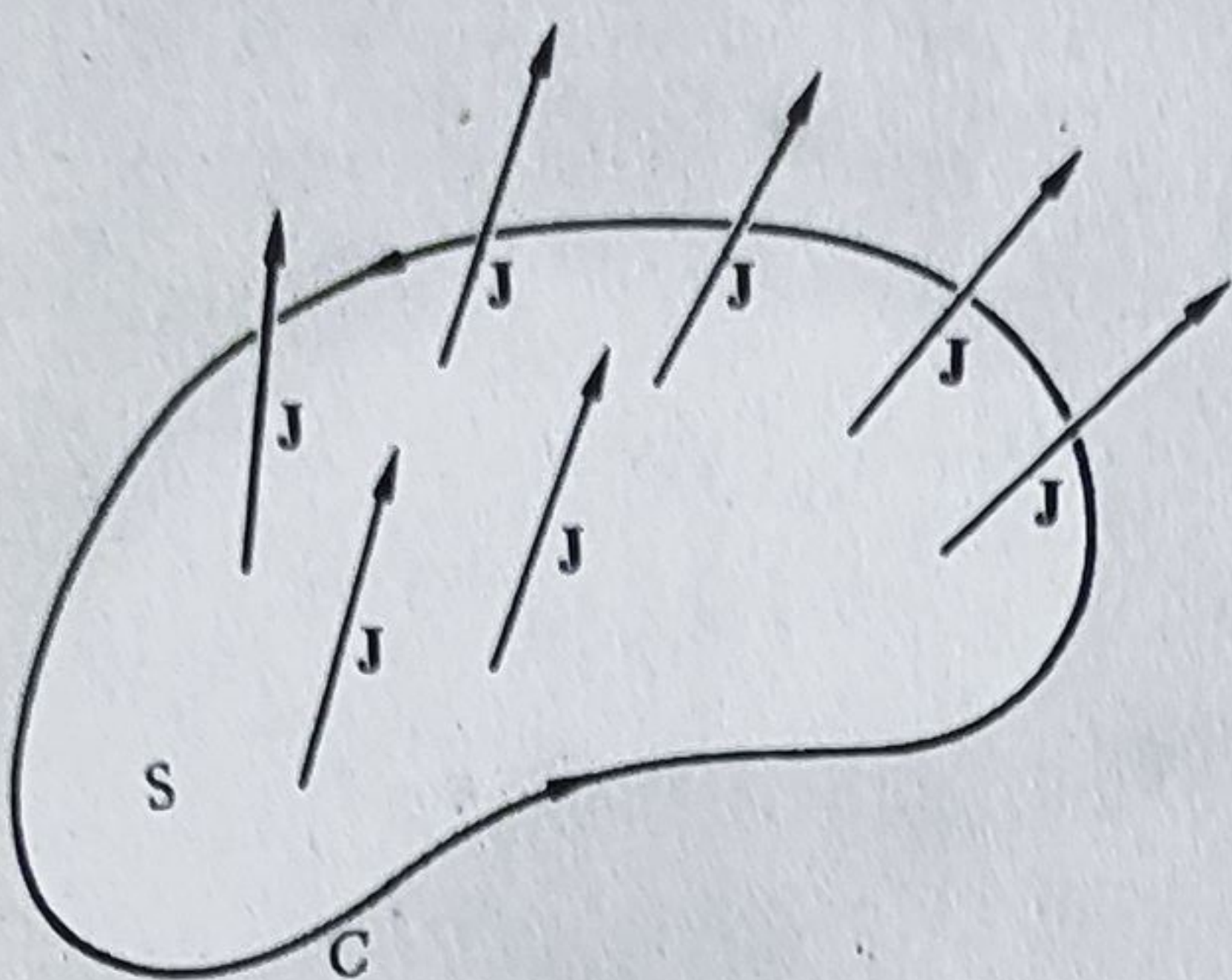


Fig. 6.9.  $\mathbf{J}$  este densitatea de curent locală. Integrala de suprafață din  $\mathbf{J}$ , pe suprafața  $S$ , este egală cu curentul cuprins în curba  $C$ .

Pentru a formula o lege mai generală, trebuie să vorbim despre distribuția în volum a curentului. În general, distribuția unui curent constant este caracterizată de densitatea de curent de volum  $\mathbf{J}(x, y, z)$  — care diferă de la punct la punct, dar este constantă în timp. Curentul prin conductor — este un caz special în care  $\mathbf{J}$  are valori mari în interiorul conductorului și este zero în rest. În capitolul 4 am vorbit despre distribuția curentului în volum și am remarcat că pentru curenții independenți de

timp,  $\mathbf{J}$  trebuie să satisfacă ecuația de continuitate sau condiția de conservare a sarcinii,

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (12)$$

Să considerăm o curbă închisă  $C$  într-o regiune prin care trec curenți. Curentul total inclus de curba  $C$  este fluxul lui  $\mathbf{J}$  prin suprafața subîntinsă de  $C$ , adică integrala de suprafață  $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$  pe suprafața  $S$  (fig. 6.9). Prin urmare, ecuația (10) poate fi formulată mai general

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}. \quad (13)$$

Să comparăm această relație cu teorema lui Stokes, pe care am introdus-o în cap. 2:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (14)$$

Observăm că ecuația (13) este chivalentă cu:

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}}. \quad (15)$$

Aceasta este cea mai simplă și cea mai generală expresie ce leagă câmpul magnetic de purtătorii de sarcină în mișcare, care constituie sursele lui.

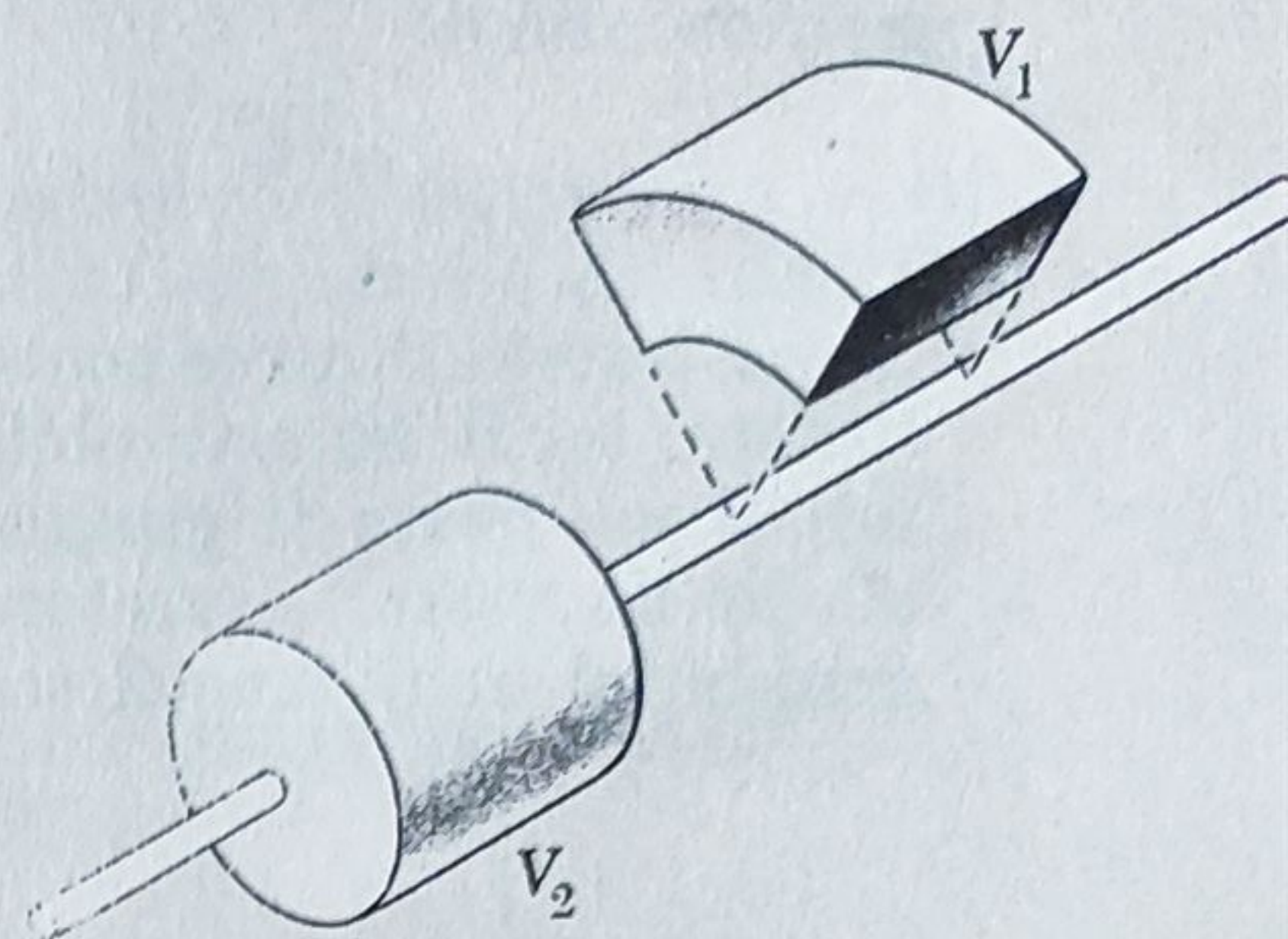
Totuși, ecuația (15) nu este suficientă pentru determinarea lui  $\mathbf{B}(x, y, z)$  când  $\mathbf{J}(x, y, z)$  este dat, întrucât câmpuri vectoriale diferite pot avea același rotor. Trebuie s-o mai completăm cu o condiție. Să ne gândim la divergența lui  $\mathbf{B}$ . Întorcându-ne la câmpul magnetic al unui conductor singular liniar, observăm că divergența unui asemenea câmp este zero. Oriunde am așeza o cutie (chiar în așa fel încât să cuprindă conductorul) nu putem sesiza vreo diferență între fluxul ce iese și cel care intră. Este suficient să observăm că în cutiile  $V_1$  și  $V_2$  din figura 6.10, fluxul total este zero și că dimensiunile lor



Fig. 6.10. Fluxul total al lui  $\mathbf{B}$  prin fiecare cutie este nul.

pot fi reduse la zero, fără să se obțină vreun flux. Pentru un asemenea câmp  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  și de asemenea, pentru orice superpoziții de asemenea câmpuri. Din nou, vom postula că principiul poate fi extins la câmpul dat de orice distribuție de curenți și astfel condiția complementară ecuației (12) este

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0} \quad (16)$$



Ecuațiile (15) și (16), luate împreună, determină în mod univoc pe  $\mathbf{B}$ , dacă  $\mathbf{J}$  este dat. Dacă există două câmpuri diferite  $\mathbf{B}_1(x, y, z)$  și  $\mathbf{B}_2(x, y, z)$ , ambele satisfăcând ecuațiile (15) și (16), diferența lor  $\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$  ar fi un câmp cu divergența și rotorul egale cu zero în orice punct. Un asemenea câmp este, pur și simplu, un vector constant  $\mathbf{B}_0$ , același în toate punctele spațiului. În acest fel, cu excepția unei posibile adăugiri ale unui câmp constant ce umple tot spațiul, condițiile  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  și  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  determină în mod univoc câmpul magnetic al unei distribuții date de curenți. Este interesant de comparat aceste condiții cu cazurile analoge ale câmpului electrostatic. Acolo condițiile erau următoarele:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ și } \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (17)$$

Totuși, în cazul câmpului electric, porneam de la legea lui Coulomb, care dă direct contribuția fiecărei sarcini la câmpul electric din orice punct. Va trebui să obținem și aici câteva relații de același tip.\* Vom face asta cu ajutorul *funcției potențiale*.

### 6.3. POTENȚIAL VECTORIAL

Am văzut că funcția potențială scalară  $\varphi(x, y, z)$  permitea calcularea, printr-o metodă simplă, a câmpului electrostatic a unei distribuții de sarcini. Pentru o distribuție oarecare de sarcini  $\rho(x, y, z)$ , potențialul într-un punct oarecare  $(x_1, y_1, z_1)$  este dat de integrala de volum

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = \int \frac{\rho(x_2, y_2, z_2)}{r_{12}} dv_2. \quad (18)$$

\* Vă puteți întreba, de ce n-am pornit de la ceva echivalent cu legea lui Coulomb pentru interacțiunea curenților. Răspunsul e dat de faptul că spre deosebire de sarcina electrică, o porțiune de fir parcursă de curent nu este un obiect independent, care poate fi izolat fizic. Nu se poate face o experiență pentru determinarea câmpului unei porțiuni de circuit; dacă restul circuitului nu există, curentul nu poate fi constant fără a încălca condiția de continuitate.



Integrarea se face pe toată distribuția de sarcini și  $r_{12}$  este distanța de la  $(x_2, y_2, z_2)$  la  $(x_1, y_1, z_1)$ . Intensitatea cîmpului electric  $\mathbf{E}$  este egal cu minus gradient din  $\varphi$ :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \quad (19)$$

Această metodă nu se poate aplica aici, întrucît inducția  $\mathbf{B}$  este esențial diferită. Rotorul lui  $\mathbf{B}$  nu este obligatoriu egal cu zero și prin urmare, în cazul general,  $\mathbf{B}$  nu poate fi gradientul unui potențial scalar. Cunoaștem, totuși, un alt tip de vector — vectorul rotor. Rezultă că  $\mathbf{B}$  poate fi reprezentat nu ca gradientul unei funcții scalare ci ca rotorul unei funcții *vectoriale*:

$$\boxed{\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}} \quad (20)$$

După aparenta analogie, numim  $\mathbf{A}$  *potențial vectorial*. În acest caz, nu este evidentă utilitatea unui asemenea procedeu. Aceasta va ieși în evidență mai târziu. Este încurajator faptul că ec. (16) este automat satisfăcută întrucît  $\text{div rot } \mathbf{A} = 0$  pentru orice  $\mathbf{A}$ .<sup>\*</sup> Sau cu alte cuvinte, faptul că  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , dă posibilitatea exprimării lui  $\mathbf{B}$  ca rotorul unei alte funcții vectoriale. Sarcina noastră este acum să vedem cum putem calcula pe  $\mathbf{A}$ , cînd distribuția de curent  $\mathbf{J}$  este dată, pentru ca ec. (20) să descrie corect cîmpul magnetic. Pe baza ec. (15), relația dintre  $\mathbf{J}$  și  $\mathbf{A}$  este

$$\text{rot } (\text{rot } \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (21)$$

Ecuția (21), fiind o ecuație vectorială, reprezintă, de fapt, trei ecuații. Vom scrie una din ele, de exemplu componenta  $x$ . Componenta  $x$  a rotorului  $\mathbf{B}$  este  $\partial B_z / \partial y - \partial B_y / \partial z$ . Componentele  $z$  și  $y$  ale lui  $\mathbf{B}$  sînt, respectiv:

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}. \quad (22)$$

Prin urmare, componenta  $x$  a ec. (21) se scrie:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = \mu_0 J_x. \quad (23)$$

Presupunem că în cazul funcțiilor noastre ordinea derivării parțiale poate fi schimbată. Folosind această proprietate și după cîteva transformări, ecuația (23) poate fi scrisă sub forma:

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \mu_0 J_x. \quad (24)$$

Pentru mai multă simetrie, să adunăm și să scădem în partea stîngă a ecuației același termen,  $\partial^2 A_x / \partial x^2$ :

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \mu_0 J_x. \quad (25)$$

<sup>\*</sup> Dacă acest lucru nu vă este cunoscut, revedeți problema 2.15.



În primii trei termeni, recunoaștem laplaceanul lui  $A_x$  cu semnul minus. Expresia din paranteză este divergenta lui  $\mathbf{A}$ . Acum construirea lui  $\mathbf{A}$  este la latitudinea noastră. Trebuie să fim atenți doar la rotor, divergența o putem alege oricum. Trebuie să impunem doar condiția ca\*

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (26)$$

Cu alte cuvinte, dintre diferitele funcții care ar satisface condiția ca  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$ , le alegem doar pe acelea care au și divergența zero. Atunci din ecuația (25) rămâne doar

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu_0 J_x. \quad (27)$$

$J_x$  este o cunoscută funcție scalară de  $x, y, z$ . Să comparăm ecuația (27) cu ecuația lui Poisson (2.70), care se scrie:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (28)$$

Cele două ecuații sînt identice ca formă. Noi știm deja cum să găsim soluția ecuației (28). Soluția este integrala de volum (18). Prin urmare, o soluție a ecuației (27) trebuie să fie

$$A_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_x(x_2, y_2, z_2) dv_2}{r_{12}}. \quad (29)$$

Celelalte componente trebuie să satisfacă relații similare. Toate pot fi reunite într-o relație vectorială:

$$\boxed{\mathbf{A}(x_1, y_1, z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(x_2, y_2, z_2) dv_2}{r_{12}}}. \quad (30)$$

Există doar o singură piedică: pentru a obține ecuația (27) am presupus că  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . De unde știm că  $\mathbf{A}$  dat de ecuația (30) va avea această proprietate? Din fericire, se poate demonstra că este așa.

Ca exemplu de potențial vectorial să considerăm un conductor liniar lung străbătut de un curent de intensitate  $I$ . În figura 6.11 curentul iese din planul figurii spre noi, fiind îndreptat de-a lungul axei pozitive  $z$ . Noi știm cum

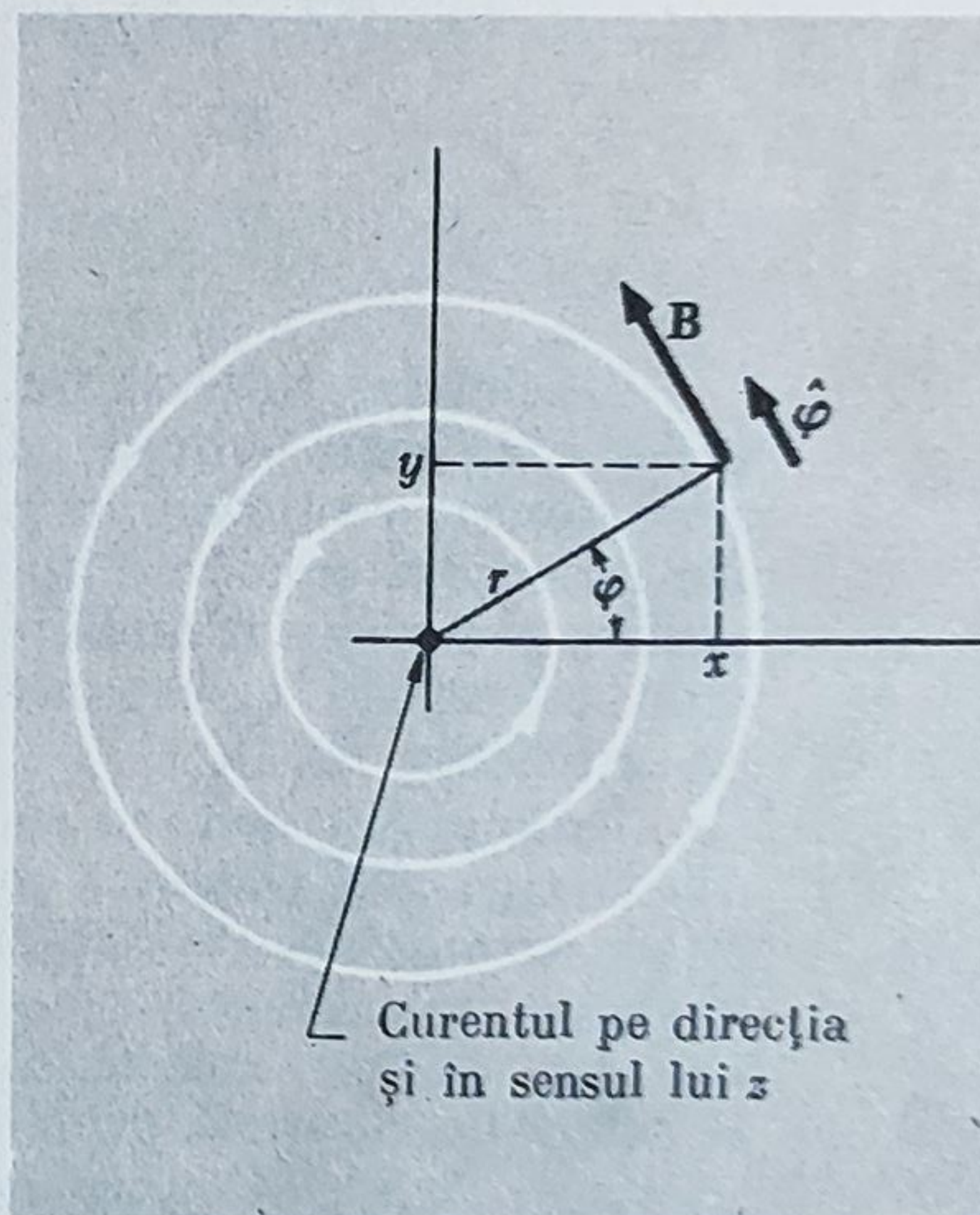


Fig. 6.11. Cîteva linii de forță în jurul unui filament străbătut de curent (iese din planul figurii spre noi).

\* Să vedem de ce putem proceda așa. Presupunem că  $\mathbf{A}$  este astfel încît  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$ , dar  $\operatorname{div} \mathbf{A} = f(x, y, z) \neq 0$ . Considerîndu-l pe  $f$  ca densitatea de sarcină  $\rho$  într-un câmp electrostatic, este evident că putem găsi un câmp  $\mathbf{F}$ , analogul câmpului electrostatic  $\mathbf{E}$ , astfel încît  $\operatorname{div} \mathbf{F} = f$ . Dar noi știm că rotorul unui asemenea câmp va fi zero. Prin urmare, putem aduna  $\mathbf{F}$  cu  $\mathbf{A}$  obținînd un nou câmp cu rotorul căutat și divergența zero.



cîmpul magnetic al unui conductor liniar. Liniile de cîmp sînt circulare, așa cum s-a mai arătat în figura 6.5. În figura 6.11 sînt arătate cîteva. Mărima inducției  $\mathbf{B}$  este  $\mu_0 I / 2\pi r$ . Folosind un vector unitar îndreptat pe „circumferință”, putem scrie vectorul  $\mathbf{B}$  sub forma

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I \hat{\varphi}}{2\pi r}. \quad (31)$$

Observînd că vectorul unitar  $\hat{\varphi}$  este  $-\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$ , îl putem exprima pe  $\mathbf{B}$  în funcție de  $x$  și  $y$  în modul următor:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I (-\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y})}{2\pi \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{x^2 + y^2} \right). \quad (32)$$

Funcția vectorială  $\mathbf{A}(x, y, z)$  care satisface condiția  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$  este următoarea:

$$\mathbf{A} = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(x^2 + y^2). \quad (33)$$

Pentru a verifica, să calculăm componentele lui  $\nabla \times \mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A})_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{-\mu_0 I y}{2\pi(x^2 + y^2)} (= B_x) \\ (\nabla \times \mathbf{A})_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{+\mu_0 I x}{2\pi(x^2 + y^2)} (= B_y) \\ (\nabla \times \mathbf{A})_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 (= B_z). \end{aligned} \quad (34)$$

Bineînțeles, aceasta nu este singura funcție care poate servi ca potențial vectorial în cazul cîmpului dat  $\mathbf{B}$ . Funcției  $\mathbf{A}$  din ecuația (33) i se poate adăuga orice funcție vectorială cu rotorul nul. Toate acestea sînt valabile în regiunea din exteriorul conductorului. În interiorul conductorului  $\mathbf{B}$  este altul și prin urmare și funcția  $\mathbf{A}$  trebuie să difere. Nu este greu de găsit o funcție vectorială potențială corespunzătoare interiorului unui conductor solid rotund (v. problema 6.13).

Întîmplător, pentru cazul particular de mai sus,  $\mathbf{A}$  n-a putut fi obținut din ecuația 30. Datorită faptului că conductorul este infinit lung integrala va fi divergentă. Aceasta ne amintește de dificultățile întîlnite în cap. 2, obținînd un potențial scalar pentru cîmpul electric al unui conductor încărcat. Într-adevăr, cele două probleme sînt foarte asemănătoare, așa cum ne și așteptam datorită geometriilor identice și similaritatea ec. 30 și 18. Am găsit (ec. 2.19) că potențialul scalar potrivit pentru o sarcină liniară este  $-\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln(x^2 + y^2) + o \text{ constantă arbitrară}$ . Asta înseamnă că potențialul zero se atribuie unui punct arbitrar care nu se găsește nici pe conductor, nici la o distanță infinit de mare de el. Ambele potențiale — cel scalar și cel vectorial (din ec. 33) au singularități în sursă și la infinit.



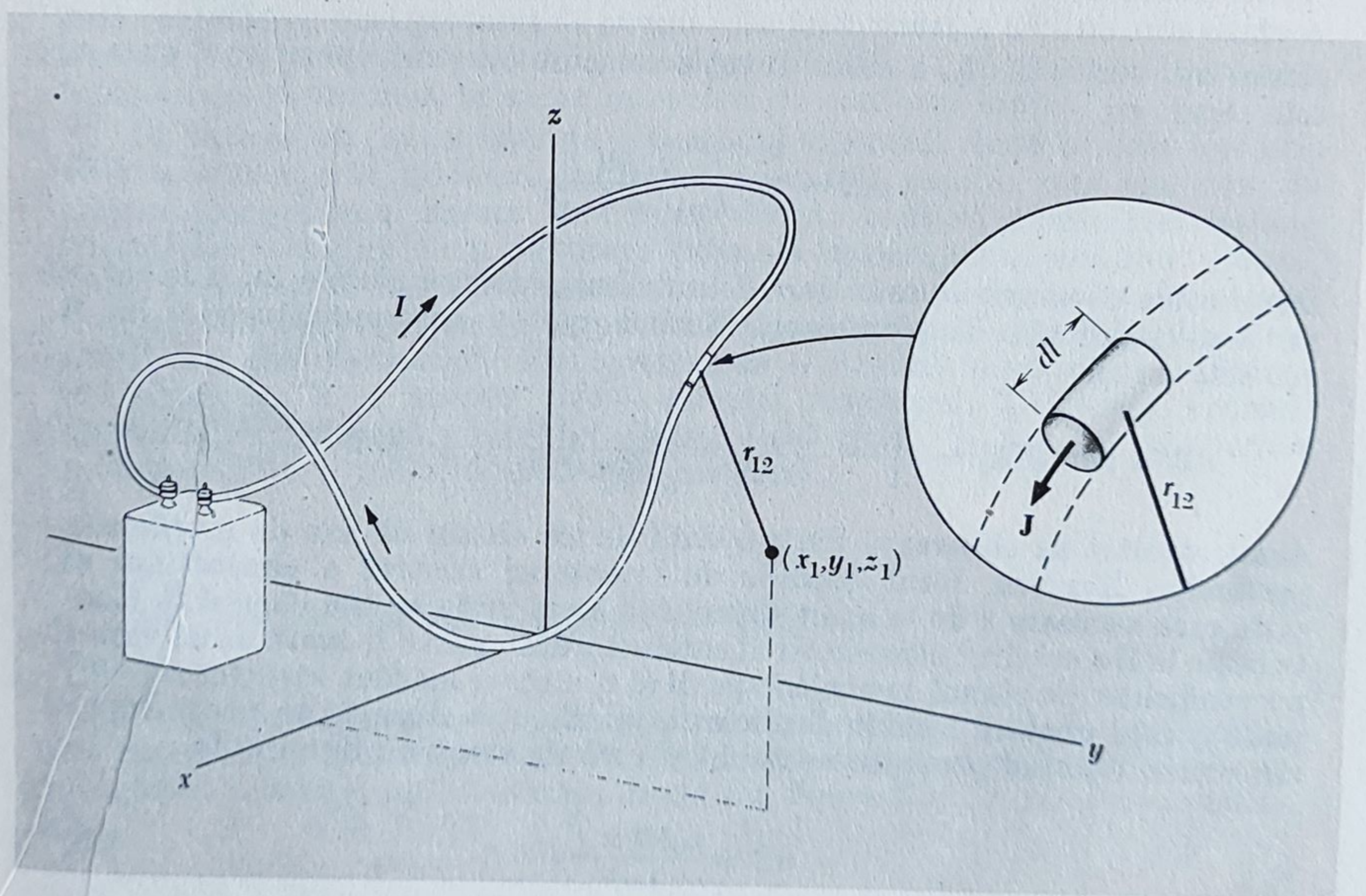
#### 6.4. CÎMPUL UNUI CONDUCTOR OARECARE STRĂBĂTUT DE CURENT

Figura 6.12 reprezintă bucla unui conductor străbătut de curentul  $I$ . Potențialul vectorial  $\mathbf{A}$  în punctul  $(x_1, y_1, z_1)$  este dat, conform ecuației 30, de integrala de-a lungul buclei. Dacă curentul trece printr-un conductor subțire, putem lua ca element de volum  $dv_2$  o porțiune scurtă din conductor de lungime  $dl$ . Densitatea de curent  $J$  este  $I/a$ , unde  $a$  este aria secțiunii transversale și  $dv_2 = a dl$ . Prin urmare  $J dv_2 = I dl$ , și dacă vectorul  $d\mathbf{l}$  îl alegem în sensul pozitiv al curentului, putem înlocui, pur și simplu,  $J dv_2$  cu  $I d\mathbf{l}$ . Astfel, pentru un conductor subțire sau un filament, putem scrie ecuația (30) sub forma unei integrale de linie de-a lungul circuitului:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}}{r_{12}}. \quad (35)$$

Calculul lui  $\mathbf{A}$  în fiecare punct și apoi găsierea lui  $\mathbf{B}$  din rotorul lui  $\mathbf{A}$  ar fi o cale prea lungă. Va fi mai util să separăm o contribuție la integrala de linie a lui  $\mathbf{A}$  și anume contribuția din partea elementului de conductor din originea axelor de coordonate, unde curentul curge în direcția lui  $x$  (fig. 6.13). Vom nota lungimea acestui segment cu  $dl$ . Fie  $d\mathbf{A}$  contribuția acestui element în integrala lui  $\mathbf{A}$ . Atunci în punctul  $(x, y, 0)$ , care se găsește în

Fig. 6.12. Fiecare element al buclei parcurse de curent contribuie la potențialul vector  $\mathbf{A}$  din punctul  $(x_1, y_1, z_1)$ .





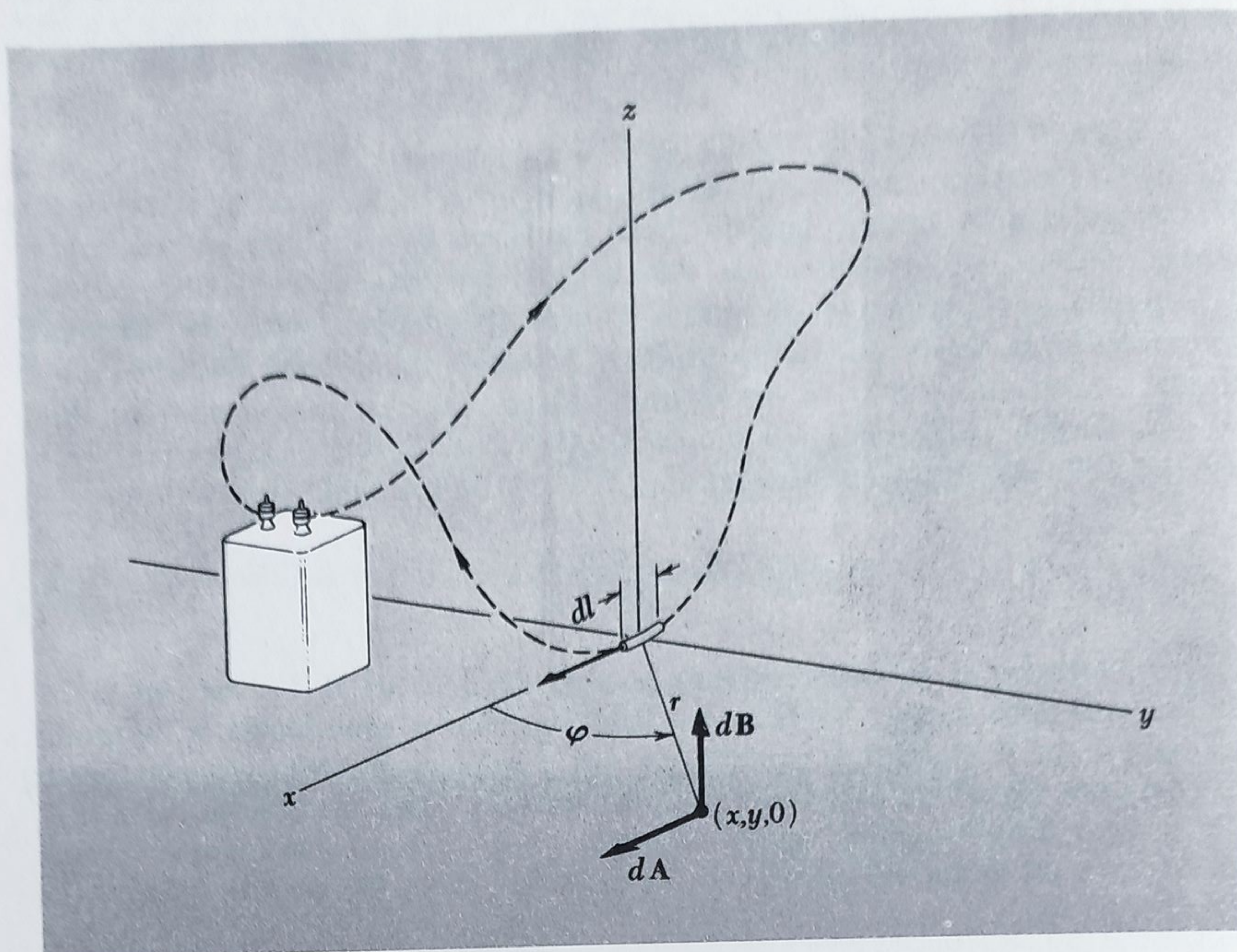


Fig. 6.13. Dacă putem găsi contribuția  $dA$ , a elementului considerat, la  $A$ , putem calcula contribuția acestui element la  $B$ , folosind formula  $B = \text{rot } A$ .

planul  $xy$ , vectorul  $dA$ , a cărui direcție coincide cu sensul pozitiv al axei  $x$ , este egal cu

$$dA = \hat{x} \frac{\mu_0 I dl}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (36)$$

Din motive de simetrie, este clar că contribuția acestei părți a lui  $A$  la  $\text{rot } A$  va fi perpendiculară la planul  $xy$ . Notînd partea corespunzătoare a lui  $B$  cu  $dB$ , avem

$$dB = \text{rot } (dA) = \hat{z} \left( -\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \hat{z} \frac{\mu_0 I dl \cdot y}{4\pi(x^2 + y^2)^{3/2}} = \hat{z} \frac{\mu_0 I dl \sin \varphi}{4\pi r^2} \quad (37)$$

Acest rezultat ne eliberează dintr-o dată de un sistem de axe de coordonate particular. Evident, totul depinde de orientarea relativă a elementului  $dl$  și de raza vectoare  $r$  de la acest element la locul unde se află câmpul  $B$ . Contribuția la  $B$  a oricărui element  $dl$  al conductorului poate fi luată ca un vector perpendicular pe planul ce conține pe  $dl$  și  $r$ , a cărui mărime este  $I dl \sin \varphi / r^2$ , unde  $\varphi$  este unghiul format de direcția lui  $dl$  cu  $r$ . Aceasta se poate exprima concis folosind produsul vectorial și este ilustrată de figura 6.14.

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \times \hat{r}}{4\pi r^2}. \quad (38)$$



Fig. 6.14. Cîmpul oricărui circuit poate fi calculat folosind relația  $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$  pentru contribuția fiecărui element de circuit.

Dacă sînteți familiarizați cu calculul vectorial, puteți trece ușor de la ecuația (35) la ecuația (38). Scriind  $d\mathbf{B} = \nabla \times d\mathbf{A}$ , unde  $d\mathbf{A} = I d\mathbf{l}/r$ , îl considerăm pe  $\nabla$  un vector, inversînd produsul vectorial și schimbînd semnul. Aici,  $d\mathbf{l}$  este constant,  $\nabla$  operînd numai asupra lui  $1/r$ , neputîndu-ne descurca altfel! Ne reamintim că  $\nabla(1/r) = -\hat{\mathbf{r}}/r^2$  (ca în trecerea de la potențialul lui Coulomb la cîmpul lui Coulomb). Astfel:

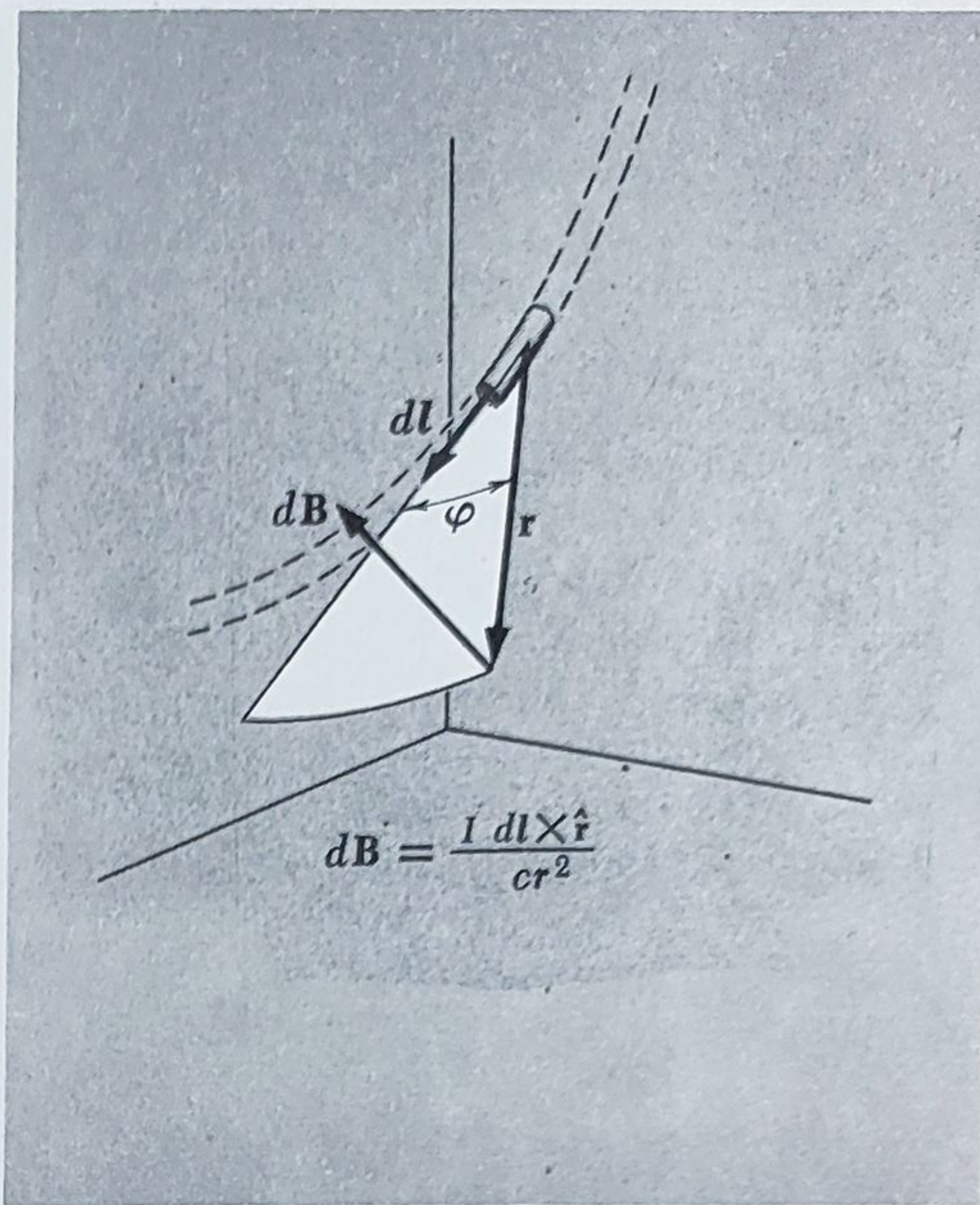
$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= \nabla \times \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}}{4\pi r} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\mathbf{l} \times \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\mathbf{l} \times \left( -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Ecuația (38) este cunoscută în istoria fizicii ca legea lui Biot-Savart. Esența ei constă în aceea că dacă  $\mathbf{B}$  este calculat integrînd pe tot conturul, luînd în considerare contribuțiile tuturor elementelor date de această formulă — atunci obținem valoarea corectă pentru  $\mathbf{B}$  rezultat. Așa cum am remarcat și la nota din josul paginii de la paragraful 6.2, fizic nu poate fi determinată contribuția unei porțiuni de circuit. De fapt, ecuația (38) nu este singura formulă care poate da rezultatul corect pentru  $\mathbf{B}$ , ei i se poate adăuga orice funcție care să fie nulă în urma integrării pe conturul închis.

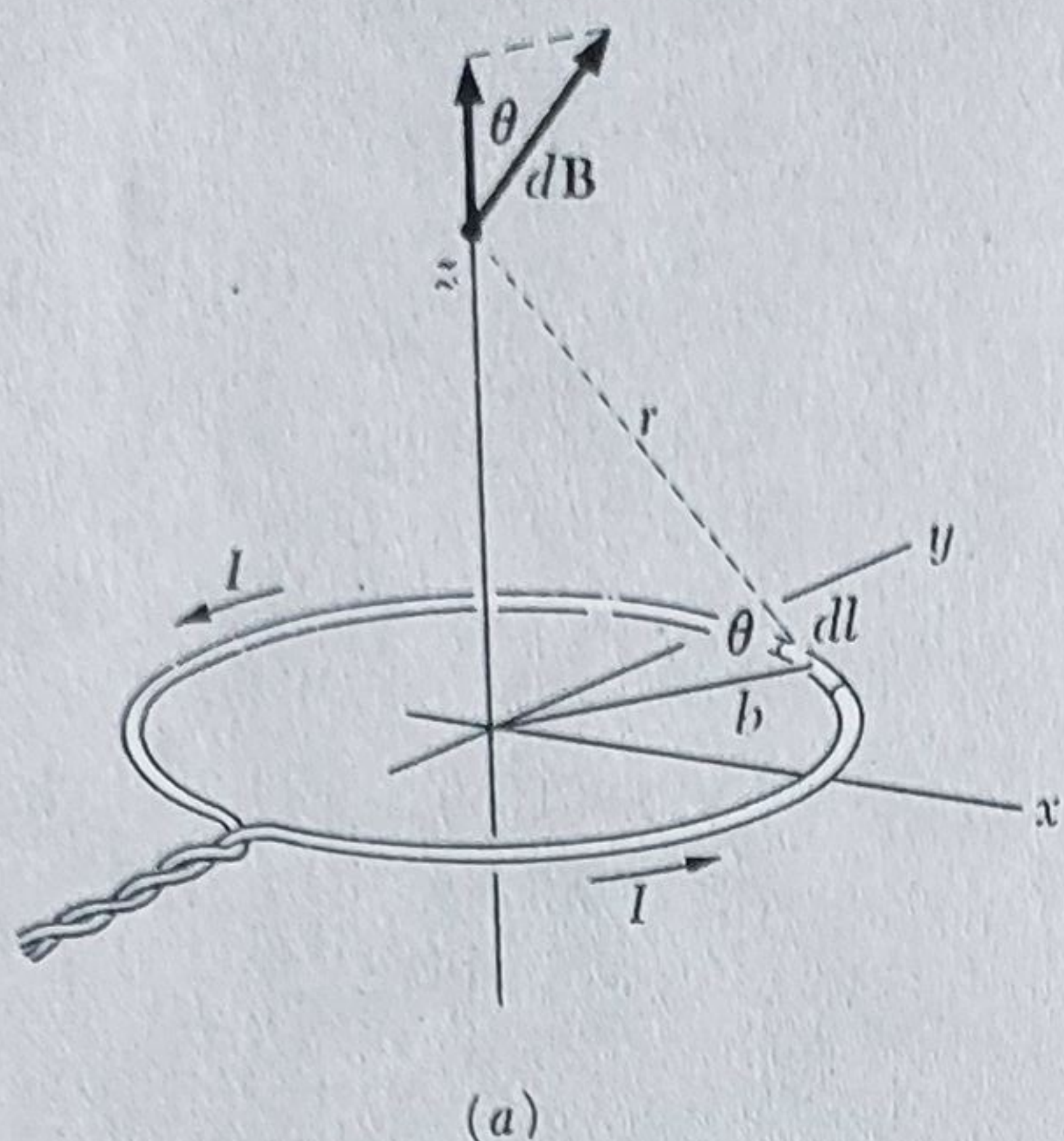
Se pare că ne putem lipsi de potențialul vectorial, după ce ne-a fost atît de util. Într-adevăr, adeseori din punct de vedere practic, este mai ușor de calculat cîmpul unui sistem de curenți direct, decît să găsim mai înainte potențialul vectorial. Vom da cîteva exemple în paragraful următor. Potențialul vectorial este totuși important, din motive mai profunde. În primul rînd, el ne-a pus în evidență surprinzătorul paralelism dintre relațiile intensității cîmpului electrostatic  $\mathbf{E}$  și sursele sale — sarcinile electrice și ale inducției magnetice  $\mathbf{B}$  și sursele sale — curenții staționari. Utilitatea noțiunii de potențial vectorial ne va fi relevată mai tîrziu la studiul cîmpurilor nestacionare și a radiației electromagnetice.

## 6.5. CÎMPUL PRODUS DE SPIRE ȘI BOBINE

În figura 6.15, *a* este reprezentat un filament, în formă de inel circular de rază *b*, străbătut de curenț. Fără nici un calcul, putem spune că cîmpul magnetic al acestei surse va arăta ca cel din figura 6.15, *b*, în care am trasat







câteva linii de câmp în planul ce trece prin axa de simetrie. Întreg câmpul trebuie să aibă o simetrie sferică în jurul acestei axe (axa  $z$  în fig. 6.15,  $a$ ) și chiar liniile trebuie să fie simetrice față de inel — planul  $xy$ . Foarte aproape de filament câmpul va semăna cu cel din apropierea unui conductor rectiliniu lung, întrucât în acest caz porțiunile îndepărtate ale spirei sînt relativ neimportante.

Folosind ecuația (38), este ușor de calculat intensitatea câmpului pe axă. Fiecare element al spirei, de lungime  $dl$ , dă un  $dB$  perpendicular pe  $r$ . Ne trebuie doar componenta  $z$  a lui  $dB$ , deoarece știm că intensitatea totală a câmpului pe axă trebuie să fie pe direcția ei:

$$dB_z = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \frac{b}{r}. \quad (40)$$

Integrînd pe toată lungimea spirei, obținem  $\int dl = 2\pi b$ , astfel încît intensitatea câmpului pe axă în orice punct  $z$  este

$$B_z = \frac{\mu_0 b^2 I}{2r^3} = \frac{\mu_0 b^2 I}{2(b^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\text{intensitatea câmpului pe axă}). \quad (41)$$

În centrul spirei,  $z = 0$ , valoarea intensității câmpului este

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2b} \quad (\text{intensitatea câmpului în centru}). \quad (42)$$

Bobina cilindrică din figura 6.16,  $a$  este numită de obicei solenoid. Presupunem că firul este înfășurat strîns și uniform astfel încît numărul de spire pe unitatea de lungime este constant pe toată lungimea cilindrului și egal cu  $n$ . În realitate curentul circulă heliocidal, dar dacă spirele sînt numeroase

Fig. 6.15. Câmpul magnetic al unui inel parcurs de curent. (a) Calculul câmpului pe axă; (b) cîteva linii de câmp.



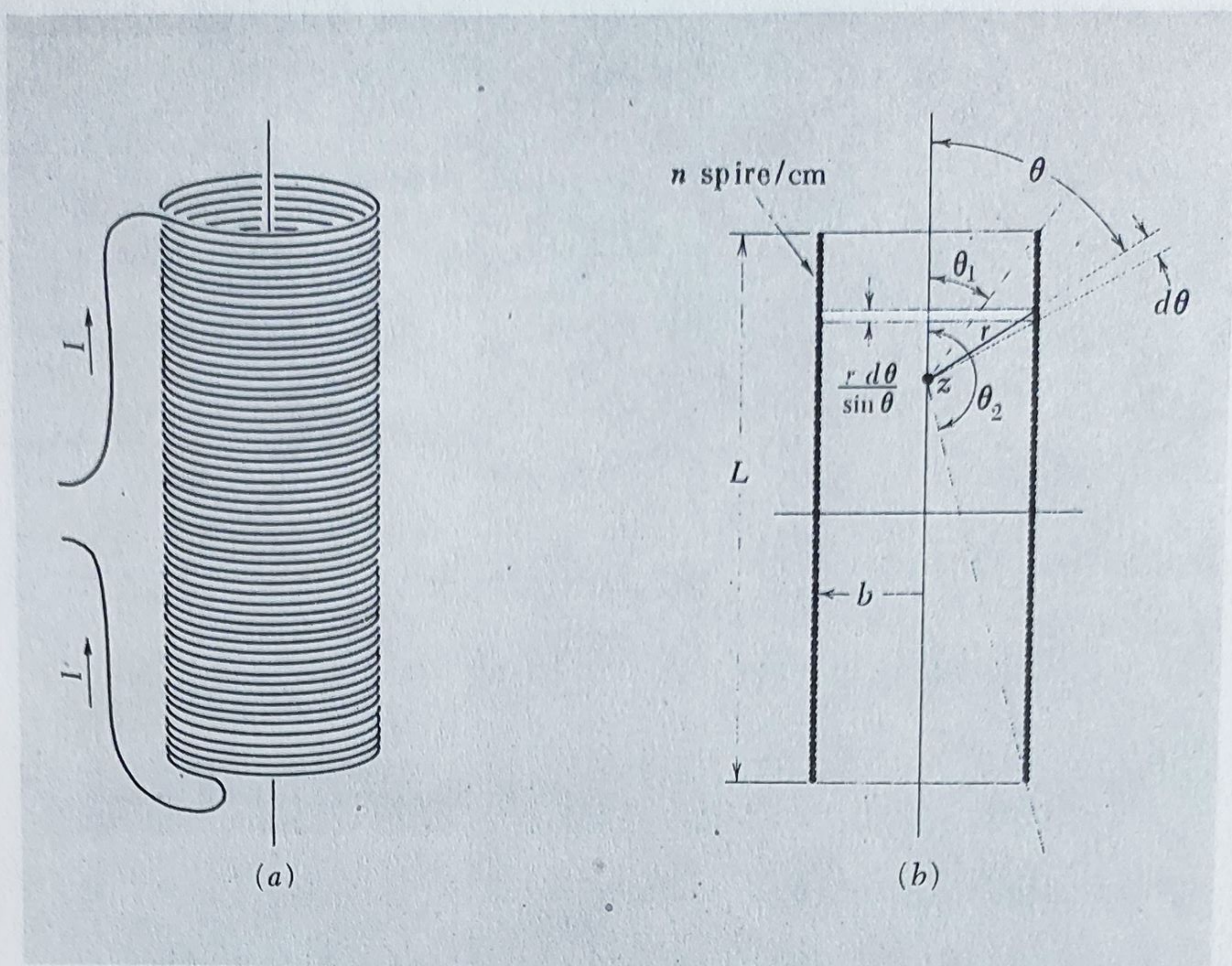


Fig. 6.16. (a) Solenoid. (b) Calculul câmpului pe axa unui solenoid.

și înfășurate una lângă alta, putem neglija acest lucru și putem considera solenoidul ca un mănunchi de spire parcurse de curent. Prin urmare, ca punct de plecare pentru calculul intensității câmpului, într-un punct oarecare  $z$  de pe axa solenoidului, putem lua ecuația (41). Să considerăm la început contribuția spirei străbătute de curent aflată între razele duse din punctul  $z$  și care formează cu axa unghiurile  $\theta$  și  $\theta + d\theta$ . Lungimea acestui segment de solenoid, conturat în figura 6.16,  $b$ , este  $rd\theta/\sin\theta$  și, prin urmare, solenoidul este echivalent cu o spirală străbătută de un curent de intensitate  $Inrd\theta/\sin\theta$ . Întrucât  $r = b/\sin\theta$ , contribuția acestei spire la intensitatea câmpului axial este

$$dB_z = \frac{\mu_0 b^2}{2r^3} \frac{Inr d\theta}{\sin\theta} = \frac{\mu_0 In}{2} \sin\theta d\theta. \quad (43)$$

Integrând între limitele  $\theta_1$  și  $\theta_2$ , obținem:

$$B_z = \frac{\mu_0 In}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 In}{2} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2). \quad (44)$$

În reprezentarea grafică din figura 6.17,  $a$  intensității câmpului pe axa unei bobine a cărei lungime este de patru ori diametrul ei, am folosit ecuația (44). În ordonată este inducția magnetică  $[B_z]$  raportată la inducția magnetică într-o bobină de lungime infinită, cu același număr de spire pe



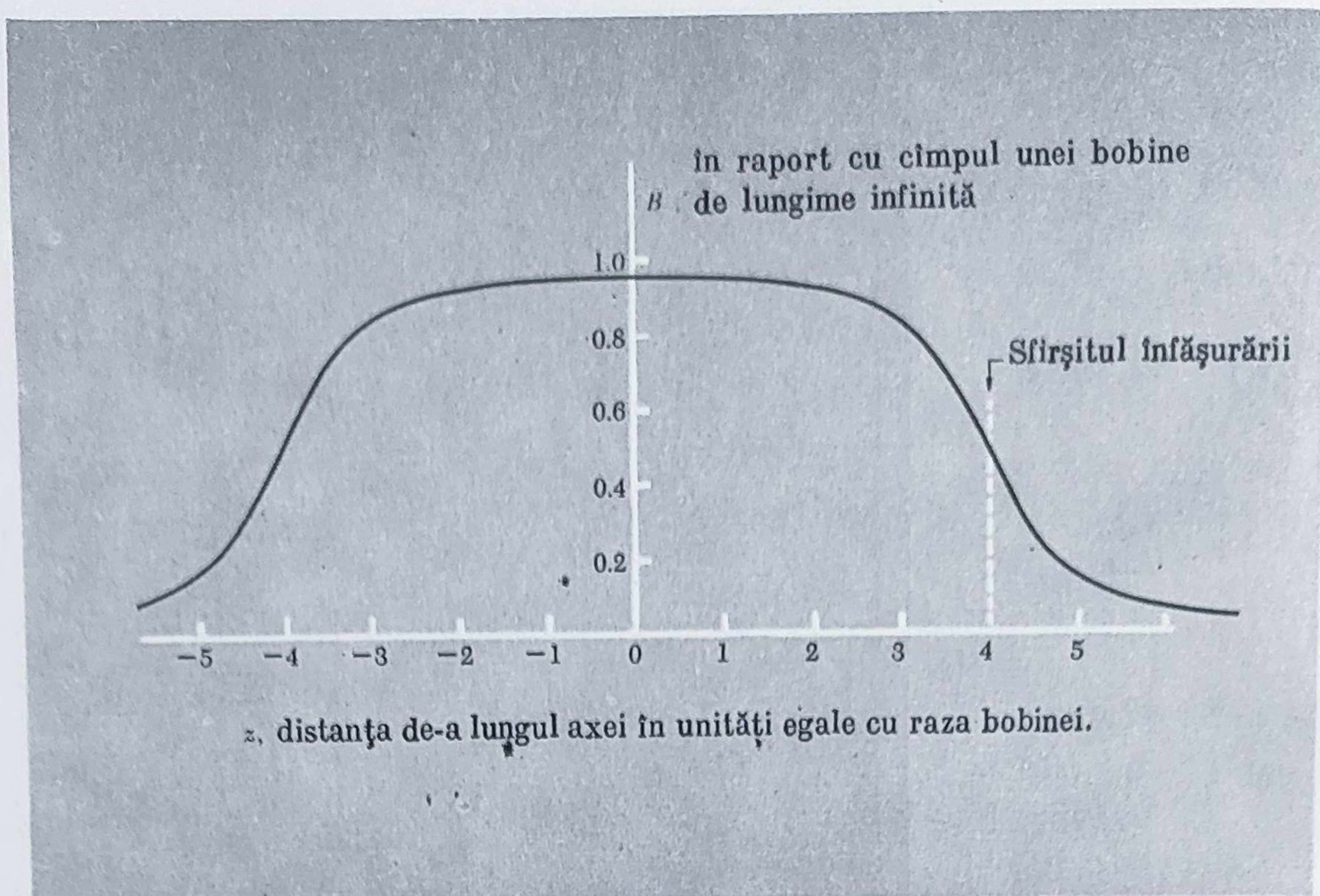


Fig. 6.17.-Inducția magnetică  $B_z$  pe axa solenoidului din fig. 6.18.

unitatea de lungime și străbătute de același curent. Pentru o bobină infinită  $\theta_1 = 0$  și  $\theta_2 = \pi$ , astfel încît

$$B_z = \mu_0 I n \text{ (solenoid infinit lung).} \quad (45)$$

În centrul bobinei „patru pe unu” inducția magnetică este foarte apropiată de această valoare și rămîne aproape constantă pînă cînd nu ne apropiem de unul din capete.

Figura 6.18 ilustrează liniile cîmpului magnetic în interiorul și în jurul unei bobine de asemenea dimensiuni. Observați că unele linii de cîmp trec efectiv prin înfășurare. Stratul cilindric de curent constituie o suprafață de discontinuitate pentru cîmpul magnetic. Dacă am fi examinat cîmpul în imediata apropiere a conductorilor, n-am fi găsit, bineînțeles, niște inflexiuni bruște ci niște căi foarte complicat vîlurite ale liniilor de cîmp în jurul și prin fiecare conductor în parte.

Este foarte posibilă realizarea unui solenoid a cărui înfășurare să constea dintr-o *singură* spiră dintr-un conductor subțire lat ca banda din figura 6.19. Și aici pot fi aplicate calculele noastre și diagrama din figura 6.18, dacă se înlocuiește  $nI$  cu curentul ce trece prin unitatea de lungime a benzii. În ce privește schimbarea direcției liniei de cîmp ce pătrunde prin perete, are loc numai în secțiunea benzii așa cum apare în detaliul din figura 6.19.

Am fi putut găsi cîmpul unui solenoid infinit lung fără a mai face calculele ce ne-au dus la ec. (45). Este evident că într-un solenoid infinit lung în direcția axei  $z$  nu se schimbă nimic. Cîmpul trebuie să fie peste tot paralel



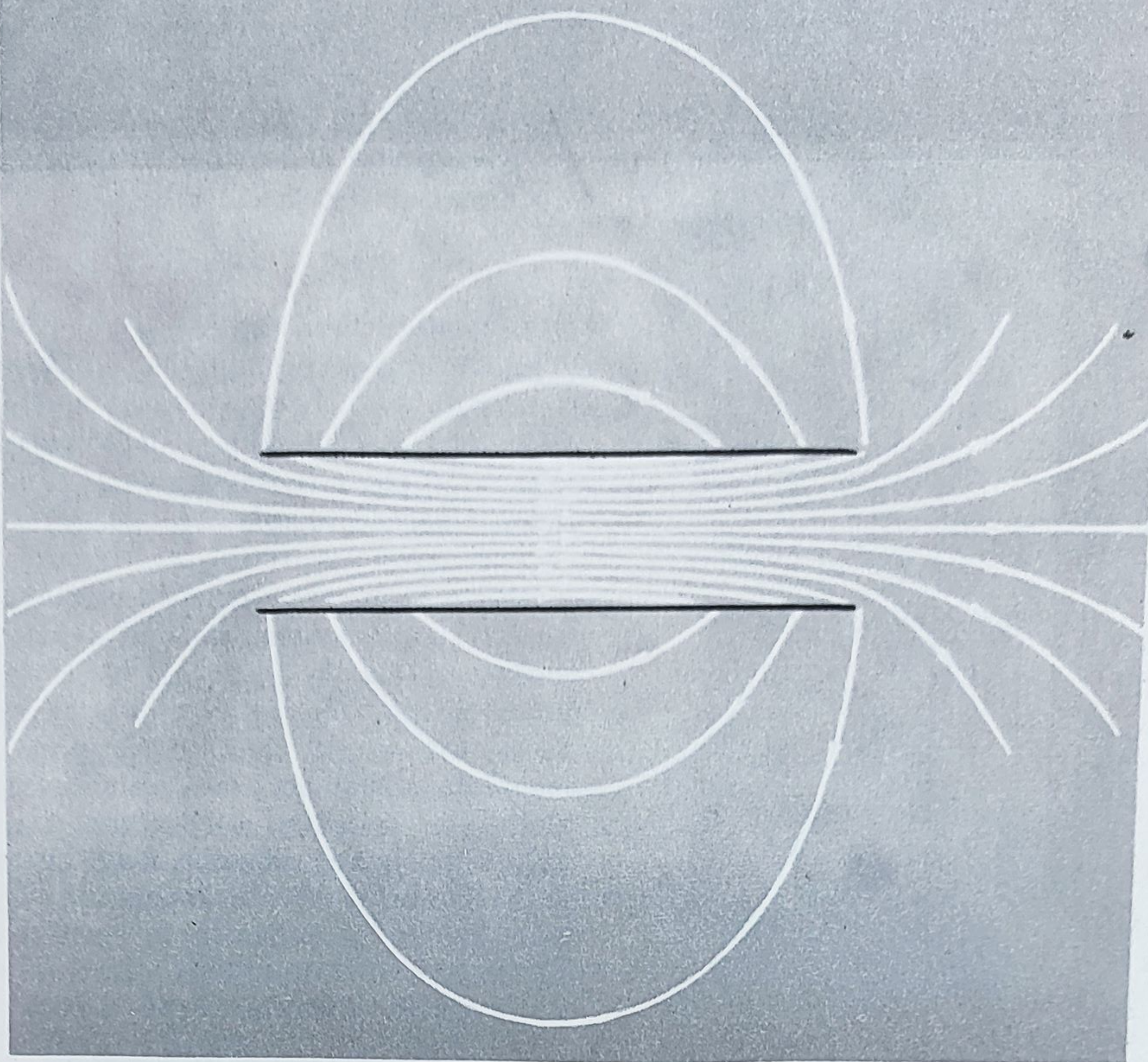
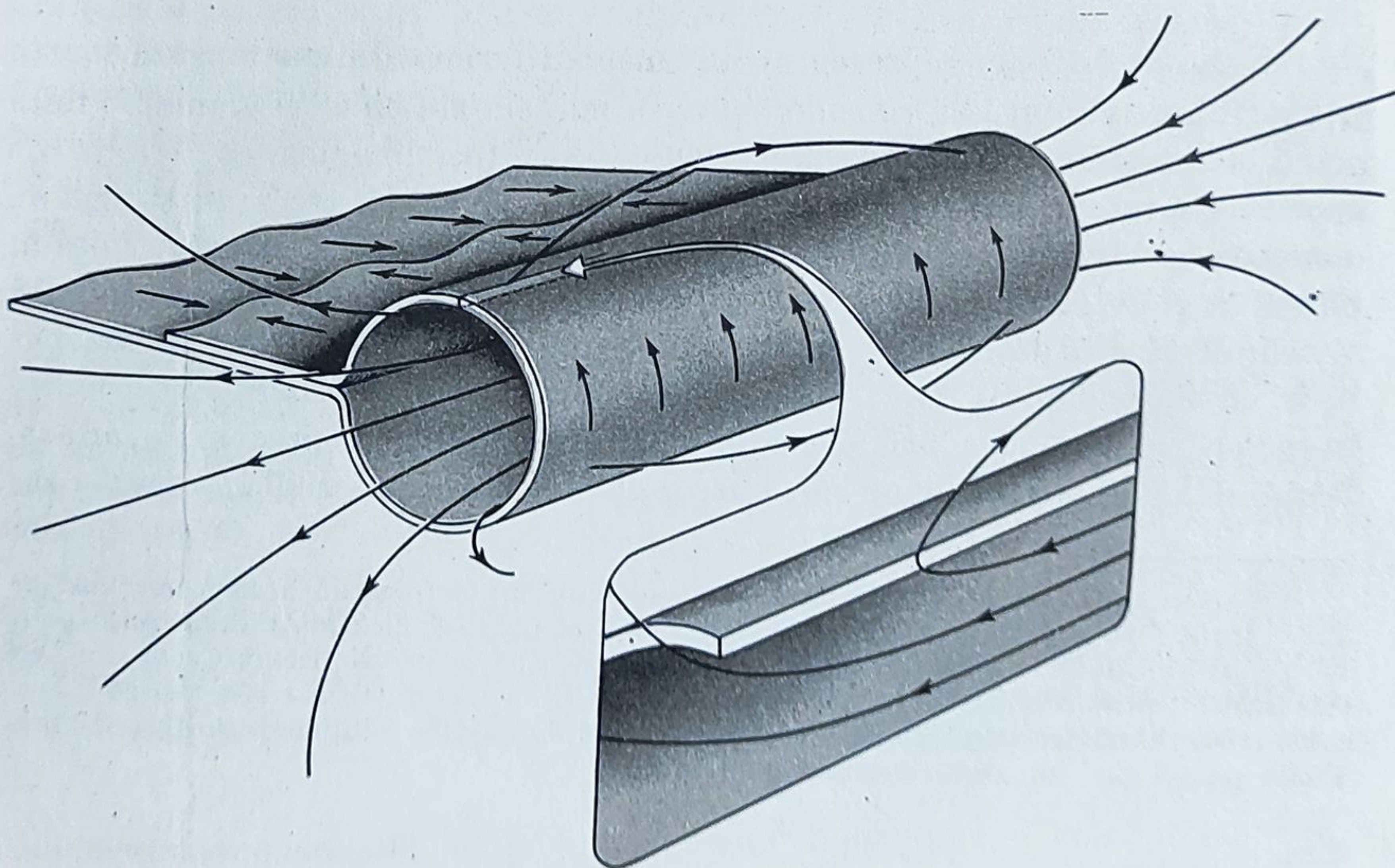


Fig. 6.18. Linii de câmp în interiorul și în jurul solenoidului.

Fig. 6.19. Un solenoid format dintr-o singură pătură conductoare cilindrică. Secțiunea arată cum se schimbă direcția liniilor de câmp în interiorul conductorului purtător de curent.





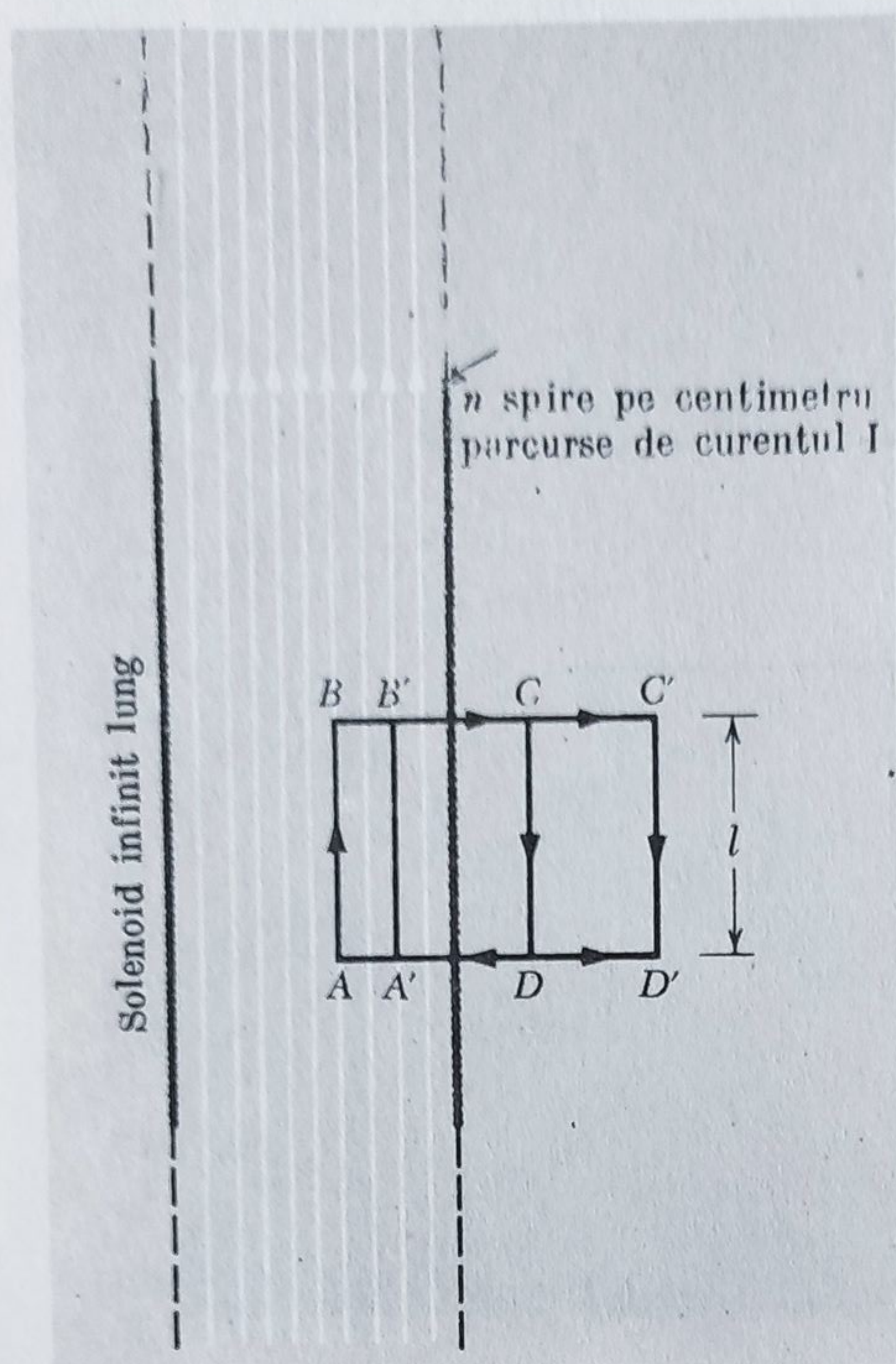


Fig. 6.20. Se arată de ce inducția, în afara unui solenoid infinit lung, trebuie să fie zero.

cu  $\hat{z}$ . Să studiem integrala de linie a lui  $\mathbf{B}$  pe conturul dreptunghiular  $ABCD$  din figura 6.20. Laturile orizontale nu aduc nici o contribuție. Contribuția laturii  $CD$  poate fi, de asemenea, nulă întrucât dacă integrala de linie pe  $CD$  ar avea o valoare finită, ar trebui ca integrala pe oricare asemenea porțiune ca  $C'D'$ , de exemplu, să aibă aceeași valoare și am fi putut obține câmp magnetic de inducție constantă ce ar ocupa tot spațiul din exteriorul solenoidului. Ajungem la concluzia că câmpul în exteriorul solenoidului trebuie să fie zero\*. Rămâne doar integrala de linie a lui  $\mathbf{B}$  în lungul lui  $AB$  care este  $B_z l$  și trebuie să fie egală cu  $\mu_0$  înmulțit cu intensitatea curentului ce străbate conturul. Prin urmare,  $B_z l = \mu_0 n I l$  sau  $B_z = \mu_0 n I$ , în concordanță cu ecuația (45).

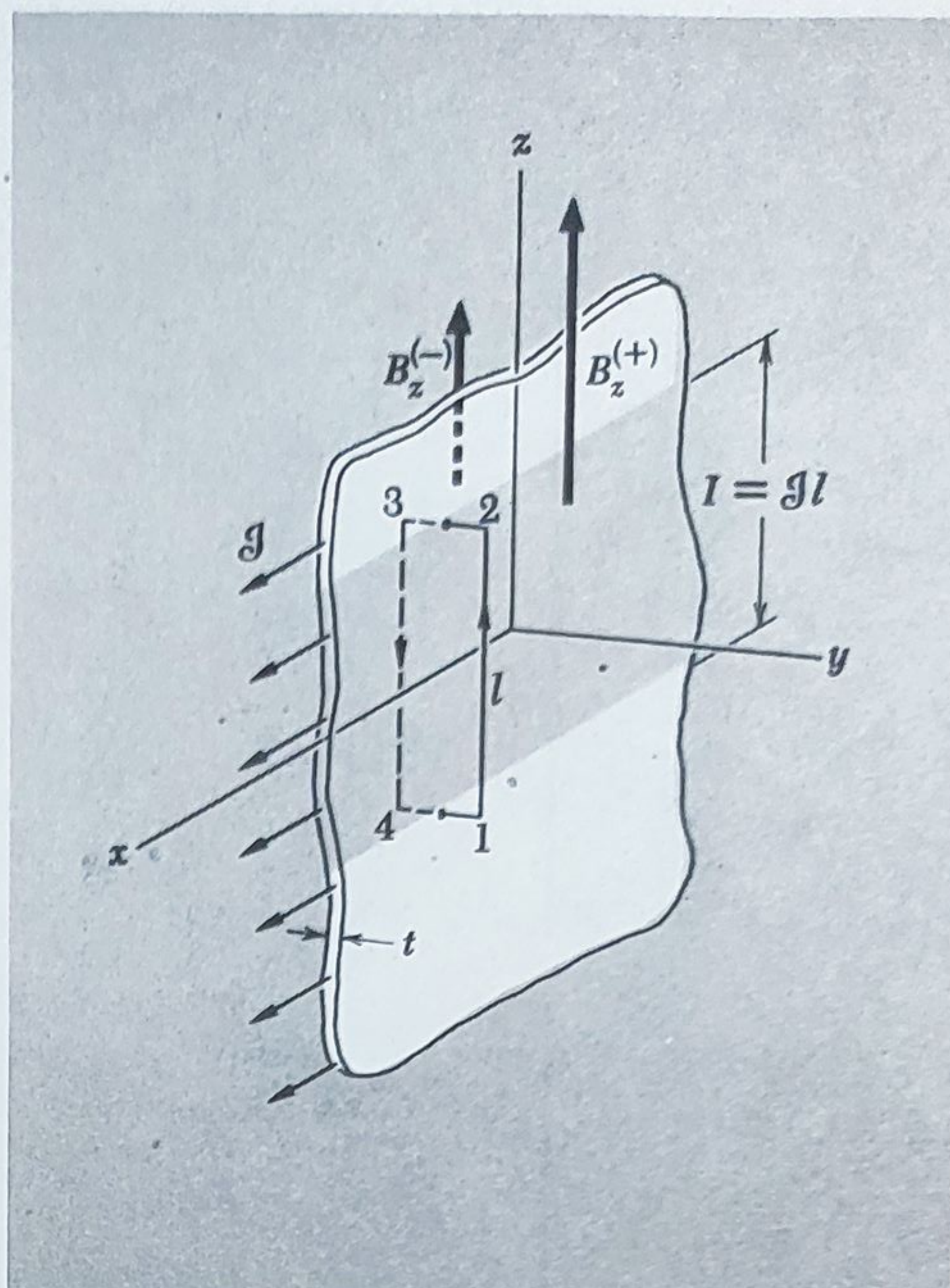
## 6.6. VARIAȚIA LUI $B$ ÎN APROPIEREA UNEI FOIȚE DE CURENT

În figura 6.19 am reprezentat un solenoid format dintr-o singură bandă străbătută de curent. Să considerăm ceva mai simplu chiar și anume, o foiță plană nelimitată, străbătută de curent. V-o puteți imagina ca o foiță de cupru de grosime uniformă prin care, în toate punctele, trece un curent de densitate și direcție constantă. Pentru a stabili direcțiile, așezăm foița în planul  $xz$  și curentul pe direcția  $x$ . Întrucât am presupus că foița este infinită și nelimitată este destul de greu s-o reprezentăm! În figura 6.21 este desenat doar un fragment din foiță, urmînd ca restul să vi-l imaginați extinzîndu-l în tot planul. La urma urmei grosimea foiței nu prezintă prea mare importanță, dar putem presupune că ea are o grosime oarecare, finită,  $t$ . Dacă den-

\* De ce nu poate produce un asemenea solenoid un câmp uniform în întreg spațiul din exterior? În definitiv, o bandă infinit lungă străbătută de curent, despre care vom vorbi, are un câmp uniform ce ocupă jumătatea de spațiu de pe fiecare parte a ei. Și solenoidul poate fi făcut oricît de subțire și ar fi fost cu adevărat straniu dacă un solenoid de diametru neglijabil de mic ar fi putut da naștere unui câmp finit peste tot. Poate puteți găsi un argument mai plauzibil.



Fig. 6.21. Pe o foiță cu curent superficial, prin trecerea de pe o față pe alta, trebuie ca componenta paralelă a lui  $B$  să se schimbe.



sitatea curentului în interiorul metalului este  $J$ , atunci fiecare centimetru de înălțime — pe direcția  $z$  — este parcurs de o bandă de curent  $Jt$ . O numim „densitate superficială de curent” sau „densitatea de curent a foiței” și vom folosi notația  $\mathcal{J}$  pentru a o deosebi de densitatea de curent de volum  $J$ . Unitatea de măsură pentru  $\mathcal{J}$  este A/m. Dacă nu ne interesează ce se întâmplă de fapt în interiorul forței,  $\mathcal{J}$  ne este o mărime utilă. Așa cum vom vedea, ea este aceea care determină variația câmpului magnetic între cele două fețe ale foiței. Câmpul reprezentat în figura 6.21 nu este produs numai de foiță. Mai există un alt câmp, pe direcția lui  $z$ , produs de o altă sursă. Câmpul total, care include și efectul foiței de curent, este reprezentat de vectorii  $B$  din fața și spatele foiței.

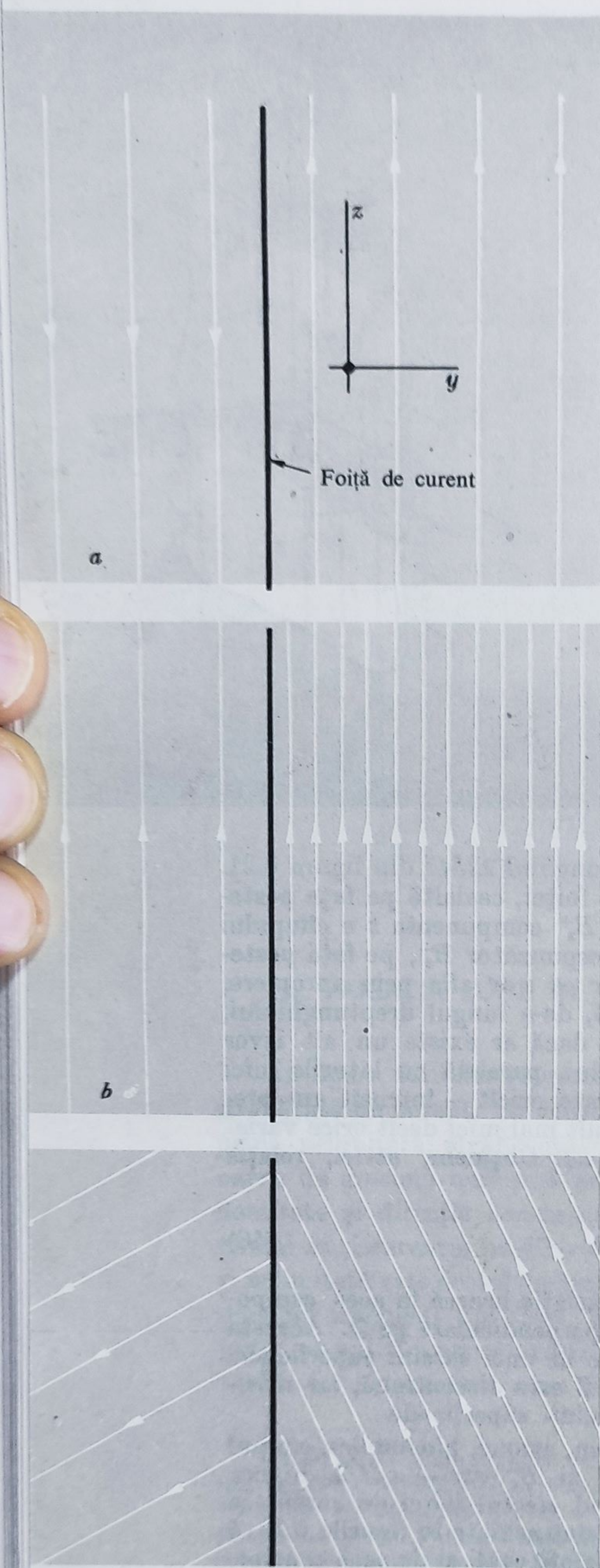
Să luăm integrala de linie a lui  $B$  pe dreptunghiul 12341 din figura 6.21. Una din laturile mari este pe fața anterioară a foiței, cealaltă pe fața posterioară, iar laturile mici intersectează foița. Fie  $B_z^+$  componenta  $z$  a câmpului magnetic chiar pe fața anterioară a foiței și corespunzător  $B_z^-$ , pe fața posterioară. Avem în vedere câmpul tuturor surselor ce s-ar afla prin apropiere, inclusiv cel al foiței. Integrala de linie a lui  $B$ , de-a lungul dreptunghiului, este pur și simplu egală cu  $(B_z^+ - B_z^-)$ . (Chiar dacă ar exista un alt izvor care ar da naștere unei componente a câmpului, paralelă cu laturile mici ale dreptunghiului, aceste laturi pot fi micșorate oricât — întrucât am presupus foița subțire — și în orice caz, ele sînt mult mai mici decît orice variație a câmpului.) Curentul în dreptunghi este  $l\mathcal{J}$ . Obținem, astfel, relația  $l(B_z^+ - B_z^-) = \mu_0 \mathcal{J}l$  sau

$$B_z^+ - B_z^- = \mu_0 \mathcal{J}. \quad (46)$$

O foiță de curent de densitate  $\mathcal{J}$  determină o variație bruscă în acea componentă a lui  $B$  care este paralelă cu suprafața și perpendiculară pe  $\mathcal{J}$ . Aceasta vă poate reaminti de variația câmpului electric al unei sarcini superficiale. În acest caz, componenta perpendiculară a lui  $E$  este discontinuă, iar mărimea discontinuității depinde de densitatea sarcinii superficiale.

Dacă foița este singura sursă pe care o avem, atunci, bineînțeles, câmpul este simetric în raport cu foița.  $B_z^+$  este  $\mu_0 \mathcal{J}/2$  și  $B_z^-$  este  $-\mu_0 \mathcal{J}/2$ . Figura 6.22, *a* ilustrează acest lucru. Alte situații, cînd efectul foiței de curent se suprapune peste un câmp creat de o altă sursă, sînt arătate în figurile 6.22, *b* și *c*. Presupunem două foițe cu curenți de suprafață egali și de sens contrar,





ca în desenul în secțiune din figura 6.23, fără alte surse în apropiere. Direcția curentului este perpendiculară pe planul figurii, ieșind din pagină în stînga și intrînd în pagină în dreapta. Cîmpul dintre foițe este  $\mu_0 \mathcal{J}$ , iar în afara lor nu există. Ceva asemănător întîlnim în două benzi sau plăci paralele parcurse de curent, aflate la o distanță mică una de alta, comparativ cu lățimea lor (fig. 6.24). Deseori, liniile folosite în distribuirea curenților de intensitate mare la stațiile de putere, au această formă.

Așa cum am remarcat și în figura 6.19,  $B$  variază în secțiunea foiței. Pentru una și aceeași densitate superficială de curent  $\mathcal{J}$ , variația va fi cu atît mai bruscă cu cît foița este mai subțire. În capitolele 1 și 2, am întîlnit o situație foarte asemănătoare, atunci cînd am studiat discontinuitatea ce apare în componenta perpendiculară a lui  $\mathbf{E}$  în cazul unei distribuții superficiale de sarcină. A prezentat interes, atunci, problema forței ce acționează asupra sarcinii superficiale și o chestiune similară o ridicăm aici.

Considerăm o porțiune din foiță de forma unui pătrat cu latura de 1 m. Curentul în această porțiune este  $\mathcal{J}$  și drumul parcurs de el este de 1 m, iar inducția medie a cîmpului ce acționează asupra acestui curent — presupunînd că este uniform distribuit în toată grosimea foiței — este  $\frac{1}{2}(B_z^+ + B_z^-)$ . Prin urmare, forța ce acționează asupra acestei distribuții de curent este:

Forța exercitată pe unitatea de suprafață a

$$\text{foiței} = \frac{1}{2}(B_z^+ + B_z^-)\mathcal{J}. \quad (47)$$

Fig. 6.22. Cîteva tipuri posibile de cîmp magnetic total în apropierea unei foițe străbătute de curent. Curentul este de-a lungul axei  $x$  (iese din planul figurii). (a) Cîmpul propriu al foiței; (b) cîmpul foiței suprapus peste un cîmp uniform, pe direcția lui  $z$  (analog situației din figura 6.21); (c) cîmpul foiței suprapus peste un cîmp uniform, avînd o altă orientare. În fiecare din cazuri, componenta  $B_z$  se schimbă cu  $\mu_0 \mathcal{J}$ , la trecerea prin foiță; componenta  $B_y$  nu se schimbă.



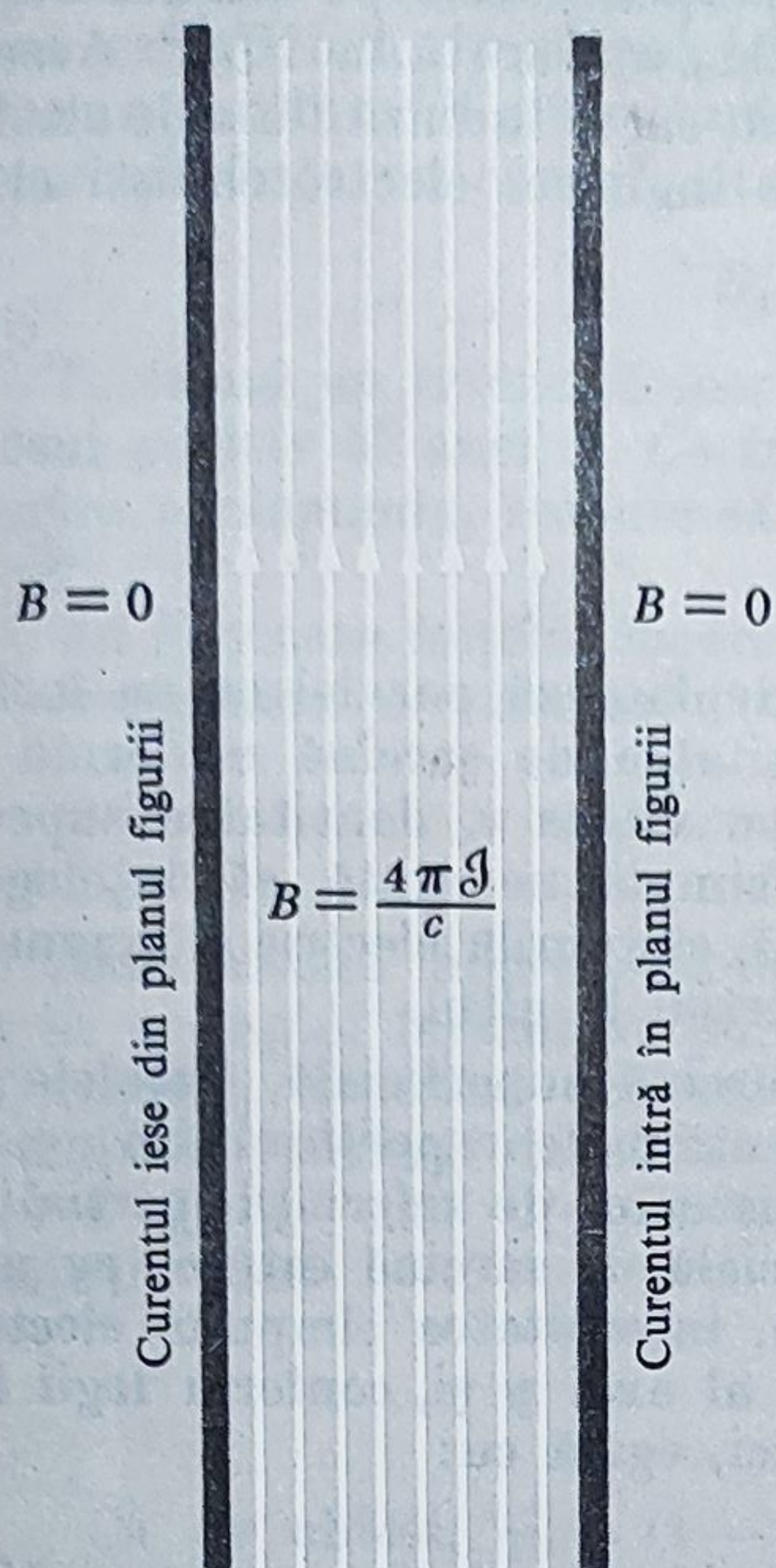


Fig. 6.23. Câmpul magnetic dintre două foițe paralele, străbătute de curent.

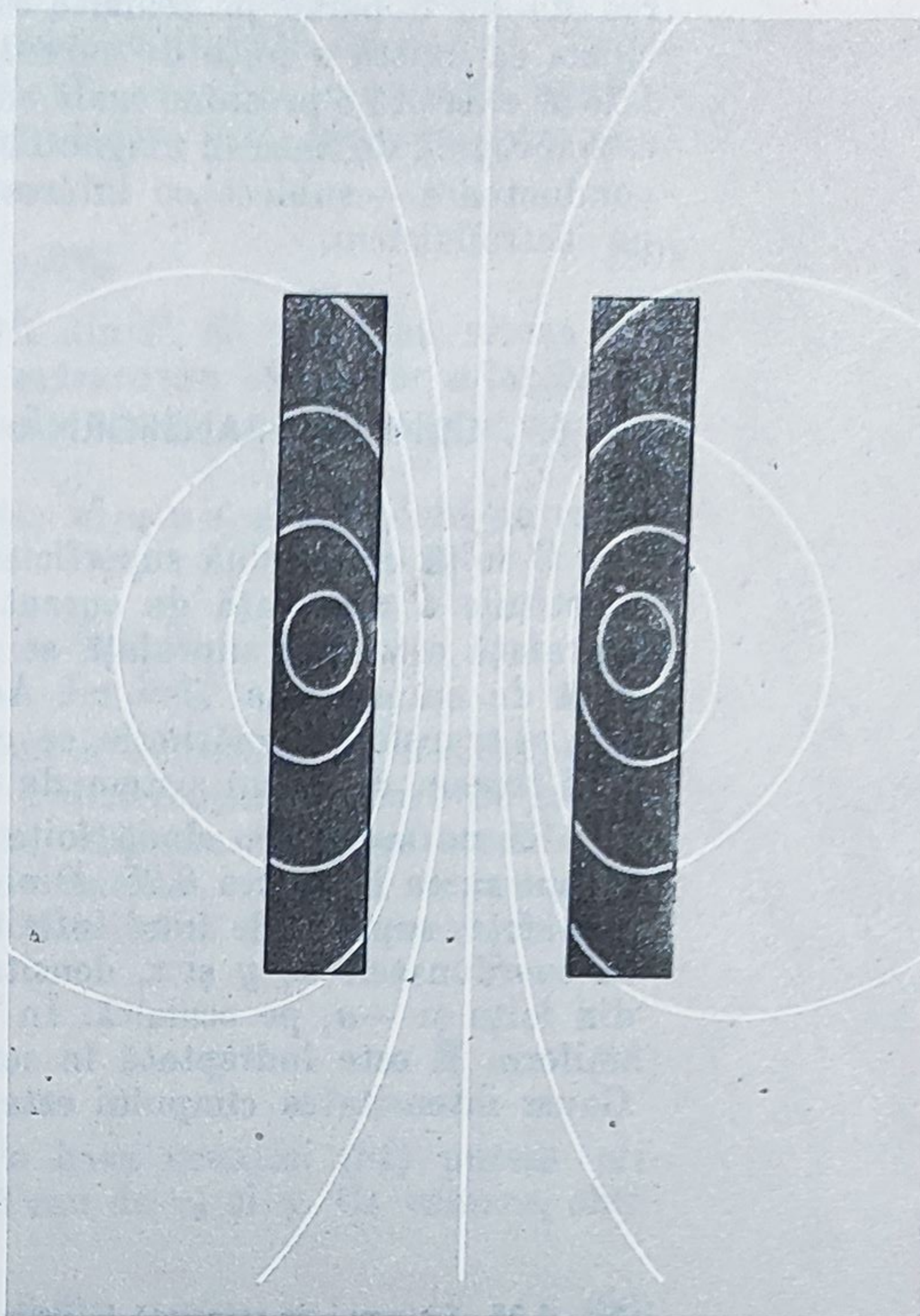


Fig. 6.24. Câmpul magnetic al unei perechi de bare de cupru, străbătute de curenți de sensuri contrare, reprezentate în secțiune transversală.

Pe baza ecuației (46), putem înlocui  $\mathcal{J}$  cu  $(B_z^+ - B_z^-)/\mu_0$ , astfel încât forța exercitată pe unitatea de suprafață poate fi exprimată sub forma:

$$\text{Forță pe m}^2 = \left( \frac{B_z^+ + B_z^-}{2} \right) \left( \frac{B_z^+ - B_z^-}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2\mu_0} [(B_z^+)^2 - (B_z^-)^2]. \quad (48)$$

Forța este perpendiculară la suprafață și proporțională cu aria, ca și în cazul tensiunii produse de presiunea hidrostatică. Pentru a fi siguri de semn, putem să reprezentăm direcția forței într-un caz particular ca cel din figura 6.23, de exemplu. Forța ce acționează asupra fiecărui conductor este îndreptată *spre exterior*. Este ca și cum regiunea de inducție mare a câmpului ar fi o regiune cu presiune ridicată. Trebuie să avem în vedere că în determinarea acestei forțe, contează doar componenta lui  $\mathbf{B}$  paralelă cu suprafața.

Am considerat o foiță infinită plană, dar lucrurile se petrec la fel și în imediata apropiere a oricărei suprafețe curbe. Oriunde vom întâlni o variație a componentei paralele cu suprafața lui  $\mathbf{B}$ , de la  $B_1$  la  $B_2$ , prin trece-



rea de pe o parte pe cealaltă a suprafeței, vom putea trage nu numai concluzia că există o foiță de curent, dar și că perpendicular pe această suprafață se exercită o presiune egală cu  $(B_1^2 - B_2^2)/2\mu_0$ , măsurată în  $\text{N/m}^2$ . Aceasta este o regulă de bază în magnetohidrodinamică, care studiază fluidele electroconductoare — subiect ce interesează atât pe inginerii electrotehniști cât și pe astrofizicieni.

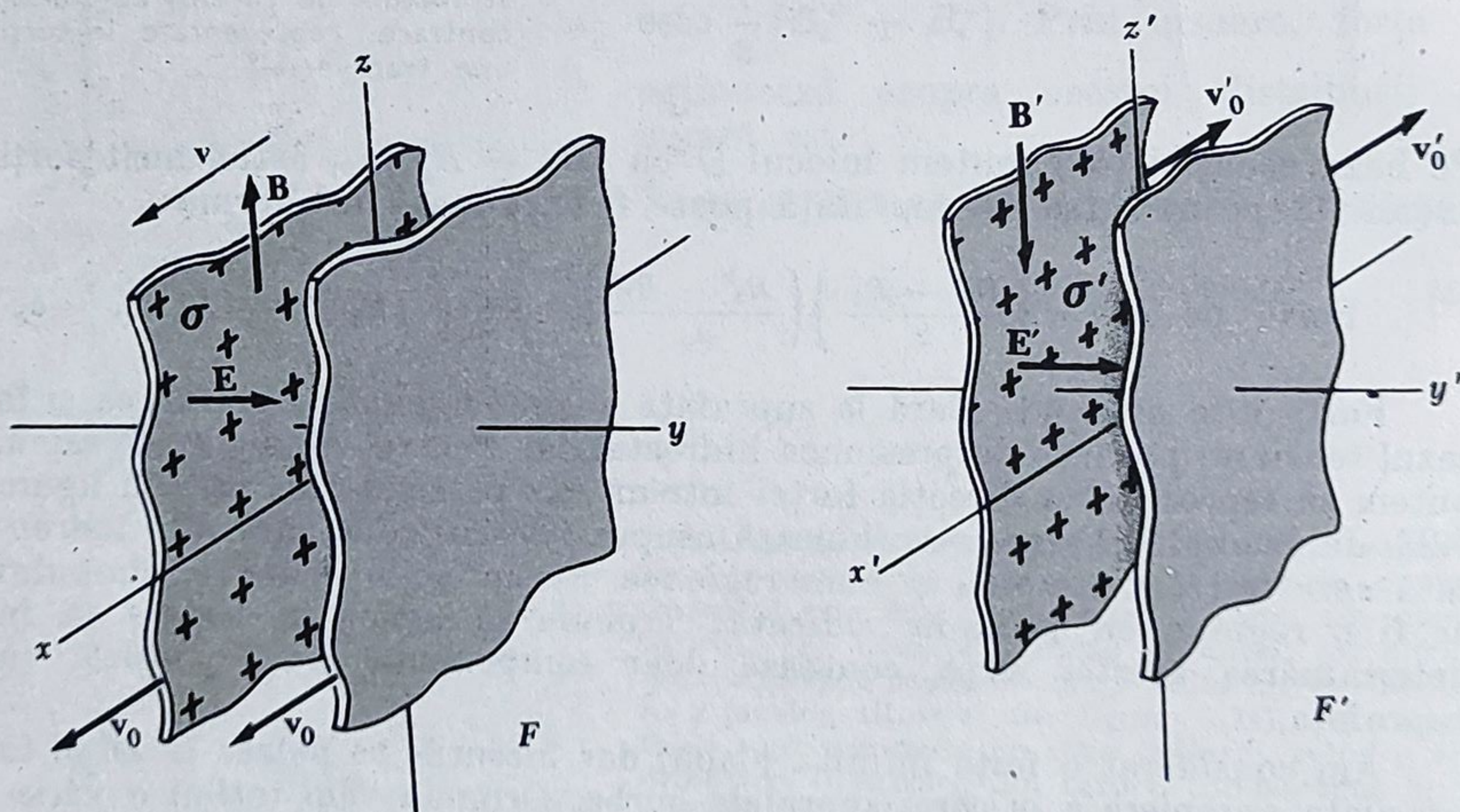
## 6.7. CUM SE TRANSFORMĂ CÎMPURILE

O foiță cu sarcină superficială, care se deplasează paralel cu ea însăși, constituie o suprafață de curent. Dacă densitatea de sarcină uniformă pe suprafață este  $\sigma$  și suprafața se deplasează cu viteza  $v$ , densitatea superficială de curent este  $\mathcal{J} = \sigma v$ . Această idee simplă ne ajută să înțelegem cum se transformă mărimile ce caracterizează cîmpurile electric și magnetic cînd trecem de la un sistem de referință inerțial la altul.

Să ne imaginăm două foițe plane cu sarcină superficială, paralele cu planul  $xz$  ca în figura 6.25. Din nou, reprezentăm doar porțiuni din aceste suprafețe, suprafețele fiind infinit mari. În sistemul de referință inerțial  $F$ , cu coordonatele  $x$ ,  $y$  și  $z$ , densitatea superficială de sarcină este  $\sigma$ , pe una din foițe și  $-\sigma$ , pe cealaltă. În acest sistem, intensitatea cîmpului electric uniform  $E$  este îndreptată în sensul pozitiv al axei  $y$  și, conform legii lui Gauss intensitatea cîmpului este, ca de obicei, egală cu:

$$E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (49)$$

Fig. 6.25. Sistemul de referință  $F'$ , văzut de un observator aflat în  $F$ , se mișcă cu o viteză  $v$  în sensul pozitiv al axei  $x$ . Foițele încărcate se mișcă cu viteza  $v_0$ , pentru un observator aflat în  $F$ .





În acest sistem de referință  $F$ , ambele foițe se mișcă în sensul pozitiv al axei  $x$  cu viteza  $v_0$ , astfel încît avem o pereche de foițe de curent. Densitatea superficială de curent într-o foiță este  $\mathcal{J}_x = \sigma v_0$  și în cealaltă, egală și de semn contrar. Ca și în cazul reprezentat în figura 6.21, inducția între două asemenea foițe de curent este

$$B_z = \mu_0 \mathcal{J}_x = \mu_0 \sigma v_0. \quad (50)$$

Sistemul de referință inertial  $F'$ , privit din  $F$ , se mișcă cu viteza  $v$  în sensul pozitiv al axei  $x$ . *Ce intensități va măsura un observator aflat în  $F'$ ?* Pentru a răspunde, trebuie să știm doar cum arată sursele acestor cîmpuri în  $F'$ .

În  $F'$  viteza foițelor încărcate pe direcția  $x'$  este  $v'_0$  și este dată de regula de compunere a vitezelor

$$v'_0 = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v / c^2} = c \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta}. \quad (51)$$

În acest sistem apare o contracție Lorentz a densității de sarcină, exact ca în exemplul întîlnit în paragraful 5.9, a distribuțiilor liniare de sarcină în mișcare. Repetînd aceleași raționamente, obținem că densitatea în sistemul de referință legat de purtătorii de sarcini, aflat în repaus, este  $\sigma(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$  sau  $\sigma/\gamma_0$  și prin urmare, densitatea în sistemul de referință  $F'$  este

$$\sigma' = \sigma \frac{\gamma_0}{\gamma_0'}. \quad (52)$$

Ca de obicei,  $\gamma_0' = (1 - v_0'^2/c^2)^{-1/2}$ . Pe baza ecuației (51) putem elimina  $\gamma_0'$ , exprimîndu-l în funcție de  $\beta_0$  și  $\beta$  sau de  $\gamma_0$  și  $\gamma$ . Ca urmare, obținem:

$$\sigma' = \sigma \gamma (1 - \beta_0 \beta) \quad (53)$$

Densitatea superficială de curent în sistemul de referință  $F'$  este, prin urmare,

$$\mathcal{J}' = \sigma' v'_0 = \sigma \gamma (1 - \beta_0 \beta) c \frac{(\beta_0 - \beta)}{1 - \beta_0 \beta} = \sigma \gamma (v_0 - v). \quad (54)$$

Știm, acum, cum arată sursele în sistemul  $F'$  și deci știm cum trebuie să fie cîmpurile în acest sistem. Afirmînd aceasta, apelăm din nou la postulatul teoriei relativității. Legile fizicii sînt echivalente în toate sistemele de referință inertiiale și aceasta se referă și la formulele ce leagă intensitatea cîmpului electric de densitatea de sarcină superficială și inducția magnetică de densitatea superficială de curent. Rezultă că:

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \gamma \left[ \frac{\sigma}{\epsilon_0} - (\mu_0 \sigma v_0) \left( \frac{v}{c} \right) c \right] \quad (55)$$

$$B'_z = \mu_0 \mathcal{J}' = \gamma \left[ \mu_0 \sigma v_0 - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left( \frac{v}{c} \right) \frac{1}{c} \right]. \quad (56)$$

Revenind la valorile lui  $E_y$  și  $B_z$  din ecuațiile (49) și (50), observăm că rezultatele noastre pot fi scrise sub forma:

$$\begin{aligned} E'_y &= \gamma (E_y - c \beta B_z) \\ B'_z &= \gamma \left( B_z - \frac{1}{c} \beta E_y \right). \end{aligned} \quad (57)$$



Dacă „sandwich“-ul foitelor de curent ar fi fost orientat paralel cu planul  $xy$ , în loc de  $xz$ , am fi obținut relațiile ce leagă  $E'_z$  cu  $E_z$  și  $B'_y$  și pe  $B'_y$  cu  $B_y$  și  $E_z$ . Forma relațiilor este, bineînțeles, aceeași ca mai sus, dar dacă am urmări direcțiile, am găsi diferențe în semne ce decurg din regulile pentru aflarea sensului lui  $\mathbf{B}$ .

Mai rămâne să găsim cum se schimbă componentele câmpului pe direcția mișcării. În paragraful 5.5 am văzut că componenta longitudinală a lui  $\mathbf{E}$  are aceeași valoare în ambele sisteme de referință. Dacă acest lucru este valabil și pentru componenta longitudinală a lui  $\mathbf{B}$ , se poate arăta în felul următor. Presupunem că componenta longitudinală a lui  $\mathbf{B}$  și anume  $B_x$  (fig. 6.25) este produsă de solenoidul din jurul axei  $x$ , în sistemul de referință  $F$ . Inducția câmpului în interiorul solenoidului depinde, după cum știm, numai de intensitatea curentului  $I$  din conductor, care reprezintă numărul de purtători de sarcină pe secundă, și de  $n$  — numărul înfășurărilor pe unitatea de lungime. În sistemul de referință  $F'$ , solenoidul va suferi contracția Lorentz, astfel încât numărul înfășurărilor pe unitatea de lungime va fi mai mare în acest sistem. Intensitatea curentului, în schimb, pentru observatorul din sistemul  $F'$ , va fi mai mică întrucât, din punctul său de vedere, observatorul din  $F$  a măsurat intensitatea curentului numărind electronii ce treceau printr-un punct al conductorului într-o secundă, folosind un ceas ce mergea mai încet. Astfel, dilatarea timpului anulează contracția lungimii în produsul  $\mu_0 n I$ . Într-adevăr, orice mărime având dimensiunile  $(lungime)^{-1} \times (timp)^{-1}$  rămâne neschimbată în transformarea Lorentz. Astfel,  $B'_x = B_x$ .

Să ne amintim discuțiile făcute la ecuația (5.6) din capitolul 5. Proprietățile câmpului, exprimate în legile de transformare, sînt proprietăți *locale*. Valorile lui  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$ , într-un punct din sistemul de coordonate spațiu-timp, într-un sistem de referință trebuie să determine în mod univoc componentele intensității câmpului, observate într-un alt sistem de referință, într-un punct de aceleași coordonate spațiu-timp. Prin urmare, faptul că în demonstrația noastră am folosit un tip de sursă deosebit de simplu (foițe paralele uniform încărcate) nu compromite în nici un fel generalitatea rezultatelor noastre. Am ajuns, de fapt, la legile generale de transformare pentru toate componentele intensității câmpului electric și ale inducției magnetice, indiferent de natura sau configurația lor.

Dăm mai jos toate formulele de transformare. Toate mărimile notate cu prim sînt măsurate în sistemul  $F'$ , care se deplasează în sensul pozitiv al axei  $x$ , cu viteza  $v$  față de sistemul  $F$ . Mărimile fără prim sînt rezultatele măsurătorilor făcute în sistemul  $F$ . Ca de obicei,  $\beta = v/c$  și  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

$$\begin{array}{l} E'_x = E_x \quad E'_y = \gamma(E_y - c\beta B_z) \quad E'_z = \gamma(E_z + c\beta B_y) \\ B'_x = B_x \quad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{1}{c}\beta E_z\right) \quad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{1}{c}\beta E_y\right) \end{array} \quad (58)$$

Ecuațiile încadrate ne relevă un fapt uluitor — simetria relațiilor lui  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$ . Dacă tipograful ar fi înlocuit din greșeală peste tot pe  $E'$  cu  $B'$  și pe  $y'$  cu  $z'$ , s-ar fi obținut exact aceleași ecuații! Pînă acum am considerat că magnetismul este un fel de efect „de ordinul doi“ al schimbărilor relativiste în câmpurile electrice ale purtătorilor de sarcină în mișcare. Evident, fenomenele magnetice pe care le întîlnim în natură sînt net diferite de fenomenele electrice. Lumea înconjurătoare nu este nici pe departe simetrică în ceea ce privește electricitatea și magnetismul. Și cu toate acestea, excluzînd sursele,



găsim că câmpurile caracterizate prin  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  sînt legate între ele într-un mod cît se poate de simetric.

Se pare de asemenea că câmpul electric și magnetic sînt, într-o oarecare măsură, aspecte sau componente diferite ale aceleiași entități. Putem vorbi despre câmpul *electromagnetic* și să considerăm că  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $B_x$ ,  $B_y$  și  $B_z$  sînt șase componente ale acestui câmp. Același câmp, studiat în diferite sisteme de referință inerțiale, va fi reprezentat de diferite grupuri de valori ale acestor componente, la fel cum un vector este dat de componente diferite în diferitele sisteme de coordonate ce se rotesc unele față de altele. Totuși, din punct de vedere matematic, câmpul electromagnetic nu este un vector ci mai curînd ceva numit *tensor*. Totalitatea ecuațiilor încadrate reprezintă relațiile de transformare ale componentelor unui asemenea tensor cînd trecem de la un sistem de referință la altul. Nu vom dezvolta aici limbajul matematic. De fapt, ne vom întoarce acum la vechiul nostru mod de a considera câmpul electric ca un câmp vectorial și câmpul magnetic un alt câmp vectorial cuplat cu primul — chestiune pe care o vom studia în capitolul 7. Pentru a dezvolta scurta remarcă făcută asupra entității câmp electromagnetic, care poate fi reprezentat în spațiul cvadridimensional spațiu-timp, trebuie să acumulăm cunoștințe mai aprofundate.

Transformările date de ecuațiile (58) duc la relații uluitoare de simple într-o serie întreagă de cazuri. Să presupunem că într-un sistem de referință, să spunem cel cu coordonate „fără prim“, inducția magnetică  $\mathbf{B}$  este zero peste tot. Atunci câmpurile, observate în celălalt sistem de coordonate, au componentele:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & E'_y &= \gamma E_y & E'_z &= \gamma E_z \\ B'_x &= 0 & B'_y &= \frac{1}{c} \beta \gamma E_z & B'_z &= -\frac{1}{c} \beta \gamma E_y. \end{aligned} \quad (59)$$

Aceasta implică o anumită relație între intensitatea câmpului electric și inducția magnetică, valabilă în orice punct al sistemului de coordonate „cu prim“, și anume:

$$B'_x = 0 \quad B'_y = \frac{1}{c} \beta E'_z \quad B'_z = -\frac{1}{c} \beta E'_y. \quad (60)$$

Reamintindu-ne că, în acest caz, viteza sistemului „fără prim“, văzut din sistemul de coordonate „cu prim“, este un vector orientat în sensul negativ al axei  $x'$ , putem scrie relația de mai sus ca un produs vectorial, obținînd astfel o regulă mult mai generală:

$$\mathbf{B}' = \left( \frac{\mathbf{v}'}{c^2} \right) \times \mathbf{E}' \quad (\text{dacă } \mathbf{B} = 0 \text{ în oricare punct al unui sistem de referință}) \quad (61)$$

$\mathbf{v}'$  reprezintă aici viteza, observată din sistemul „cu prim“, a celui sistem de referință în care  $\mathbf{B}$  este zero.

Exact în același mod, deducem din ecuația (58) că dacă  $\mathbf{E} = 0$  în orice punct al unui sistem de referință, pe care îl vom numi „fără prim“, atunci în celălalt sistem de referință

$$\mathbf{E}' = -c \left( \frac{\mathbf{v}'}{c} \right) \times \mathbf{B}' \quad (\text{dacă } \mathbf{E} = 0 \text{ în oricare punct al unui sistem de referință}) \quad (62)$$



Aici, ca și în ecuația (61),  $v'$  este viteza sistemului „fără prim” (în acest caz, cel în care  $E$  este peste tot zero) văzută din sistemul „cu prim”. Restricțiile ecuațiilor încadrate (61) și (62) sînt, desigur, destul de severe. De cele mai multe ori *nu există* asemenea sisteme de referință în care  $B$  să fie zero peste tot și nici asemenea sisteme în care densitatea de sarcină electrică și prin urmare și  $E$ , să fie nulă peste tot.

Intrucît ecuația (61) conține numai mărimi măsurate în același sistem de referință, este ușor de aplicat la cîmpurile ce variază în spațiu\*, fără a ține seama de restricții.

Un exemplu bun îl constituie cîmpul unei sarcini punctiforme  $q$  ce se mișcă cu viteză constantă, problemă studiată în capitolul 5. Să luăm sistemul de referință în care sarcina este în repaus ca sistemul „fără prim”. În acest sistem, bineînțeles, nu există cîmp magnetic. Ecuația (61) ne spune că, în sistemul „laboratorului” în care sarcina se mișcă cu viteza  $v$ , trebuie să existe un cîmp magnetic perpendicular pe cîmpul electric și pe direcția de mișcare. Noi am găsit forma exactă a cîmpului electric în acest sistem.

Știm că cîmpul pornește radial de la poziția instantanee a sarcinii și valoarea intensității lui este dată de ecuația (5.12). Liniile cîmpului magnetic trebuie să fie cercuri în jurul direcției de mișcare, așa cum sînt schematic reprezentate în figura 6.26. Cînd viteza sarcinii este mare, astfel încît  $\gamma \gg 1$ , „spîțele” radiale care sînt liniile cîmpului electric se strîng într-un disc subțire. Liniile circulare ale cîmpului magnetic se concentrează de asemenea în acest disc.

Pornind de la legea lui Coulomb, în ultimele două capitole am parcurs un drum lung. Am urmărit, totuși, pas cu pas cerințele teoriei relativității și ale invarianței de sarcină. Începem să înțelegem că existența cîmpului magnetic și curioasa sa relație simetrică cu cîmpul electric este o consecință

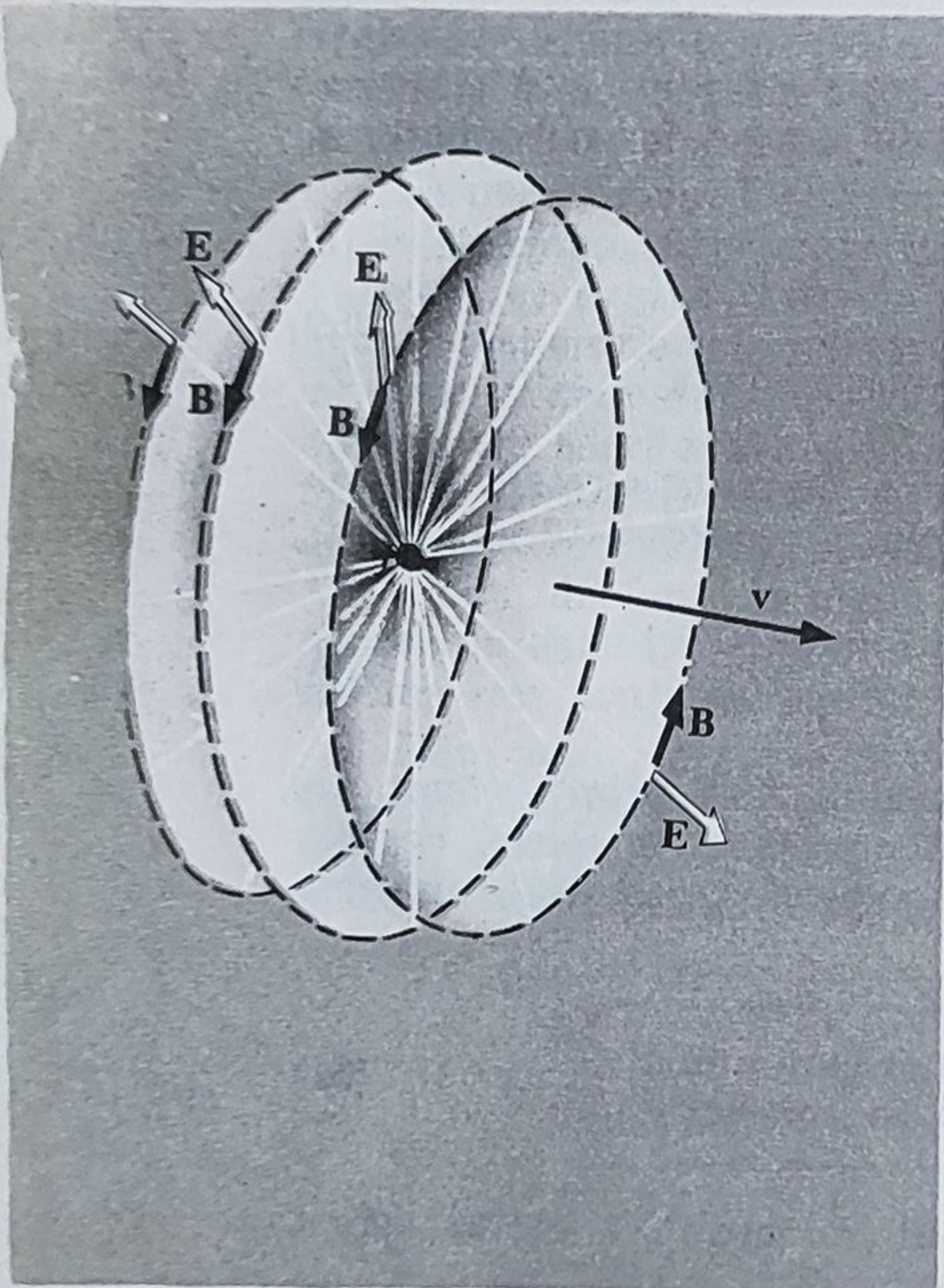


Fig. 6.26. Cîmpurile electrice și magnetice ale unui purtător de sarcină aflat în mișcare uniformă, la un moment dat.

\* Pentru cîmpurile variabile în spațiu, sensul ec. (58) este următorul:  $E'(x', y', z', t') = E(x, y, z, t)$  etc. Prin urmare, dacă vrem să calculăm cîmpurile, observate într-un punct oarecare al sistemului de referință „cu prim” la momentul  $t'$ , trebuie să luăm pentru fiecare punct  $(x', y', z')$  timpul  $t$  care depinde de  $x', y', z', t'$  și coordonatele  $x, y, z$  care sînt legate de  $x', y', z', t'$ . Astfel sînt, de exemplu, valorile lui  $B_x$  și  $B_y$ , în acel moment  $t$ , în acel punct  $(x, y, z)$  care se mișcă spre dreapta în ultima ecuație încadrată.



necesară a acestor principii generale. Reamintim din nou cititorului că n-am urmărit deloc în expunere ordinea cronologică a descoperirii și explicării legilor electromagnetismului. Unul din aspectele legăturii dintre cîmpurile electrice și magnetice, care este prezentat în ecuația (58), a fost pus în evidență în experiențele lui Michael Faraday cu curenții electrici variabili. Aceasta s-a întîmplat cu 75 de ani înainte ca cineva să se fi gîndit să scrie ecuații analoge celor încadrate.

#### Despre efectul magnetic al convecției electrice\*

(American Journal of Science (3), XV, 30—38, 1878)

Experiențele descrise în acest articol au fost făcute cu scopul de a stabili, dacă un corp electrizat în mișcare produce efecte magnetice. Se pare că nu există o bază teoretică pe care să putem fundamenta problema, întrucît acțiunea magnetică a unui curent electric de conducție poate fi atribuită unei interacțiuni dintre conductor și curent. Deci o experiență este binevenită. Profesorul Maxwell, în lucrarea sa „Tratat asupra electricității”, punctul 770, a calculat acțiunea magnetică a unei suprafețe electrizate în mișcare, dar că acțiunea există nu a fost încă verificat experimental sau teoretic.

Aparatura folosită consta dintr-un disc de ebonită cu diametrul de 21,1 cm și grosimea de 0,5 cm, care putea fi rotit în jurul unui ax vertical cu o viteză de 61 rotații pe secundă. Pe ambele părți ale discului, la distanțe de 0,6 cm s-au fixat plăci de sticlă cu diametrul de 38,9 cm și cu un orificiu în centru de diametru 7,8 cm. Discul de ebonită a fost aurit pe ambele părți, iar plăcile de sticlă aveau pe o parte inele aurite cu diametrele exterior și interior 24,0 cm, respectiv 8,9 cm. Părțile aurite puteau fi apropiate sau îndepărtate de discul ce se rotea dar, de obicei, erau apropiate astfel încît calculele să se simplifice și să nu existe incertitudini cu privire la electrizare. Plăcile exterioare erau, în mod obișnuit, legate la pămînt și discul interior la o baterie electrică, cu ajutorul unui ac care se găsea la distanța de 1/30 cm de margine și era îndreptat spre ea. Întrucît marginea era lată, acul nu se descărca deși între el și margine exista o diferență de potențial. Între bateria electrică și disc...

#### 6.8. EXPERIENȚA LUI ROWLAND

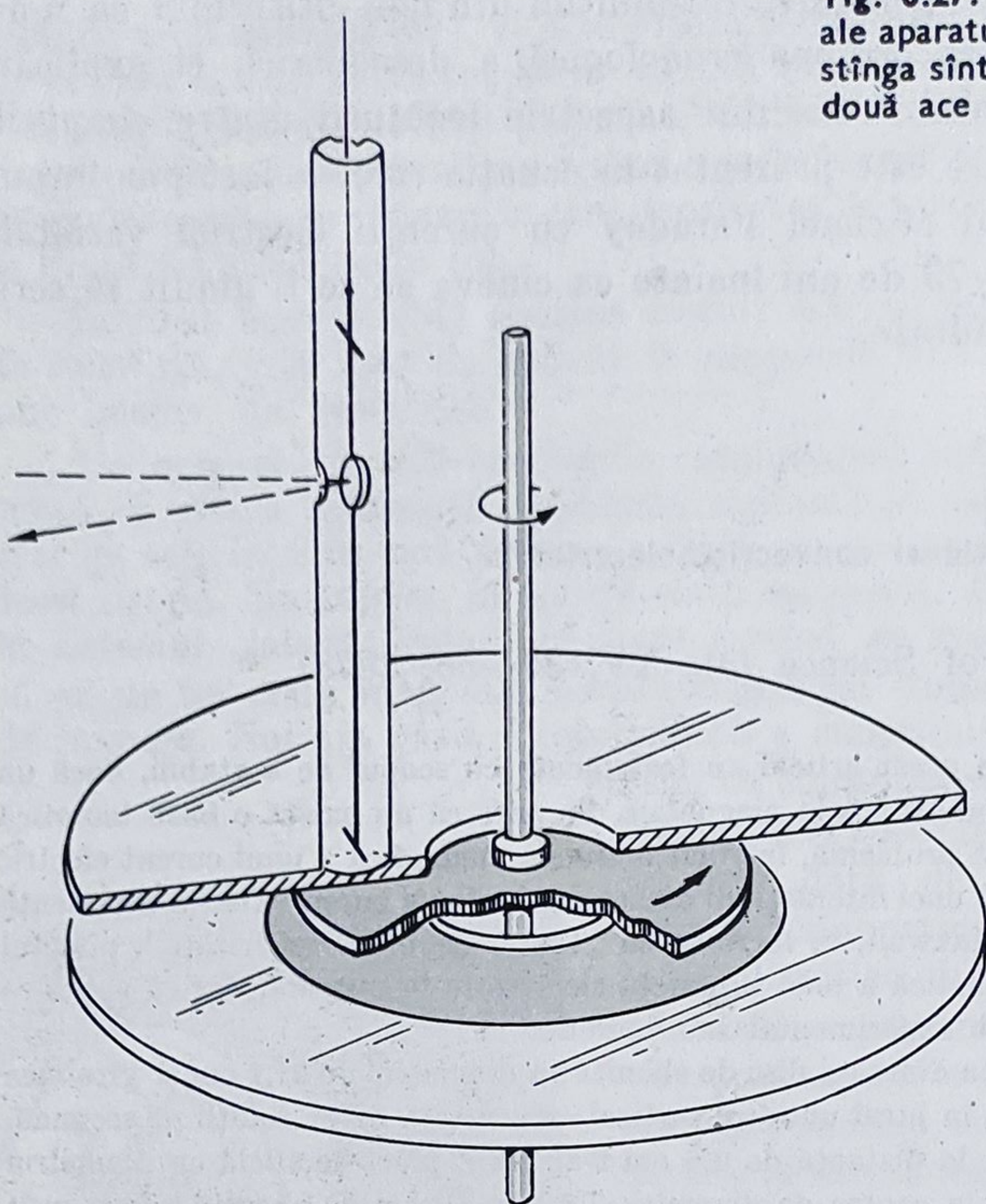
Așa cum am remarcat în paragraful 5.9, cu o sută de ani în urmă, nu era evident că un curent ce trece printr-un conductor și un **purtător de sarcină** electrică în mișcare sînt în esență surse identice ale cîmpului magnetic. Ideea unității dintre electricitate și magnetism, care decurgea din lucrarea lui Maxwell, sugera că orice purtător de sarcină în mișcare trebuie să creeze un cîmp magnetic, dar era greu de dovedit experimental.

---

\* Experiențele descrise au fost făcute în laboratorul Universității din Berlin, prin amabilitatea profesorului Helmholtz, desăvîrșirea lor datorindu-se în mare măsură sfaturilor sale. Ideea experienței mi-a apărut pentru prima oară în 1868, notînd-o cu această dată într-un carnet de note.



Fig. 6.27. Părțile componente esențiale ale aparatului lui Rowland. În tubul din stînga sînt atîrnate în poziție orizontală două ace magnetice scurte.



Faptul că o foiță încărcată electrostatic, aflată în mișcare, produce un câmp magnetic a fost demonstrat pentru prima oară de Henry Rowland, marele fizician american recunoscut pentru perfecțiunea rețelei sale de difracție. Rowland a făcut multe măsurători electrice ingenioase și precise, dar nici una nu i-a încercat atît de dur virtuozitatea experimentală ca detectarea și măsurarea câmpului magnetic a unui disc încărcat ce se rotea. Câmpul ce trebuia detectat era aproximativ de ordinul  $10^{-5}$  din valoarea câmpului pămîntesc — o experiență formidabilă chiar cu aparatura actuală! În figura 6.27 este redată o schiță a aparaturii lui Rowland și este reprodusă prima pagină a articolului în care-și descrie experiența. Cu zece ani înaintea descoperirii undelor electromagnetice de către Hertz, rezultatele lui Rowland au constituit o bază, deși mai puțin dramatică, pentru teoria câmpului electromagnetic a lui Maxwell.

#### 6.9. CONDUCTIBILITATEA ELECTRICĂ ÎNTR-UN CÂMP MAGNETIC: EFECTUL HALL

Dacă printr-un conductor, aflat în cîmp magnetic, trece un curent electric, asupra purtătorilor de sarcină în mișcare acționează direct forța  $qv \times B$ . Noi observăm, totuși, o forță ce acționează asupra conductorului ca un întreg. Să vedem de ce se întîmplă așa. În figura 6.28, *a* este reprezentată o secțiune



printr-o bară metalică străbătută de un curent continuu. Sub acțiunea unui câmp de intensitate  $E$ , electronii se îndreaptă spre stînga cu o viteză medie  $\bar{v}$ , care are aceeași semnificație ca  $\bar{u}$  în discuția noastră din capitolul 4. Electronii de conducție sînt reprezentați, foarte schematizat, prin puncte albe. Punctele negre sînt ionii pozitivi ce formează rețeaua cristalină rigidă a barei metalice solide. Întrucît electronii sînt negativi, curentul este pe direcția axei  $y$ . Ca de obicei, densitatea de curent  $J$  și intensitatea câmpului  $E$  sînt legate prin conductivitatea  $\sigma$  a metalului:  $J = \sigma E$ . În figura 6.28, *a* nu există alt câmp magnetic în afara celui creat de curentul însuși și pe care-l vom neglija. Acum conectăm un câmp extern  $B$  pe direcția axei  $x$ . Starea de mișcare imediat după asta este arătată în figura 6.28, *b*. Electronii sînt deviați în jos. Dar întrucît ei nu pot trece dincolo de marginea barei, ei se strîng, pur și simplu, acolo pînă cînd excesul de sarcini negative de pe marginea inferioară a barei și excesul corespunzător de sarcini pozitive de pe marginea superioară a barei creează un câmp electric  $E_t$ , în care forța de mărime  $eE_t$ , îndreptată în sus, echilibrează forța  $e\bar{v}B$ , îndreptată în jos. În starea staționară (care se atinge foarte repede!) mișcarea, în medie, este din nou orizontală și în interiorul metalului există acest câmp electric transversal  $E_t$ , așa cum se observă în sistemul de coordonate legat de rețeaua cristalină a metalului (fig. 6.28, *c*). Acest câmp determină acțiunea unei forțe, îndreptate în jos, asupra ionilor pozitivi. Iată cum forța  $(-e\bar{v} \times B)$ , ce acționează asupra electronilor, trece asupra barei solide. Bara, bineînțeles, se sprijină de suportul ei — dacă acesta există, și dacă nu, se deplasează accelerat în jos.

Existența câmpului transversal  $E_t$  poate fi demonstrată direct prin metode electrice (fig. 6.29). Firele se conectează la punctele  $P_1$  și  $P_2$  de pe

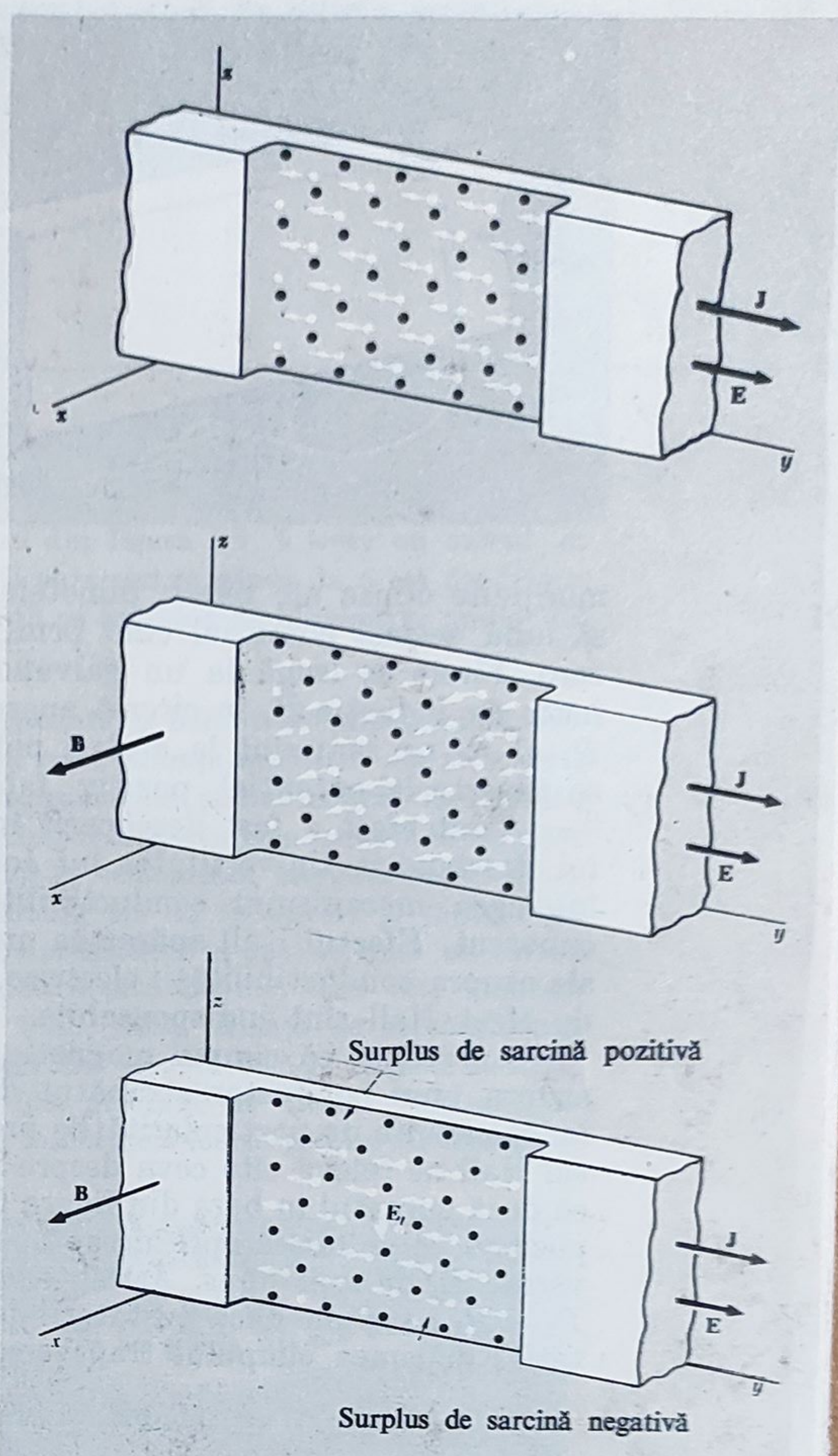


Fig. 6.28. (a) Printr-o bară metalică trece un curent. Este arătată doar o porțiune mică din bară. Electronii de conducție sînt reprezentați (bineînțeles, nu în mărime naturală și nici numărul real) prin puncte albe, ionii pozitivi ai rețelei cristaline — prin puncte negre. Săgețile indică viteza medie  $\bar{v}$  de mișcare a electronilor.

(b) În direcția lui  $x$ , se aplică un câmp magnetic, deviind (la început) electronii în jos.

(c) Perturbarea distribuției de sarcini dă naștere unui câmp electric transversal  $E_t$ . În acest câmp, ionii pozitivi aflați în repaus, sînt supuși acțiunii unei forțe îndreptate în jos.



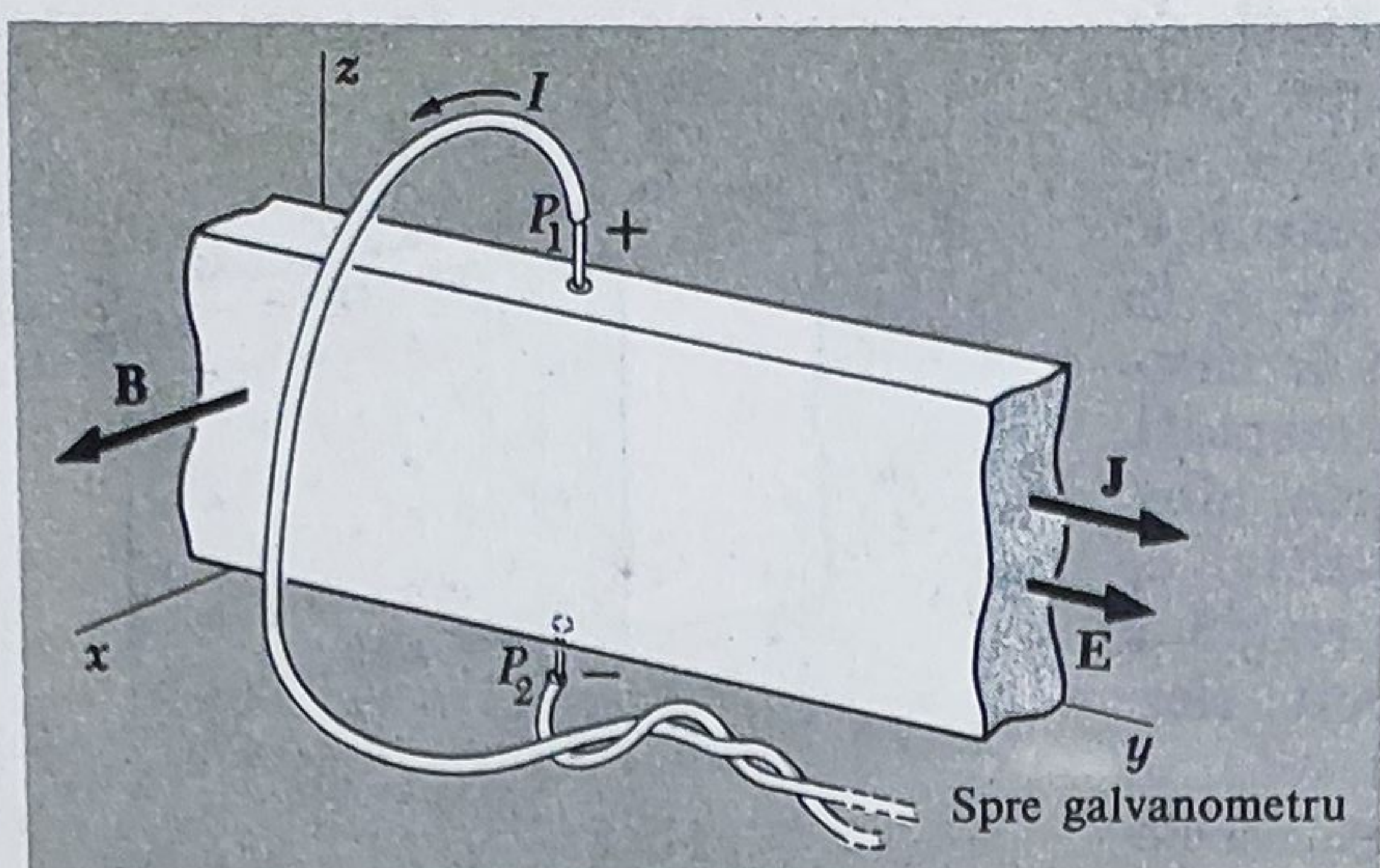


Fig. 6.29. Efectul Hall. Când unui conductor străbătut de curent,  $i$  se aplică un câmp magnetic perpendicular, între punctele aflate la extremitățile barei ia naștere o diferență de potențial; în absența câmpului, aceste puncte se găsesc la același potențial. Aceasta corespunde existenței câmpului  $E_t$  în interiorul barei. Măsurînd tensiunea Hall, se poate determina numărul purtătorilor de sarcină dintr-un  $\text{cm}^3$  și semnul lor.

marginile opuse ale barei; punctele de contact se aleg cu grijă astfel încît să aibă același potențial cînd prin bară trece un curent și inducția  $B$  este zero. Firele se leagă la un galvanometru. După conectarea câmpului magnetic de inducție  $B$ , în circuit apare un curent continuu indicînd faptul că  $P_1$  și  $P_2$  nu mai sînt la același potențial. De fapt, în sistemul descris,  $P_1$  se găsește la potențial pozitiv față de  $P_2$ .

Acest efect a fost descoperit în 1879 de E.H. Hall, care a fost elevul lui Rowland la Universitatea lui John Hopkins. În vremea aceea nimeni nu înțelegea mecanismul conductibilității în metale. Nici electronul nu era cunoscut. Efectul Hall apărea ca un fenomen foarte util. În cercetările actuale asupra conductibilității electrice, mai ales în semiconductori, măsurătorile de efect Hall sînt indispensabile.

Am văzut că câmpul magnetic al unui curent ca și forța ce acționează asupra unui conductor străbătut de curent aflat într-un câmp extern, sînt independente de particularitățile procesului de conductibilitate. Totuși, efectul Hall ne relevă cîte ceva despre natura purtătorilor de sarcină. Observați că dacă curentul în bara din figura 6.28 s-ar fi datorat purtătorilor de sarcină pozitivi ce se mișcă spre dreapta, atunci ar fi luat naștere un câmp transversal  $E_t$  de sens opus. Astfel, *semnul* „diferenței de potențial Hall“ dintre  $P_1$  și  $P_2$  ne spune dacă purtătorii de sarcină sînt pozitivi sau negativi. Cantitativ, mărimea câmpului transversal  $E_t$  este dată de egalitatea

$$qE_t = q\bar{v}B \text{ sau } E_t = \bar{v}B. \quad (63)$$

Pe de altă parte, viteza medie a purtătorului  $\bar{v}$  este legată de densitatea de curent  $J$  prin ecuația

$$J = nq\bar{v}, \quad (64)$$

unde  $n$  — este numărul purtătorilor de sarcină din unitatea de volum, fiecare avînd sarcina  $q$ . Combinînd ecuațiile (63) și (64), îl putem elimina pe  $\bar{v}$ :

$$E_t = \left( \frac{1}{nq} \right) JB. \quad (65)$$

$E_t$ ,  $J$  și  $B$  pot fi măsurați cu ajutorul unei scheme ca cea din figura 6.29.  $E_t$  este chiar diferența de potențial dintre  $P_1$  și  $P_2$  împărțită la înălțimea barei.  $J$  este intensitatea totală a curentului împărțită la aria secțiunii transversale. În acest fel putem obține  $(1/nq)$ . Acest factor este numit „coeficientul Hall“ al substanței. Pentru multe metale coeficientul Hall are apro-



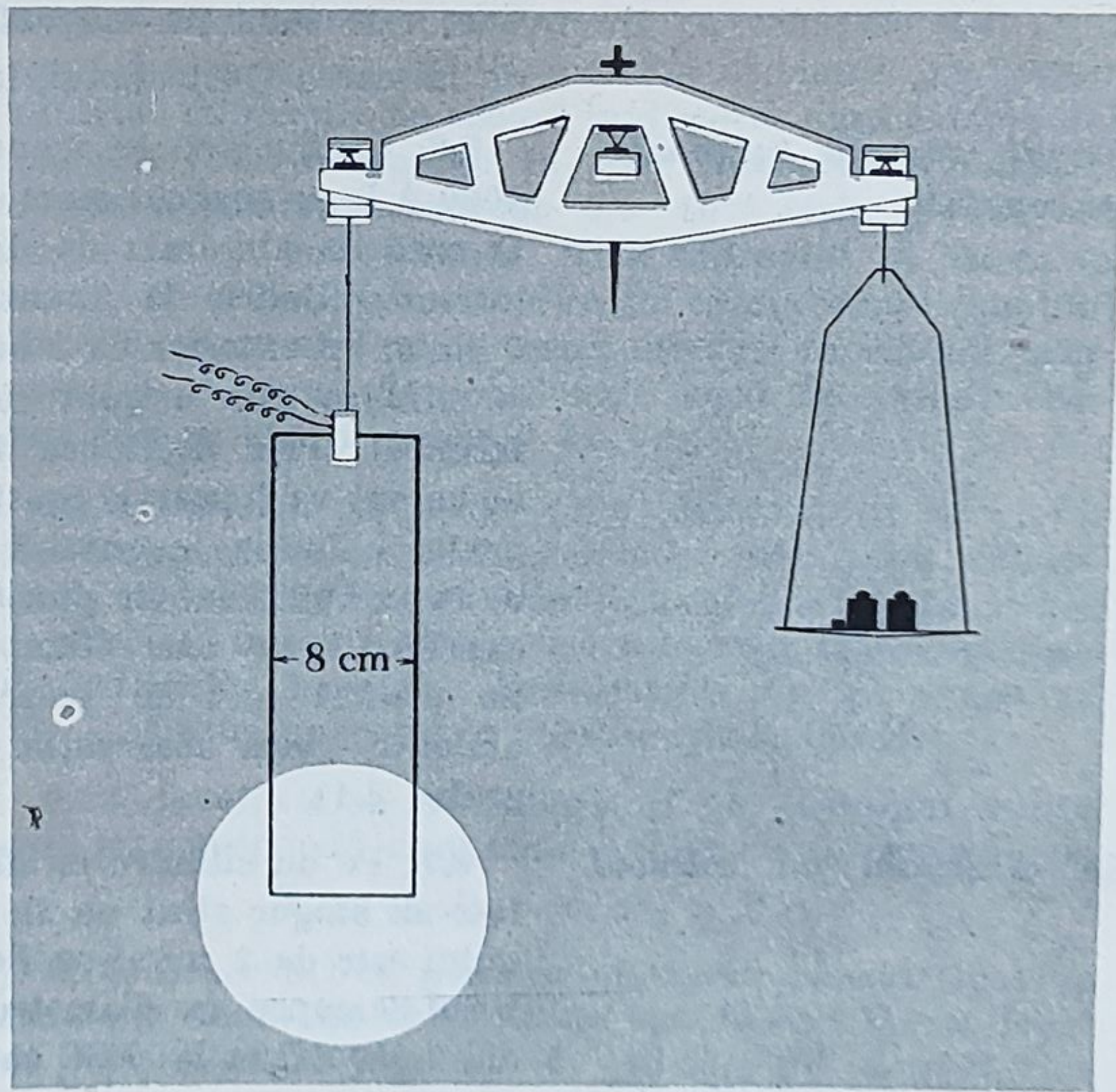
ximativ acea valoare care ar fi fost de așteptat dacă ar exista un electron de conducție per atom și cu semnul efectului care indică că purtătorii de sarcină sînt într-adevăr negativi. Dar unele metale au coeficienți Hall de *semn opus*! Acesta a rămas un paradox pînă cînd a fost explicat de teoria cuantică electronică a metalelor.

#### PROBLEME

*Un mod de a măsura cu precizie cîmpul magnetic.*

**6.1.** În circuitul din figura 5.1,  $b$  trece un curent de 30 A. Conductorii paralelei se găsesc la 5 cm depărtare. Ce forță se exercită pe unitatea de lungime a unuia din conductori?

**6.2.** Figura reprezintă o bobină dreptunghiulară suspendată de brațul unei balanțe analitice. Ea se găsește între polii unui electromagnet, planul bobinei fiind paralel cu fețele polilor. Cîmpul magnetic este uniform în regiunea polilor și neglijabil în vecinătatea marginii superioare a conductorului. Bobina are 15 înfășurări și lățimea de 8 cm. Se echilibrează sistemul și apoi se trece un curent de intensitate 0,500 A prin bobină. Care este inducția magnetică  $B$  în tesla, dacă balanța se reechilibrează punînd pe platanul din dreapta 60,5 g? Această metodă, perfecționată, a fost utilizată de Biroul Național de Standarde pentru măsurători foarte precise ale inducției magnetice.



Problema 6.2.

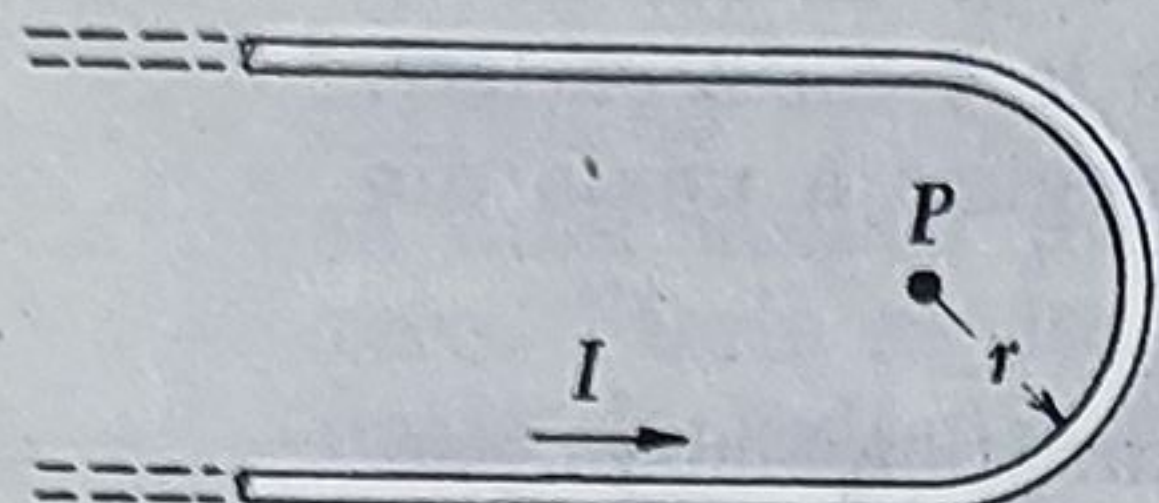


6.3. Considerăm câmpul magnetic al unei bucle circulare parcurse de curent, care în punctele de pe axa buclei este dat de ecuația (41). Calculați integrala în câmp de-alungul axei de la  $-\infty$  la  $\infty$ , verificând formula generală.

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

De ce putem neglija drumul de „întoarcere” ce închide bucla?

6.4. Un conductor lung este curbat în formă de agrafă ca în figură. Găsiți o expresie exactă a inducției magnetice în punctul P aflat în centrul semicercului.



Câmpul magnetic produs de un electron ce se mișcă într-un atom.

Câmpul magnetic în conductori coaxiali.

Să construim un solenoid.

Problema 6.4.

6.5. Un atom de hidrogen este format dintr-un proton și un electron care poate fi considerat (în unele cazuri) că se mișcă pe o orbită circulară în jurul protonului de rază  $a_0 = \hbar^2/me^2 = 0,53 \cdot 10^{-10}$  m, cu viteza  $v = e^2/\hbar$ . Aici  $e$  este sarcina electrică egală cu  $1,6 \cdot 10^{-19}$  C,  $\hbar = 10^{-34}$  J·s este constanta lui Planck raportată la  $2\pi$  și  $m$  este masa electronului. La ce intensitate a curentului corespunde această sarcină aflată în mișcare circulară? Care este inducția magnetică, exprimată în tesla, creată de mișcarea electronului, în apropierea protonului?

6.6. Conductorii ce transportă curenți de intensitate 5000 A la un magnet mare sînt făcuți în modul următor: O bară de aluminiu de diametru 5 cm este îmbrăcată într-un cilindru de aluminiu cu diametrul interior de 7 cm și cel exterior de 9 cm. (Spațiul inelar dintre bară și cilindru este umplut cu ulei fluid în scopul izolării termice). Prin secțiunea fiecărui conductor densitatea de curent va fi practic constantă. Calculați și reprezentați grafic inducția magnetică  $B(T)$  în funcție de distanța de la axă pînă la un punct de pe conductorul exterior, exprimată în cm. (Câmpul magnetic nu trebuie să fie afectat nici de prezența aluminiului, nici de a uleiului — vezi observația din josul paginii de la paragraful 6.1).

6.7. Pe un cilindru cu diametrul de 6 cm se înfășoară într-un singur strat un fir de cupru. Lungimea solenoidului este de 3 cm și pe fiecare centimetru sînt 5 spire. Firul de cupru are diametrul de 0,163 cm și o rezistență de 0,010  $\Omega/m$  la 75°C (ne așteptăm ca bobina să se



încălzească!). Dacă acest solenoid este conectat la un generator de 24 V, care va fi inducția magnetică în solenoid, exprimată în tesla, și puterea disipată (în W)?

R:  $5,20 \cdot 10^{-2} \text{T}$ ; 2000 W.

*Transformare de câmp.*

6.8. În apropierea originii sistemului de axe de coordonate  $x, y, z$  există un câmp electric  $E$  de intensitate  $10^6 \text{ V/m}$ , a cărui direcție face un unghi de  $30^\circ$  cu axa  $x$  și  $60^\circ$  cu axa  $y$ . Sistemul de referință  $F'$  are axele paralele cu acesta, dar se mișcă în sensul pozitiv al axei  $x$  cu o viteză de  $0,6 c$ . Găsiți direcția și intensitatea câmpului electric ce va fi măsurat de un observator aflat în sistemul  $F'$ . Ce câmp magnetic va observa acesta?

*Un conductor ce se mișcă într-un câmp magnetic.*

6.9. Viteza unui curent oceanic într-o regiune în care componenta verticală a câmpului magnetic pământesc este de  $0,35 \cdot 10^{-4} \text{T}$  este de aproximativ  $1 \text{ m/s}$ . Conductivitatea apei de mare în această regiune este de  $4 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ . Presupunând că în afară de termenul datorat mișcării ( $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ) nu există altă componentă orizontală a câmpului  $E$ , găsiți densitatea curentului electric orizontal (în  $\text{A/m}^2$ ). Dacă ați transporta, cu această viteză, o sticlă cu apă de mare prin câmpul pământesc, ar trece un asemenea curent prin ea?

*Transformare de câmp la viteză mică.*

6.10. Pentru viteze mici în comparație cu  $c$ , transformarea câmpului poate fi scrisă într-o formă foarte simplă.

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}; \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E},$$

unde  $\mathbf{v}$  este viteza cu care sistemul de coordonate „cu prim” se mișcă față de sistemul de coordonate „fără prim”. Fie  $\mathbf{v} = \hat{x}\beta c$  corespunzător cazului particular descris de ecuațiile (58) și arătați că ecuațiile de mai sus dau rezultate în concordanță cu ecuațiile (58) cu o aproximație de  $(1 - \beta^2)^{1/2} \approx 1$ . Fie sistemul „cu prim” un avion cu reacție ce zboară în direcția nord a câmpului magnetic, într-o regiune în care intensitatea câmpului magnetic pământesc este de  $0,4 \cdot 10^{-4} \text{ tesla}$  și face un unghi de  $30^\circ$  cu verticala, fiind îndreptat în jos ca în emisfera nordică. Care este direcția componentei câmpului electric, ce ia naștere în urma mișcării în câmpul magnetic, în sistemul de coordonate legat de avion? Care este intensitatea exprimată în  $\text{V/m}$ ?

*Cei doi invarianti ai transformărilor de câmp. Rezultatul obținut ne va folosi în discuțiile asupra undelor electromagnetice de la sfârșitul capitolului 7.*

6.11. Folosind ecuațiile (58), demonstrați că  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  este un invariant la transformările Lorentz. Adică, demonstrați că dacă  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  are o anumită valoare într-un sistem de referință inerțial, are aceeași valoare în toate sistemele de referință inerțiale. Demonstrați de asemenea că  $E^2 - B^2$  este invariant la transformările Lorentz.

6.12. Încercați să vă imaginați un potențial vector care să corespundă unui câmp uniform în direcția lui  $z$ :

$$B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = B_0.$$

6.13. Observați că potențialul vector  $\mathbf{A}$  este legat de inducția magnetică  $\mathbf{B}$  în același mod în care  $\mathbf{B}$  este legat de densitatea de curent  $\mathbf{J}$ . Adică,  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ , iar



$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ . Ce condiție îi corespunde lui  $\mathbf{A}$  dacă integrala de linie din  $\mathbf{B}$ , pe orice contur închis, este  $\mu_0$  înmulțit cu intensitatea curentului din interiorul acestui contur? Să considerăm câmpul magnetic al unei bare de metal cilindrice lungi, străbătute de un curent uniform distribuit pe secțiunea transversală și paralel cu axa. Cunoașteți câmpul unei asemenea distribuții de curent. Schițați distribuția de curent și liniile câmpului magnetic. Folosind, acum, analogia menționată, găsiți un potențial vector și variația lui cu câmpul unui solenoid infinit lung. Este util de remarcat că în acest caz, potențialul vector *nu* este nul în regiunea în care câmpul magnetic *este* zero.

*Problemă pentru discuție.*

**6.14.** Întrucât filamente paralele parcurse de curent se atrag reciproc, putem crede că curentul ce trece prin bara solidă, ca în conductorul interior din problema 6.6, are tendința să se concentreze în apropierea axei barei. Adică, electronii de conducție în loc să se distribuie uniform în interiorul metalului, așa cum se întâmplă de obicei, se strâng în jurul axului și cea mai mare parte a curentului se va găsi aici. Cum credeți că puteți preveni acest lucru? Se întâmplă în general așa? Dacă un asemenea efect există, puteți sugera o experiență care să-l detecteze?

*Forța ce acționează între doi purtători de sarcină ce se mișcă paralel, unul lângă altul.*

**6.15.** Într-un tub catodic, considerăm doi electroni ce se mișcă paralel, unul lângă altul, cu aceeași viteză  $v$ . Distanța dintre ei, măsurată perpendicular pe direcția vitezei lor, este  $r$ . Ce forță acționează asupra unuia din ei, aflat în prezența celuilalt, observată în sistemul laboratorului? Dacă  $v$  ar fi fost foarte mic în comparație cu  $c$ , răspunsul ar fi fost simplu  $e^2/r^2$ . Dar dacă  $v$  nu este mic, trebuie să fiți prudenți.

*a)* Pentru a găsi răspunsul, cel mai simplu se procedează astfel: recurgem la sistemul de referință ce se mișcă împreună cu electronii. În acest sistem, cei doi electroni se află în repaus, distanța dintre ei este tot  $r$  (de ce?) și forța este chiar  $e^2/r^2$ . Folosind, acum, legea de transformare a forței (ec. 5.31), transformăm forța în sistemul de referință al laboratorului. (Fiți atenți cu privire la notarea sistemului „cu prim”; este forța mai mare sau mai mică în sistemul laboratorului decât forța în sistemul electronului?)

*b)* Este posibil să obțineți același răspuns lucrând numai în sistemul laboratorului. În sistemul laboratorului, pentru o poziție instantanee a electronului 1, există și câmpul electric și magnetic produs de electronul 2 (v. fig. 6.26). Calculați forța totală exercitată asupra electronului 1, care se mișcă cu viteza  $v$  prin aceste câmpuri și arătați că obțineți același rezultat ca în (a). Arătați într-o diagramă direcțiile câmpurilor și forțelor.

*c)* Ce puteți spune, în lumina celor prezentate, despre forța dintre doi electroni, ce se mișcă unul lângă altul, în limita  $v \rightarrow c$ ?



## Capitolul 7

# Inducția electromagnetică și ecuațiile lui Maxwell

7.1. Descoperirea lui Faraday	242
7.2. O bară conductoare se deplasează printr-un câmp magnetic uniform	245
7.3. O buclă se deplasează printr-un câmp magnetic neuniform	248
7.4. O buclă staționară cu sursa câmpului în mișcare	256
7.5. O lege generală a inducției	261
7.6. Inductanța mutuală	262
7.7. O teoremă de „reciprocitate“	265
7.8. Autoinducția	267
7.9. Un circuit care conține autoinductanță	268
7.10. Energia înmagazinată în câmpul magnetic	271
7.11. „Ceva lipsește“	273
7.12. Curentul de deplasare	276
7.13. Ecuațiile lui Maxwell	279
Probleme	284



## 7.1. DESCOPERIREA LUI FARADAY

1. Puterea pe care o are electricitatea de tensiune de a produce o stare electrică opusă în vecinătatea ei a fost exprimată prin termenul general de *Inducție* care, deoarece a intrat în limbajul științific, poate de asemenea să fie folosit în mod propriu cu același sens general pentru a exprima puterea pe care o au curenții electrici de a induce orice stare particulară în materia din vecinătatea lor imediată, altfel neutră. Cu acest înțeles intenționez să-l folosesc în lucrarea de față.

2. Anumite efecte ale inducției curenților electrici au fost deja recunoscute și descrise: ca acelea de magnetizare, experiențele lui Ampère de a aduce un disc de cupru lângă o spirală plană, repetarea cu electromagneți a extraordinarelor experiențe ale lui Arago și, poate, câteva altele. Totuși apărea improbabil ca acestea să poată fi toate efectele pe care inducția prin curenți le-ar putea produce; în mod special deoarece, renunțând la fier, aproape toate dintre ele dispar, în timp ce o infinitate de corpuri, care arată fenomene precizate de inducție cu electricitatea de tensiune, încă rămân să fie supuse inducției electricității în mișcare.

3. Mai departe: Dacă frumoasa teorie a lui Ampère era acceptată, sau oricare alta, sau orice fel de rezervă era mental păstrată, încă apărea cu totul extraordinar, că în timp ce orice curent electric era însoțit de o acțiune magnetică de intensitate corespunzătoare la unghi drept față de curent, buni conductori de electricitate, situați în interiorul sferei acestei acțiuni, să nu aibă nici un curent indus în ei, ori alt efect detectabil produs echivalent în forță unui asemenea curent.

4. Aceste considerații, cu consecința lor, speranța de a obține electricitate din magnetismul comun, m-au stimulat în diverse perioade spre a investiga experimental efectele inductive ale curenților electrici. Până la urmă am ajuns la rezultate pozitive, și nu numai s-au împlinit speranțele, dar am obținut o cheie care îmi părea să dezvăluie o explicație completă a fenomenelor magnetice ale lui Arago, și de asemenea a descoperi o nouă stare, care poate probabil să aibă mare influență în unele din cele mai importante efecte ale curenților electrici.

5. Intenționez să descriu aceste rezultate, nu așa cum au fost obținute, dar de asemenea manieră încât să se dea imaginea cea mai concisă a întregului.

Astfel începe relatarea lui Michael Faraday despre descoperirea inducției electromagnetice. Acest pasaj a fost o parte dintr-o lucrare pe care Faraday a prezentat-o în 1831. Relatarea este citată din lucrarea lui Faraday „*Cercetări experimentale în electricitate*”, publicată la Londra în 1839. În lucrare urmează descrierea unui număr de experiențe, prin care Faraday a adus la lumină fiecare trăsătură esențială a producerii efectelor electrice prin acțiune magnetică.

Prin „electricitate de tensiune” Faraday a înțeles sarcini electrostatice, și inducția pe care el o menționează în prima propoziție nu înseamnă nimic mai mult decât am studiat în capitolul 3: Prezența unei sarcini cauzează



## 7.1. DESCOPERIREA LUI FARADAY

1. Puterea pe care o are electricitatea de tensiune de a produce o stare electrică opusă în vecinătatea ei a fost exprimată prin termenul general de *Inducție* care, deoarece a intrat în limbajul științific, poate de asemenea să fie folosit în mod propriu cu același sens general pentru a exprima puterea pe care o au curenții electrici de a induce orice stare particulară în materia din vecinătatea lor imediată, altfel neutră. Cu acest înțeles intenționez să-l folosesc în lucrarea de față.

2. Anumite efecte ale inducției curenților electrici au fost deja recunoscute și descrise: ca acelea de magnetizare, experiențele lui Ampère de a aduce un disc de cupru lângă o spirală plană, repetarea cu electromagneți a extraordinarelor experiențe ale lui Arago și, poate, câteva altele. Totuși apărea improbabil ca acestea să poată fi toate efectele pe care inducția prin curenți le-ar putea produce; în mod special deoarece, renunțând la fier, aproape toate dintre ele dispar, în timp ce o infinitate de corpuri, care arată fenomene precizate de inducție cu electricitatea de tensiune, încă rămân să fie supuse inducției electricității în mișcare.

3. Mai departe: Dacă frumoasa teorie a lui Ampère era acceptată, sau oricare alta, sau orice fel de rezervă era mental păstrată, încă apărea cu totul extraordinar, că în timp ce orice curent electric era însoțit de o acțiune magnetică de intensitate corespunzătoare la unghi drept față de curent, buni conductori de electricitate, situați în interiorul sferei acestei acțiuni, să nu aibă nici un curent indus în ei, ori alt efect detectabil produs echivalent în forță unui asemenea curent.

4. Aceste considerații, cu consecința lor, speranța de a obține electricitate din magnetismul comun, m-au stimulat în diverse perioade spre a investiga experimental efectele inductive ale curenților electrici. Până la urmă am ajuns la rezultate pozitive, și nu numai s-au împlinit speranțele, dar am obținut o cheie care îmi părea să dezvăluie o explicație completă a fenomenelor magnetice ale lui Arago, și de asemenea a descoperi o nouă stare, care poate probabil să aibă mare influență în unele din cele mai importante efecte ale curenților electrici.

5. Intenționez să descriu aceste rezultate, nu așa cum au fost obținute, dar de asemenea manieră încât să se dea imaginea cea mai concisă a întregului.

Astfel începe relatarea lui Michael Faraday despre descoperirea inducției electromagnetice. Acest pasaj a fost o parte dintr-o lucrare pe care Faraday a prezentat-o în 1831. Relatarea este citată din lucrarea lui Faraday „*Cercetări experimentale în electricitate*”, publicată la Londra în 1839. În lucrare urmează descrierea unui număr de experiențe, prin care Faraday a adus la lumină fiecare trăsătură esențială a producerii efectelor electrice prin acțiune magnetică.

Prin „electricitate de tensiune” Faraday a înțeles sarcini electrostatice, și inducția pe care el o menționează în prima propoziție nu înseamnă nimic mai mult decât am studiat în capitolul 3: Prezența unei sarcini cauzează



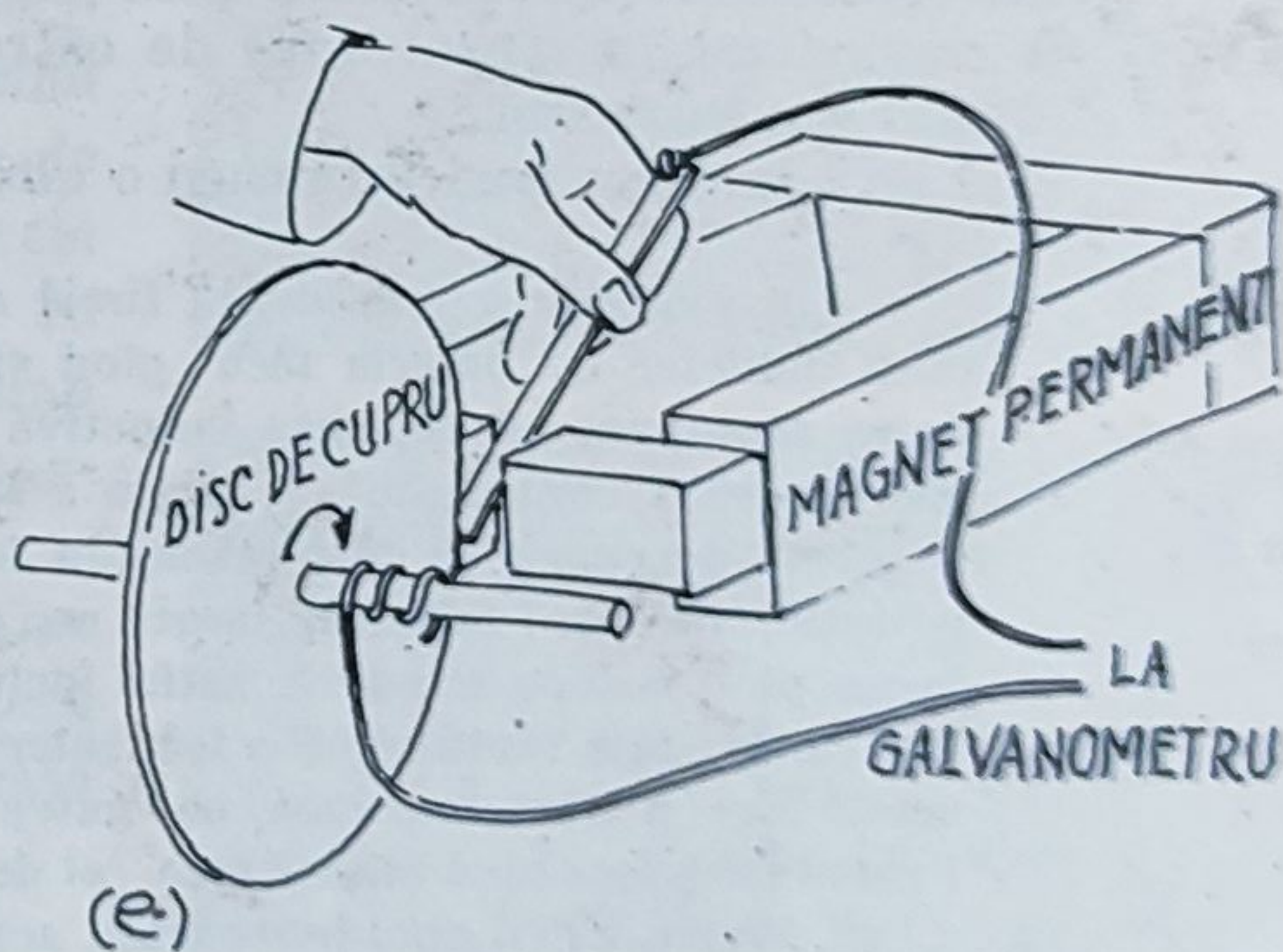
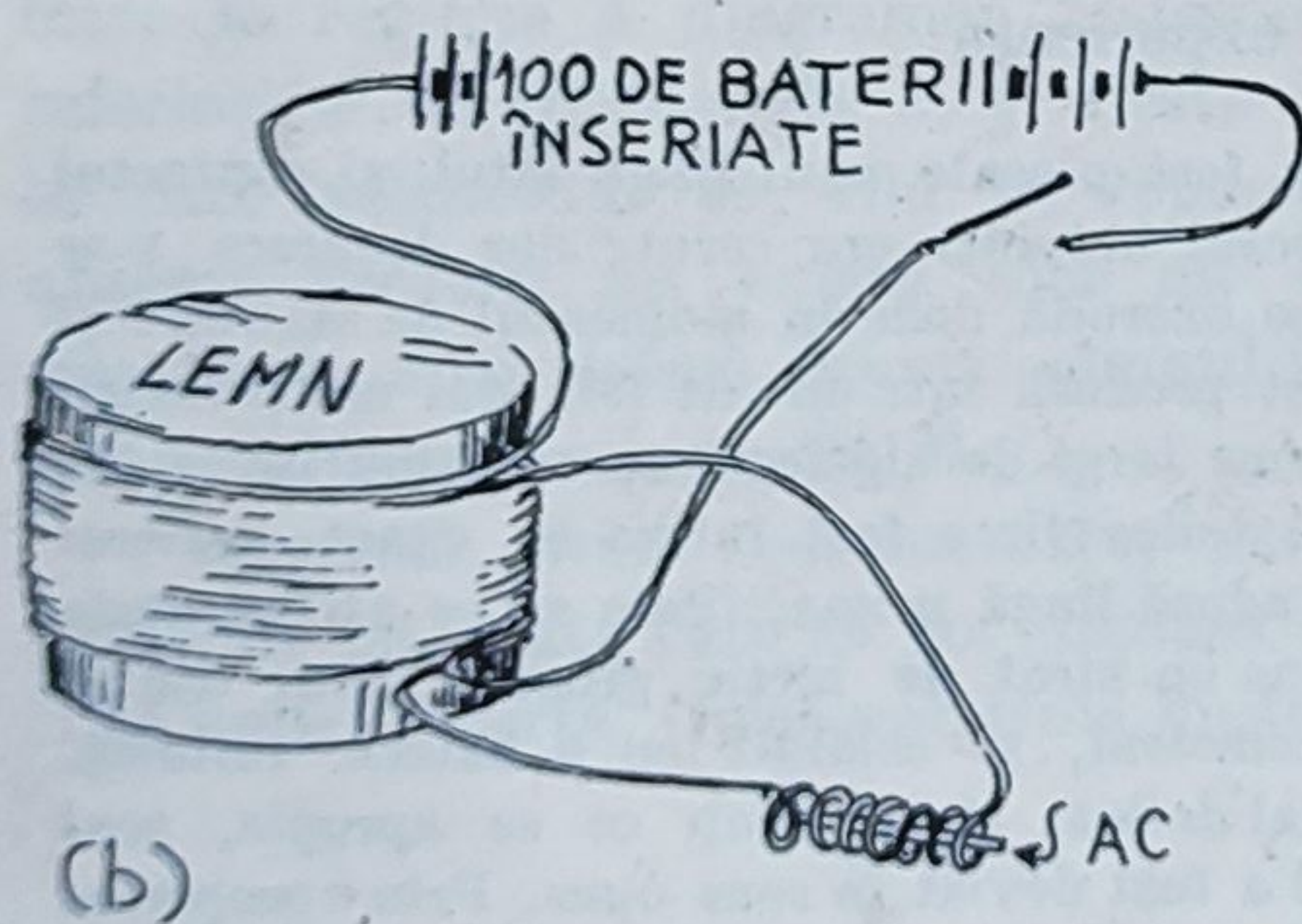
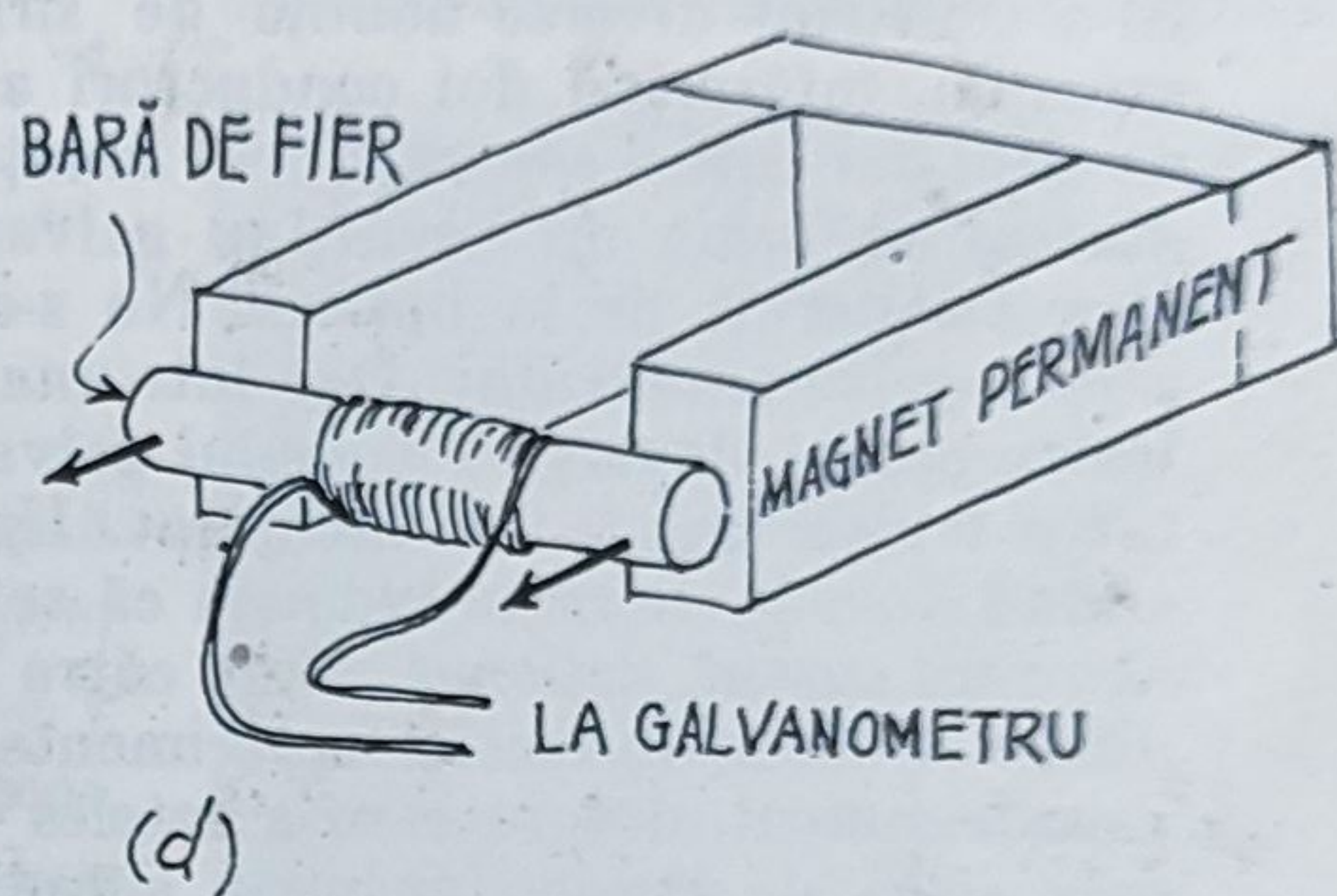
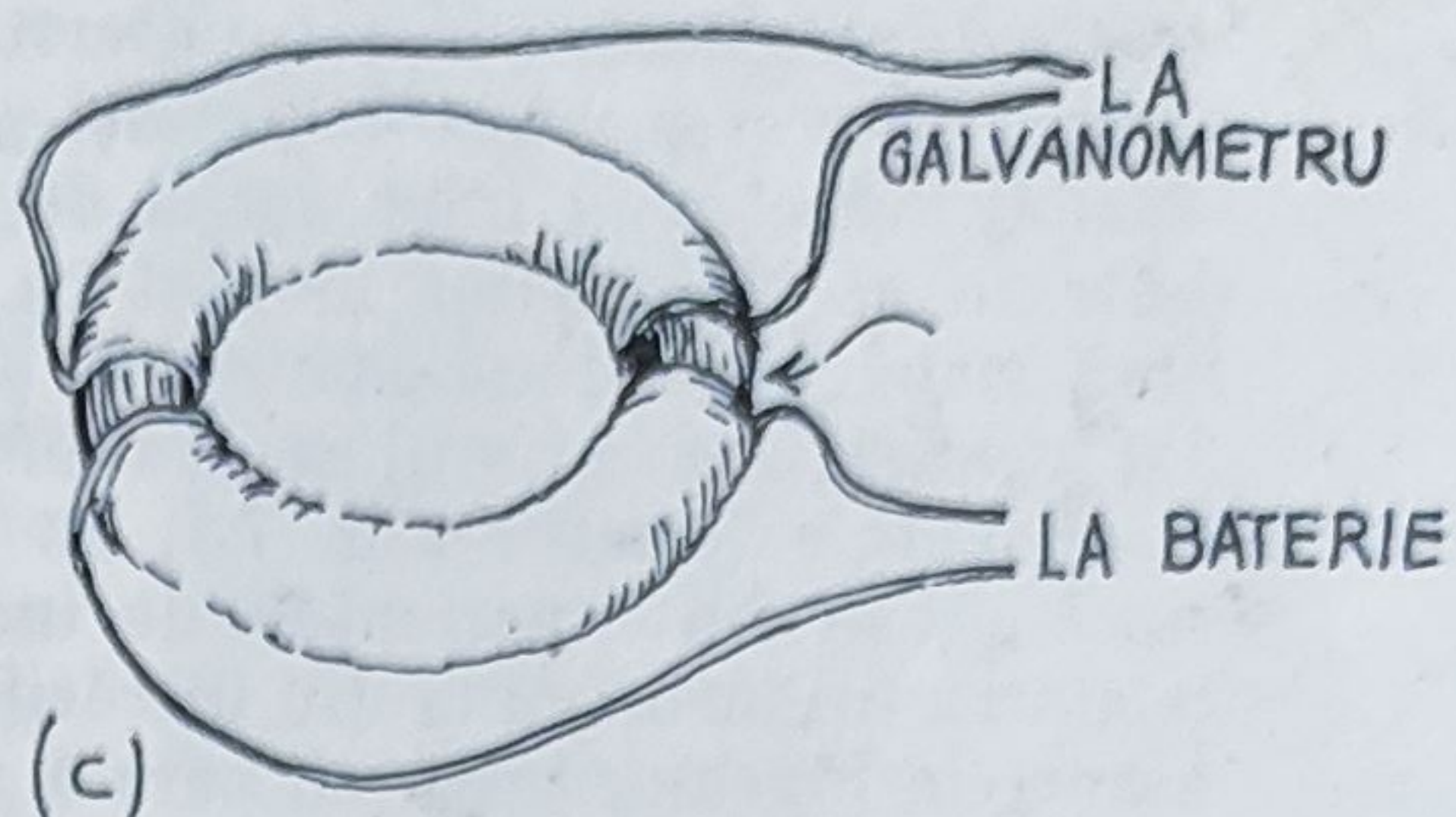
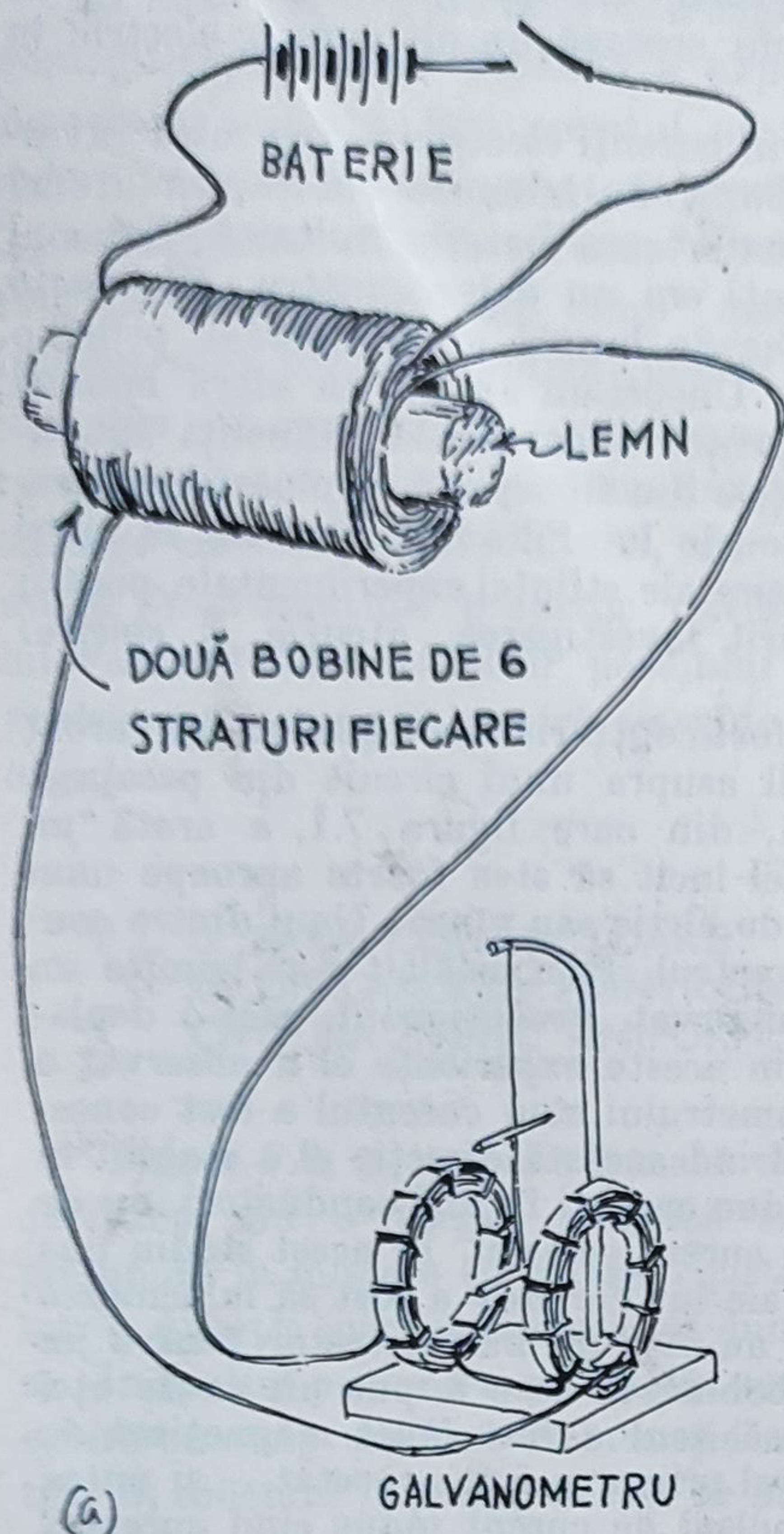


Fig. 7.1. (a—e). Interpretarea de către autor a citorva dintre experiențele lui Faraday descrise în lucrarea sa „Cercetări experimentale în electricitate”.



o redistribuire a sarcinilor pe conductorii din preajmă. Întrebarea lui Faraday era, de ce un curent electric nu creează un alt curent electric în conductorii din preajmă?

Producerea de cîmpuri magnetice prin curenți electrici a fost mult investigată după descoperirea lui Oersted. Sursa de laborator obișnuită atunci pentru generarea acestor curenți „galvanici” era bateria voltaică. Cel mai sensibil detector al unor astfel de curenți era un galvanometru. El consta dintr-un ac magnetizat montat ca un ac de busolă ori suspendat printr-o fibră slabă între două bobine de sîrmă. Uneori un alt ac, în afara bobinei dar legat rigid de primul ac, era folosit pentru a compensa influența cîmpului magnetic terestru (fig. 7.1, *a*). Schițele din figura 7.1, *b* pînă la *e* reprezintă cîteva din experiențele de inducție ale lui Faraday. Trebuie să citiți relatarea lui însuși, una din lucrările clasice ale științei experimentale, pentru a aprecia ingeniozitatea cu care a urmărit investigarea, atenția și spiritul deschis cu care a examinat faptele.

În primele sale cercetări Faraday a fost contrariat de a găsi că un curent staționar nu are nici un efect măsurabil asupra unui circuit din preajmă. El a construit diverse bobine de sîrmă, din care figura 7.1, *a* arată un exemplu, înfășurînd doi conductori astfel încît să stea foarte aproape unul de altul dar totuși separați prin izolația de hîrtie sau pînză. Unul dintre conductori ar forma un circuit cu galvanometrul. Prin celălalt s-ar trimite un curent puternic de la baterie. Nu s-a observat, decepționant, nici o deplasare a galvanometrului. Dar într-una din aceste experiențe el a observat o foarte ușoară deplasare a acului galvanometrului cînd curentul a fost conectat și o alta cînd a fost întrerupt. Urmărind această direcție el a stabilit în curînd dincolo de orice îndoială că se induce curenți în alți conductori, nu de către un curent *staționar*, ci de către un curent *variabil*. În acest stadiu una dintre strălucitele tactici experimentale ale lui Faraday a fost să înlocuiască galvanometrul, despre care a înțeles că nu este un bun detector pentru un puls scurt de curent, printr-o simplă bobină în care a pus un ac de oțel nemagnetizat (fig. 7.1, *b*). El a găsit că acul a fost lăsat magnetizat de către pulsul de curent indus cînd curentul primar a fost conectat — și putea fi magnetizat în sensul opus de către pulsul de curent indus cînd curentul primar era întrerupt.

Iată în descrierea lui însuși o altă experiență:

„În experiența precedentă firele au fost plasate unul lîngă altul, și contactul celui inductor cu bateria făcut cînd efectul inductiv era cerut; dar deoarece s-ar putea presupune că acțiunea inductivă se exercită doar în momentul de stabilire și întrerupere a contactului, inducția a fost produsă într-un alt fel. Mai mulți metrii de sîrmă de cupru au fost întinși în forme largi de zig-zag, reprezentînd litera *W*, pe suprafața unei scînduri largi; un al doilea fir a fost întins în exact aceleași forme pe o a doua scîndură, astfel încît adusă lîngă prima, firele să se atingă peste tot, cu excepția faptului că a fost interpus un strat de hîrtie groasă. Unul dintre aceste fire a fost conectat cu galvanometrul, și celălalt cu o baterie voltaică. Primul fir a fost apoi mișcat spre cel de-al doilea, și în timp ce se apropia, acul a fost deviat. Fiind apoi îndepărtat, acul a fost deviat în sens opus. Prin apropierea și îndepărtarea firelor, simultană cu vibrațiile acului, ultimele devin repede foarte largi; dar cînd firele au încetat să se miște unul față de celălalt, acul galvanometrului revine îndată la poziția sa uzuală.

Cînd firele se apropiau, curentul indus era în direcția *contrară* curentului inductor. Cînd firele se depărtau, curentul era în *aceeași* direcție cu curentul inductor. Cînd firele rămîneau staționare, nu apărea nici un curent indus.



o redistribuire a sarcinilor pe conductorii din preajmă. Întrebarea lui Faraday era, de ce un curent electric nu creează un alt curent electric în conductorii din preajmă?

Producerea de cîmpuri magnetice prin curenți electrici a fost mult investigată după descoperirea lui Oersted. Sursa de laborator obișnuită atunci pentru generarea acestor curenți „galvanici” era bateria voltaică. Cel mai sensibil detector al unor astfel de curenți era un galvanometru. El consta dintr-un ac magnetizat montat ca un ac de busolă ori suspendat printr-o fibră slabă între două bobine de sîrmă. Uneori un alt ac, în afara bobinei dar legat rigid de primul ac, era folosit pentru a compensa influența cîmpului magnetic terestru (fig. 7.1, *a*). Schițele din figura 7.1, *b* pînă la *e* reprezintă cîteva din experiențele de inducție ale lui Faraday. Trebuie să citiți relatarea lui însuși, una din lucrările clasice ale științei experimentale, pentru a aprecia ingeniozitatea cu care a urmărit investigarea, atenția și spiritul deschis cu care a examinat faptele.

În primele sale cercetări Faraday a fost contrariat de a găsi că un curent staționar nu are nici un efect măsurabil asupra unui circuit din preajmă. El a construit diverse bobine de sîrmă, din care figura 7.1, *a* arată un exemplu, înfășurînd doi conductori astfel încît să stea foarte aproape unul de altul dar totuși separați prin izolația de hîrtie sau pînză. Unul dintre conductori ar forma un circuit cu galvanometrul. Prin celălalt s-ar trimite un curent puternic de la baterie. Nu s-a observat, decepționant, nici o deplasare a galvanometrului. Dar într-una din aceste experiențe el a observat o foarte ușoară deplasare a acului galvanometrului cînd curentul a fost conectat și o alta cînd a fost întrerupt. Urmărind această direcție el a stabilit în curînd dincolo de orice îndoială că se induc curenți în alți conductori, nu de către un curent *staționar*, ci de către un curent *variabil*. În acest stadiu una dintre strălucitele tactici experimentale ale lui Faraday a fost să înlocuiască galvanometrul, despre care a înțeles că nu este un bun detector pentru un puls scurt de curent, printr-o simplă bobină în care a pus un ac de oțel nemagnetizat (fig. 7.1, *b*). El a găsit că acul a fost lăsat magnetizat de către pulsul de curent indus cînd curentul primar a fost conectat — și putea fi magnetizat în sensul opus de către pulsul de curent indus cînd curentul primar era întrerupt.

Iată în descrierea lui însuși o altă experiență:

„În experiența precedentă firele au fost plasate unul lîngă altul, și contactul celui inductor cu bateria făcut cînd efectul inductiv era cerut; dar deoarece s-ar putea presupune că acțiunea inductivă se exercită doar în momentul de stabilire și întrerupere a contactului, inducția a fost produsă într-un alt fel. Mai mulți metri de sîrmă de cupru au fost întinși în forme largi de zig-zag, reprezentînd litera *W*, pe suprafața unei scînduri largi; un al doilea fir a fost întins în exact aceleași forme pe o a doua scîndură, astfel încît adusă lîngă prima, firele să se atingă peste tot, cu excepția faptului că a fost interpus un strat de hîrtie groasă. Unul dintre aceste fire a fost conectat cu galvanometrul, și celălalt cu o baterie voltaică. Primul fir a fost apoi mișcat spre cel de-al doilea, și în timp ce se apropia, acul a fost deviat. Fiind apoi îndepărtat, acul a fost deviat în sens opus. Prin apropierea și îndepărtarea firelor, simultană cu vibrațiile acului, ultimele devin repede foarte largi; dar cînd firele au încetat să se miște unul față de celălalt, acul galvanometrului revine îndată la poziția sa uzuală.

Cînd firele se apropiau, curentul indus era în direcția *contrară* curentului inductor. Cînd firele se depărtau, curentul era în *aceeași* direcție cu curentul inductor. Cînd firele rămîneau staționare, nu apărea nici un curent indus.



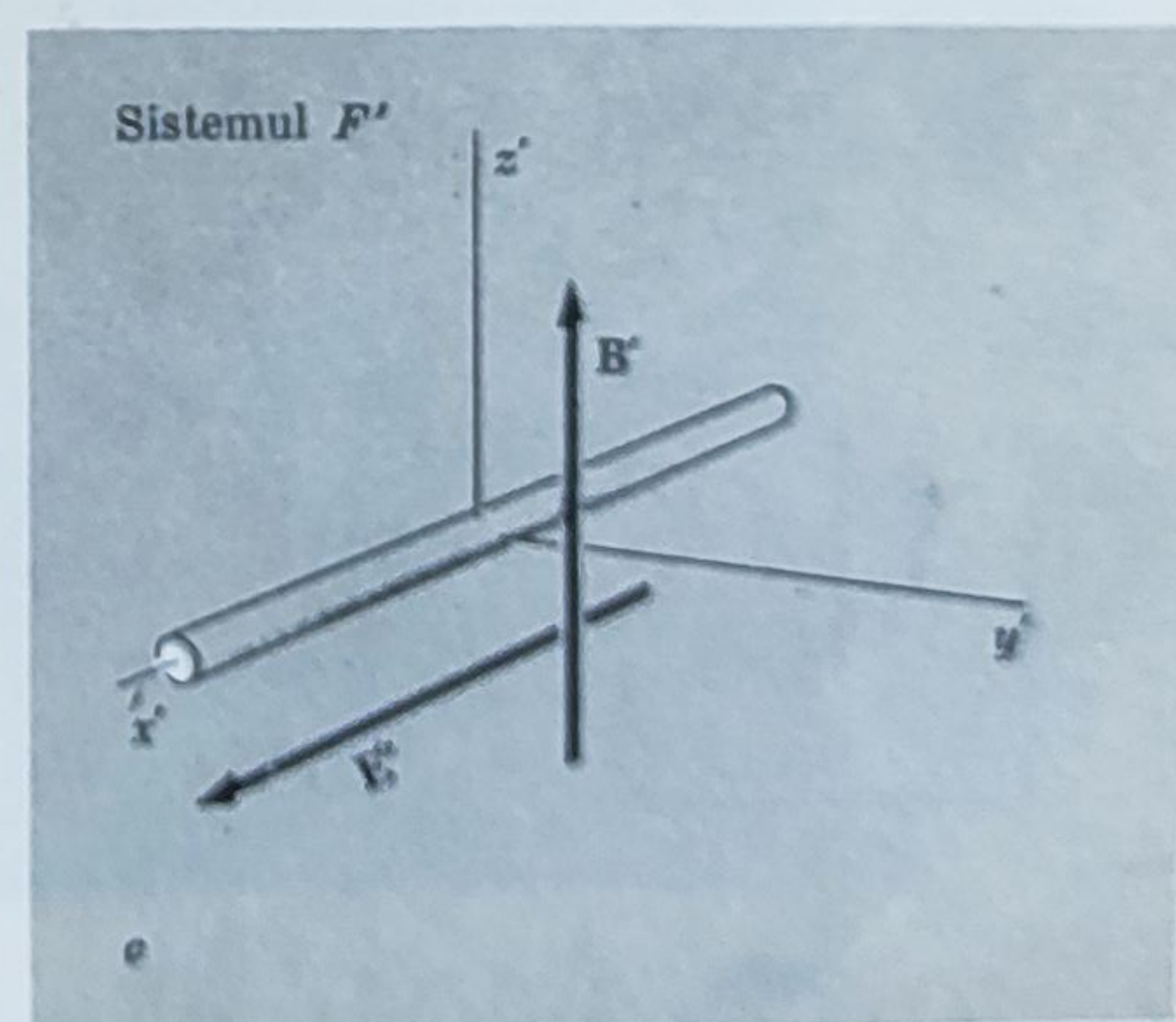
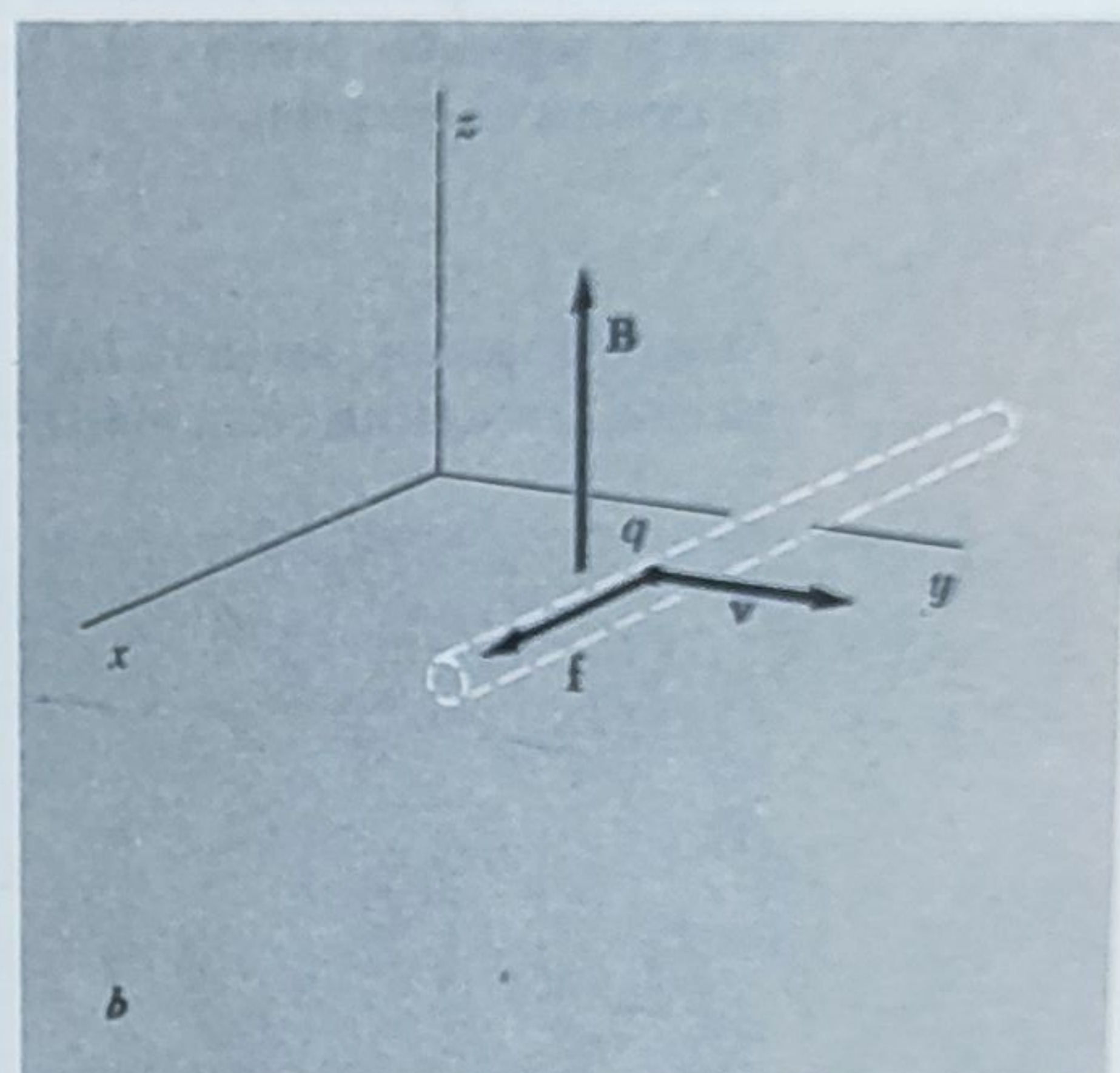
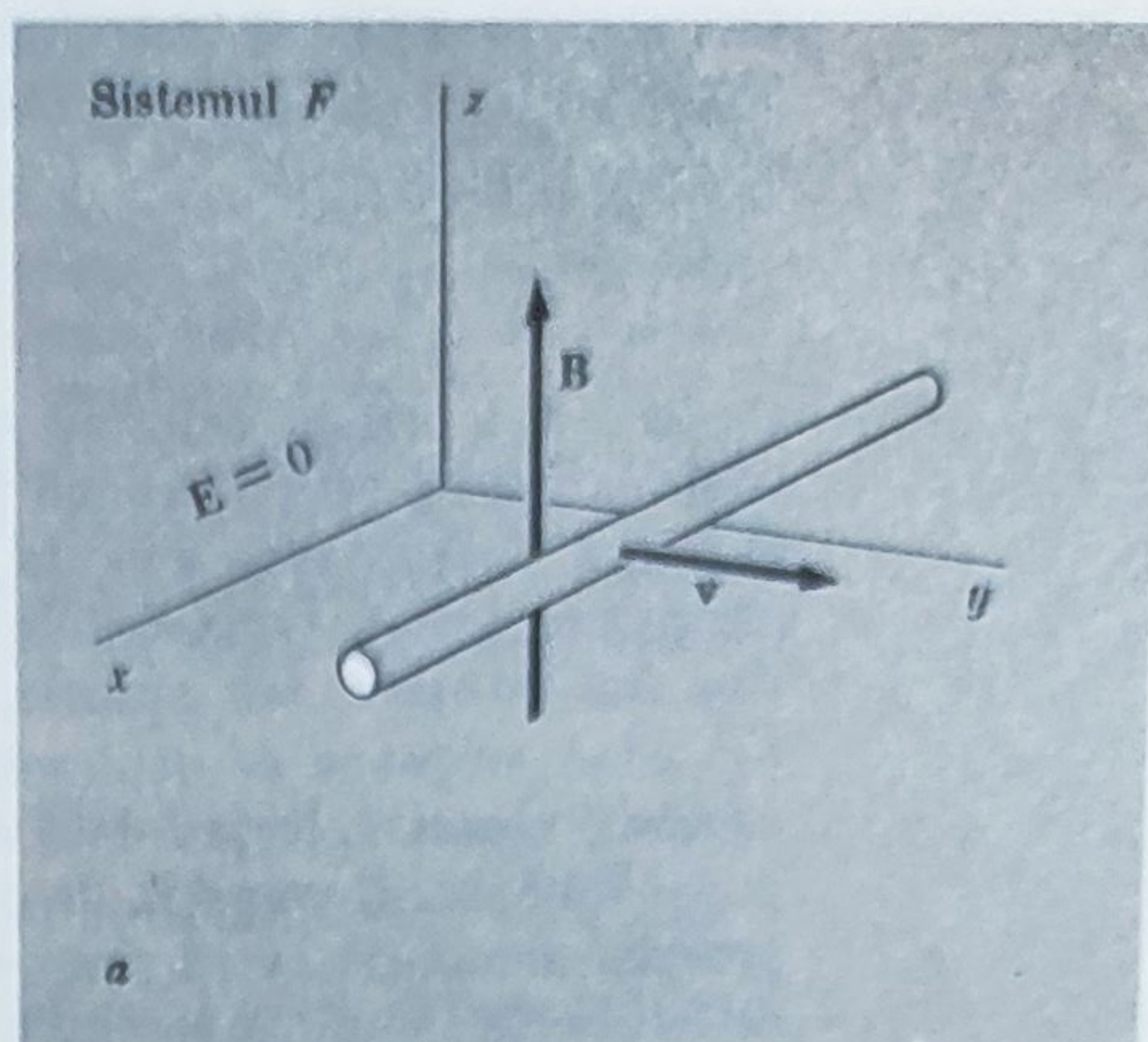
În acest capitol studiem interacția electromagnetică pe care Faraday a explorat-o în acele experiențe. Din punctul nostru de vedere prezent, inducția poate fi privită ca o consecință naturală a forței asupra unei sarcini în mișcare într-un câmp magnetic. Într-un sens limitat, putem obține legea inducției din ceea ce deja cunoaștem. Urmărind acest curs ne îndepărtăm din nou de ordinea istorică a dezvoltării, dar facem astfel (împrumutând propriile cuvinte ale lui Faraday de la sfârșitul pasajului citat) *pentru a da cea mai concisă imagine a întregului.*

## 7.2. O BARĂ CONDUCTOARE SE DEPLASEAZĂ PRINTR-UN CÂMP MAGNETIC UNIFORM

Figura 7.2, *a* arată o bucată dreaptă de sîrmă, sau o vergea metalică subțire, presupusă în mișcare cu viteza constantă  $v$  într-o direcție perpendiculară pe lungimea sa. În spațiul prin care se mișcă vergeaua există un câmp uniform de inducție magnetică  $B$ , constant în timp. Acesta ar putea fi obținut cu un solenoid mare cuprinzînd întreaga regiune a diagramei. Sistemul de referință  $F$  de coordonate  $x, y, z$  este acela în care solenoidul se află în repaus. În absența vergelei nu există nici un câmp electric în acel sistem, numai câmpul magnetic uniform de inducție  $B$ .

Vergeaua, fiind conductoare, conține particule încărcate care se vor deplasa dacă li se aplică o forță. Orice particulă încărcată

Fig. 7.2. (a). O bară conductoare se mișcă printr-un câmp magnetic.  
(b) Orice sarcină  $q$  care se mișcă împreună cu bara este supusă forței  $qv \times B$ .  
(c) Sistemul de referință  $F'$  se mișcă cu bara; în acest sistem există un câmp electric de intensitate  $E'$ .





care este purtată cu vergeaua, ca particula de sarcină  $q$  din figura , b, 7.2 se mișcă în mod necesar prin câmpul magnetic de inducție  $B$  și de aceea este acționată de o forță

$$F = qv \times B. \quad (1)$$

Cu  $B$  și  $v$  orientați cum se arată în figura 7.2, forța este în direcția  $x$  pozitivă dacă  $q$  este o sarcină pozitivă, și în direcția opusă pentru electronii încărcăți negativ care sînt de fapt purtătorii de sarcină mobilă în cei mai mulți conductori. Consecințele vor fi aceleași, indiferent dacă sarcinile negative sau pozitive, sau ambele, sînt mobile.

Cînd vergeaua se deplasează cu viteză constantă și procesele au ajuns la o stare staționară, forța  $f$  dată de ecuația 1 trebuie să fie echilibrată, în fiecare punct dinăuntru vergelei, de o forță egală și de sens contrar. Aceasta poate proveni numai de la un câmp electric în vergea. Câmpul electric se dezvoltă astfel: Forța  $f$  împinge sarcinile negative către o extremitate a vergelei, lăsînd cealaltă extremitate încărcată pozitiv. Aceasta se continuă pînă cînd aceste sarcini separate produc ele însele un câmp electric  $E$  astfel încît, oriunde în interiorul vergelei,

$$qE = -f. \quad (2)$$

Atunci mișcarea sarcinii față de vergea încetează. Această distribuție de sarcină creează un câmp electric în exteriorul vergelei, ca și în interior. Câmpul

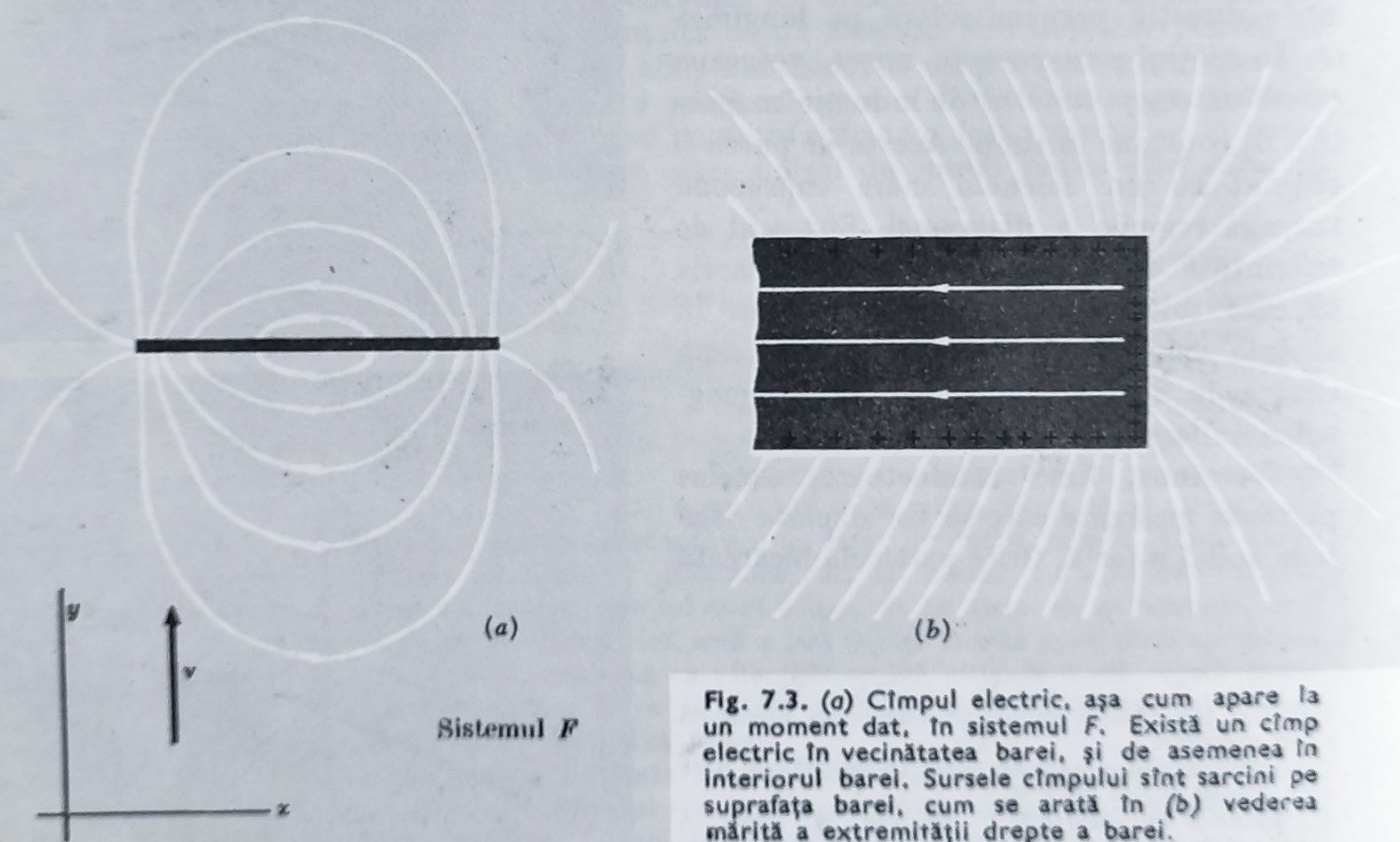


Fig. 7.3. (a) Câmpul electric, așa cum apare la un moment dat, în sistemul  $F$ . Există un câmp electric în vecinătatea barei, și de asemenea în interiorul barei. Sursele câmpului sînt sarcini pe suprafața barei, cum se arată în (b) vederea mărită a extremității drepte a barei.



care este purtată cu vergeaua, ca particula de sarcină  $q$  din figura , b,7.2 se mișcă în mod necesar prin câmpul magnetic de inducție  $B$  și de aceea este acționată de o forță

$$F = qv \times B. \quad (1)$$

Cu  $B$  și  $v$  orientați cum se arată în figura 7.2, forța este în direcția  $x$  pozitivă dacă  $q$  este o sarcină pozitivă, și în direcția opusă pentru electronii încărcăți negativ care sînt de fapt purtătorii de sarcină mobilă în cei mai mulți conductori. Consecințele vor fi aceleași, indiferent dacă sarcinile negative sau pozitive, sau ambele, sînt mobile.

Cînd vergeaua se deplasează cu viteză constantă și procesele au ajuns la o stare staționară, forța  $f$  dată de ecuația 1 trebuie să fie echilibrată, în fiecare punct dinăuntru vergelei, de o forță egală și de sens contrar. Aceasta poate proveni numai de la un câmp electric în vergea. Câmpul electric se dezvoltă astfel: Forța  $f$  împinge sarcinile negative către o extremitate a vergelei, lăsînd cealaltă extremitate încărcată pozitiv. Aceasta se continuă pînă cînd aceste sarcini separate produc ele însele un câmp electric  $E$  astfel încît, oriunde în interiorul vergelei,

$$qE = -f. \quad (2)$$

Atunci mișcarea sarcinii față de vergea încetează. Această distribuție de sarcină creează un câmp electric în exteriorul vergelei, ca și în interior. Câmpul

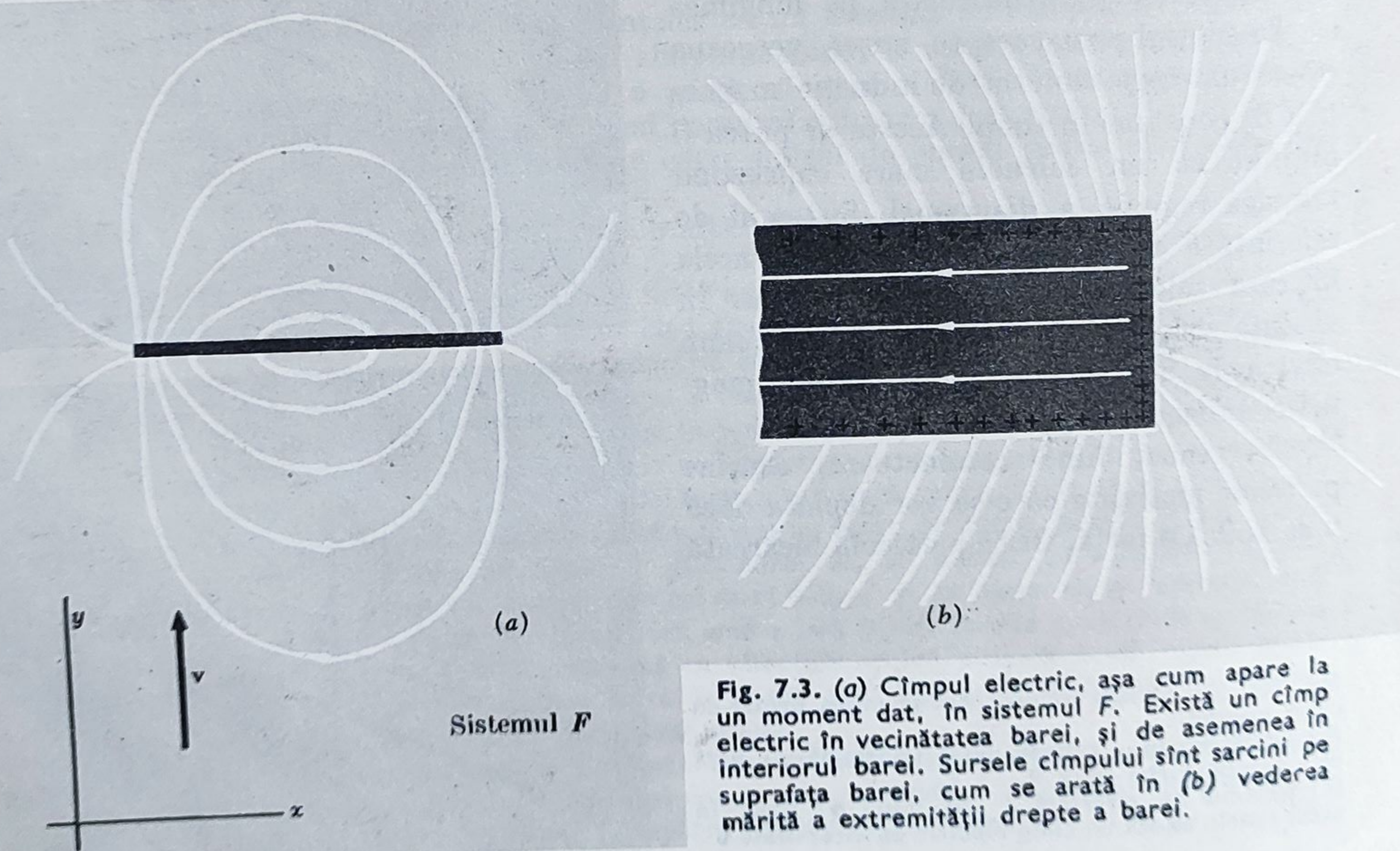


Fig. 7.3. (a) Câmpul electric, așa cum apare la un moment dat, în sistemul  $F$ . Există un câmp electric în vecinătatea barei, și de asemenea în interiorul barei. Sursele câmpului sînt sarcini pe suprafața barei, cum se arată în (b) vederea mărită a extremității drepte a barei.

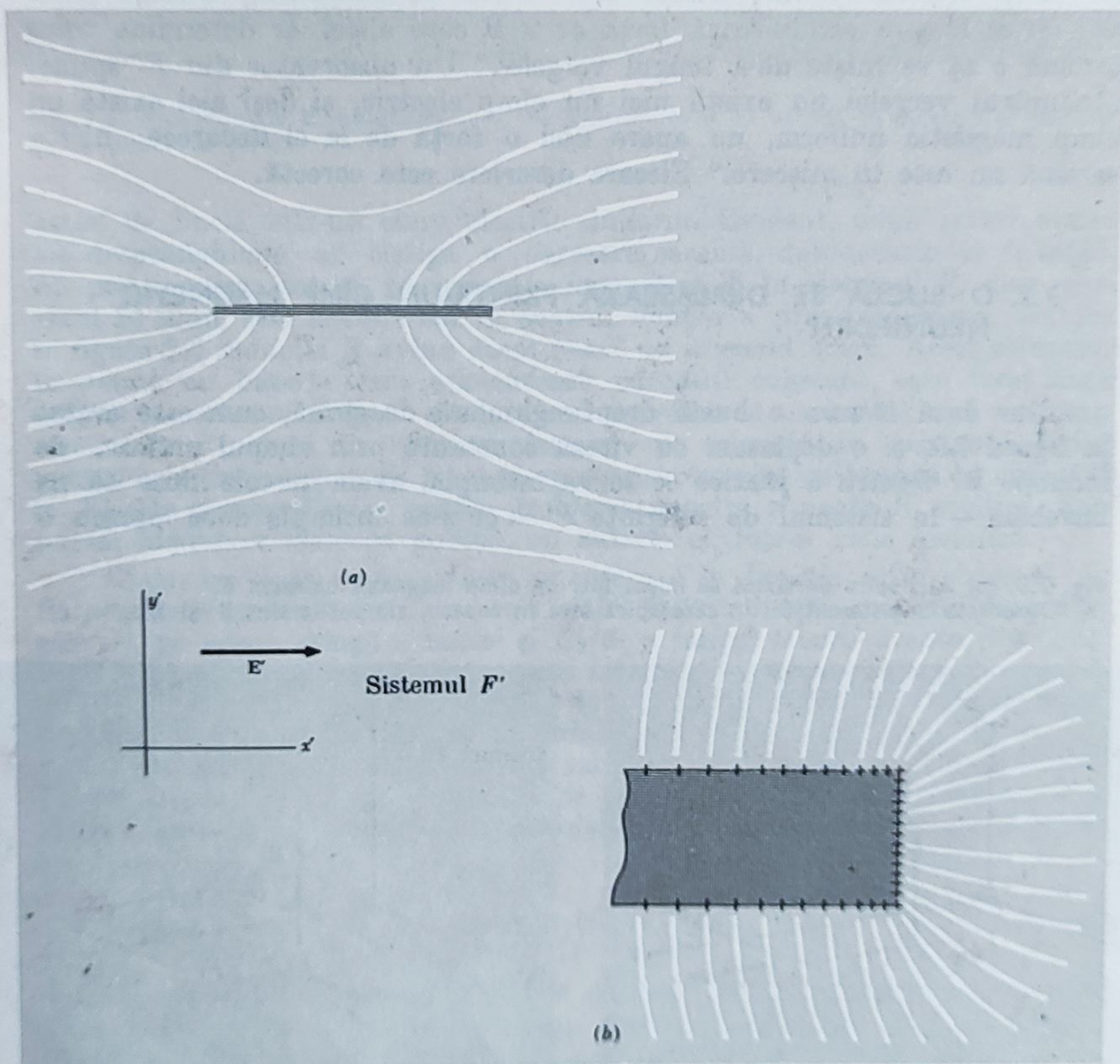


în afară arată oarecum ca acela al sarcinilor pozitivă și negativă separate cu diferența că sarcinile nu sînt concentrate în întregime la extremitățile vergelei dar sînt distribuite de-a lungul ei. Cîmpul exterior este schițat în figura 7.3, *a*. Figura 7.3, *b* este o vedere mărită a capătului încărcat pozitiv al vergelei, arătînd distribuția de sarcină pe suprafață și cîteva linii de cîmp atît înafară cît și înăuntrul conductorului. Acesta este modul în care se prezintă lucrurile, la orice moment de timp, în sistemul  $F$ .

Să observăm acest sistem dintr-un referențial  $F'$  care se deplasează cu vergeaua. Neglijînd pentru moment vergeaua, vedem în acest sistem de referință  $F'$ , sugerat în figura 7.2, *c*, un cîmp magnetic de inducție  $B'$  (nu mult diferit de  $B$  dacă  $v$  este mic) împreună cu un cîmp electric uniform, dat de ecuația 6.62

$$\mathbf{E}' = -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}'. \quad (3)$$

Fig. 7.4. (a) Cîmpul electric în sistemul  $F'$  în care bara este în repaus. Cîmpul este o superpoziție a unui cîmp general de intensitate  $E'$ , uniform în întreg spațiul și cîmpul datorit distribuției sarcinii superficiale. Rezultatul este cîmpul electric nul în interiorul barei, arătat în detaliu mărit în (b). A se compara cu fig. 7.3.





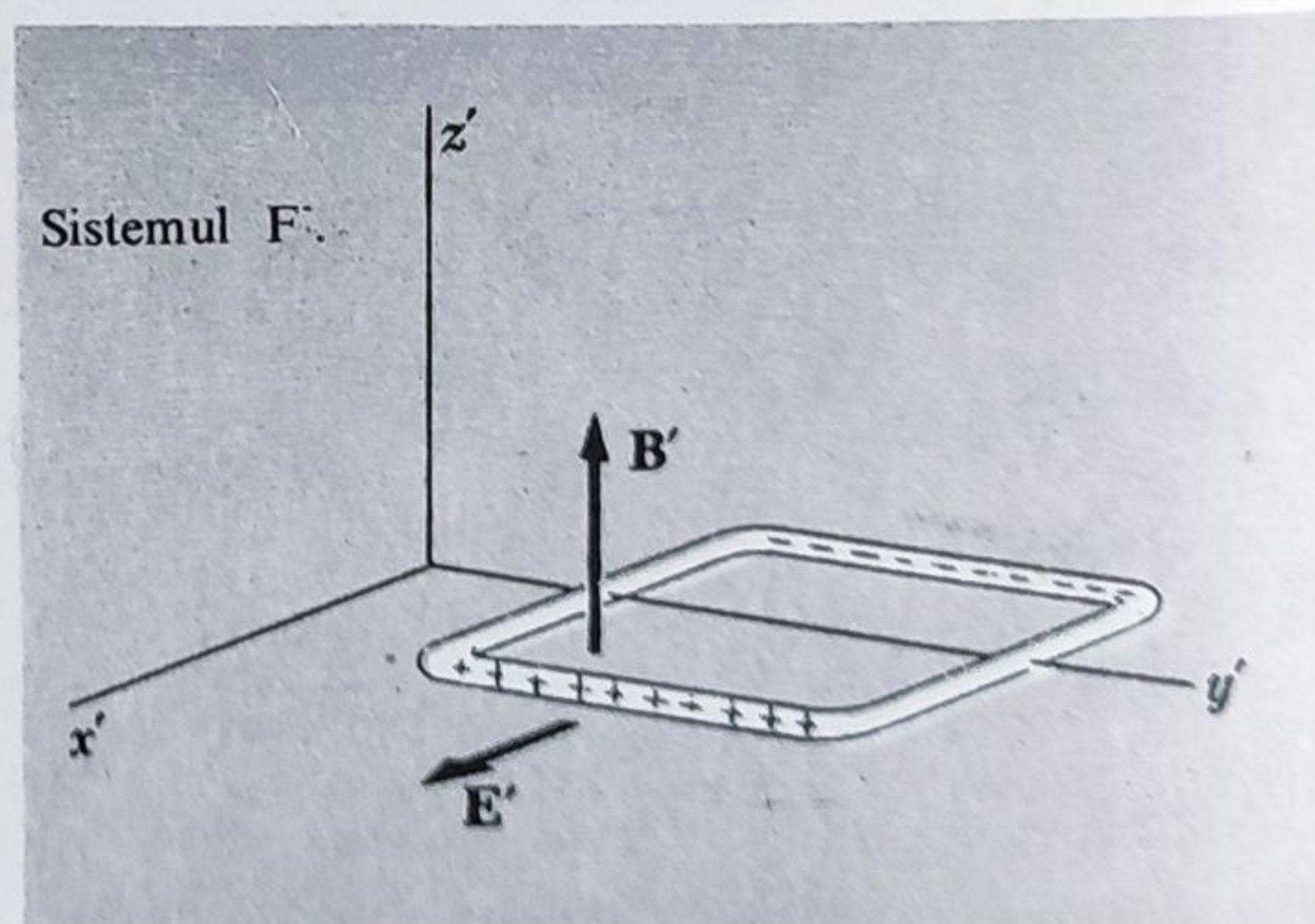
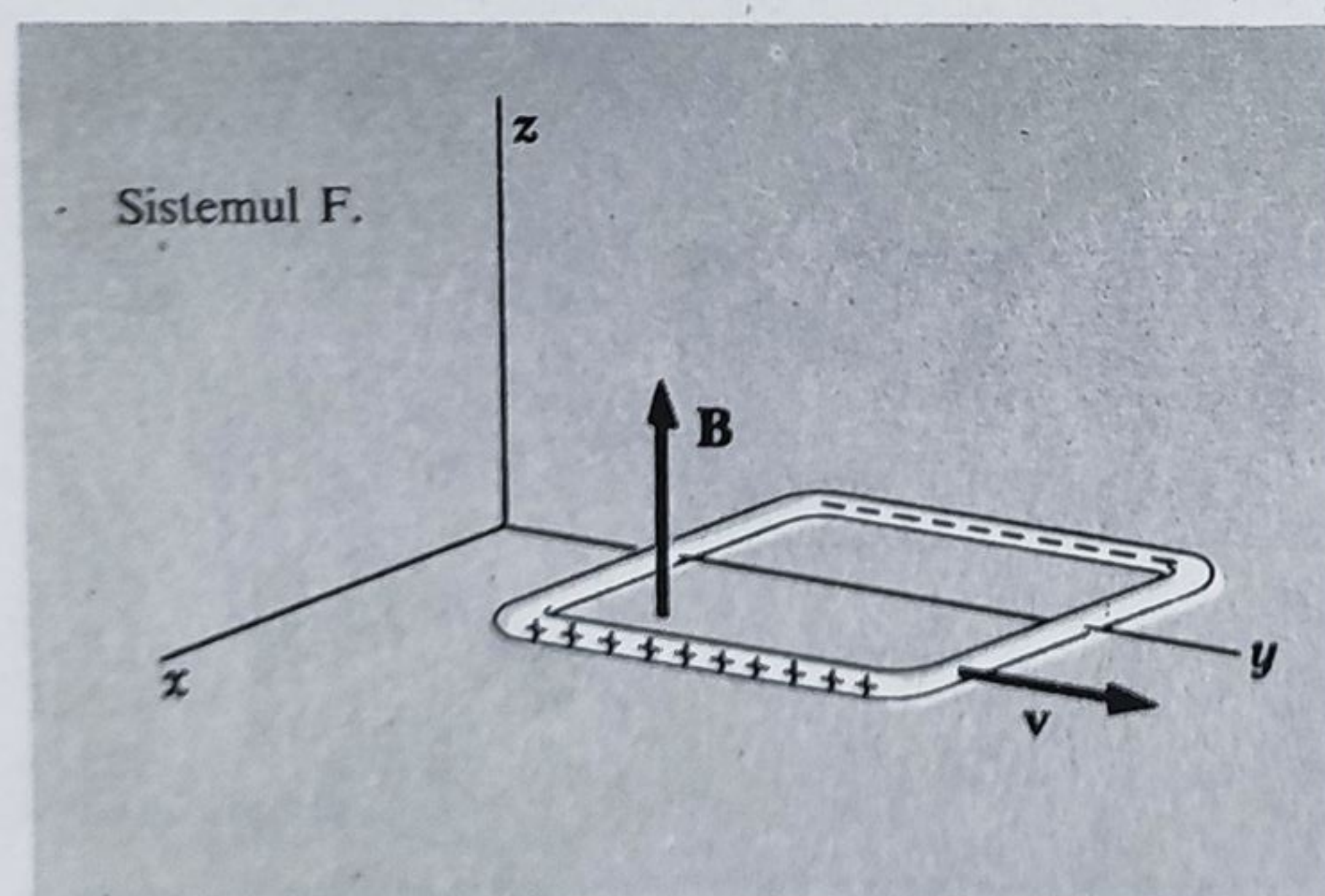
Cînd adăugăm vergeaua la acest sistem, tot ceea ce facem este punerea unei vergele conductoare staționare într-un cîmp electric uniform. Va apare o redistribuire a sarcinii pe suprafața vergelei astfel încît să se anuleze cîmpul electric interior, ca în cazul cutiei metalice din figura 3.6, sau al oricărui alt conductor într-un cîmp electric. Prezența cîmpului de inducție magnetică  $B'$  nu are nici o influență asupra acestei distribuții de sarcină statice. Figura 7.4, *a* arată cîteva linii de cîmp electric în sistemul  $F'$ , și în vederea mărită din figura 7.4, *b* a extremității vergelei observăm că în *interiorul* vergelei cîmpul electric este zero.

Cu excepția contracției Lorentz, care este de ordinul al doilea în  $v/c$ , distribuția de sarcină văzută la un moment dat în sistemul  $F$ , figura 7.3, *b*, este identică cu aceea văzută în  $F'$ . Cîmpurile electrice diferă deoarece cîmpul din figura 7.3 este acela al distribuției de sarcină singure, în timp ce cîmpul electric pe care îl vedem în figura 7.4 este cîmpul distribuției de sarcină superficială *plus* cîmpul electric uniform care există în acel sistem de referință. Un observator în  $F$  spune: „Înăuntrul vergelei a apărut un cîmp electric de intensitate  $E = -v \times B$ , exercitînd o forță  $qE = -qv \times B$  care echilibrează forța  $qv \times B$  care altfel ar determina orice sarcină  $q$  să se miște de-a lungul vergelei.” Un observator din  $F'$  spune: „Înăuntrul vergelei nu există nici un cîmp electric, și deși aici există un cîmp magnetic uniform, nu apare nici o forță de la el deoarece nici o sarcină nu este în mișcare.” Fiecare descriere este corectă.

### 7.3. O BUCLĂ SE DEPLASEAZĂ PRINTR-UN CÎMP MAGNETIC NEUNIFORM

Dar dacă făceam o buclă dreptunghiulară de sîrmă, cum este arătat în figura 7.5, și o deplasăm cu viteză constantă prin cîmpul uniform de inducție  $B$ ? Pentru a prezice ce se va întîmpla, avem nevoie doar să ne întrebăm — în sistemul de referințe  $F'$  — ce s-ar întîmpla dacă punem o

Fig. 7.5. (a) Aici spira de sîrmă se mișcă într-un cîmp magnetic uniform  $B$ .  
(b) Observată în sistemul  $F'$ , în care spira este în repaus, cîmpurile sînt  $B'$  și  $E'$ .





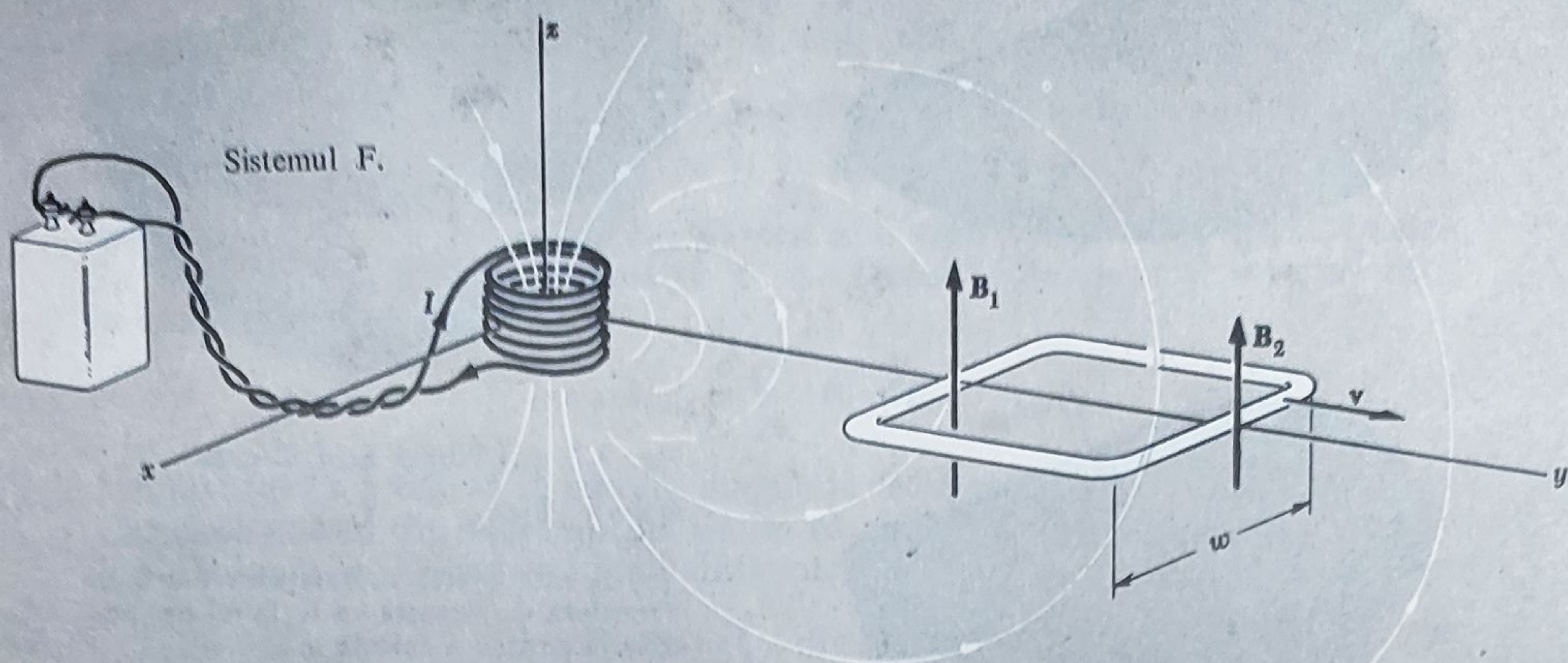


Fig. 7.6. Aici inducția  $B$ , observată în  $F$ , nu este uniform. El variază în direcție și mărime de la punct la punct.

astfel de buclă într-un câmp electric uniform. Evident, două laturi opuse ale dreptunghiului ar câștiga o oarecare sarcină, dar aceasta ar fi totul. Să presupunem, totuși, că inducția magnetică  $B$  în sistemul  $F$ , deși constant în timp, este *neuniformă* în spațiu. Pentru a preciza aceasta, arătăm în figura 7.6 inducția  $B$  având drept sursă un solenoid scurt. Acest solenoid, împreună cu bateria care alimentează curentul constant, este fixat lângă origine în sistemul  $F$ . (Am afirmat mai devreme că nu există nici un câmp electric în  $F$ ; dacă în realitate folosim un solenoid de rezistență finită pentru a obține câmpul, va fi un câmp electric asociat cu bateria și circuitul ei. El este nesemnificativ pentru problema noastră și poate fi neglijat. Sau putem introduce întreaga bobină, cu bateria ei, într-o cutie metalică.)

Acum, cu bucla deplasându-se cu viteza  $v$  în direcția  $y$ , în sistemul  $F$ , fie poziția la un moment oarecare  $t$  astfel încât inducția câmpului magnetic este  $B_1$ , pe latura stângă a buclei și  $B_2$  de-a lungul laturii drepte (fig. 7.6). Fie  $f$  forța care acționează asupra unei sarcini  $q$  care este purtată împreună cu bucla. Această forță este funcție de poziția în buclă, la acest moment de timp. Să evaluăm integrala curbilinie a lui  $f$ , luată în jurul întregii bucle: Pe cele două laturi ale buclei care sînt paralele direcției de mișcare,  $f$  este perpendiculară pe elementul de curbă  $ds$ , astfel că acestea nu dau nimic. Considerînd contribuțiile celorlalte două laturi, fiecare de lungime  $w$ , avem

$$\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = qv (B_1 - B_2)w. \quad (4)$$

Dacă ne imaginăm o sarcină  $q$  care parcurge în întregime bucla, într-un timp suficient de scurt încît poziția buclei nu s-a schimbat apreciabil, atunci ecuația 4 dă lucrul efectuat de forța  $f$ . Lucrul efectuat pe



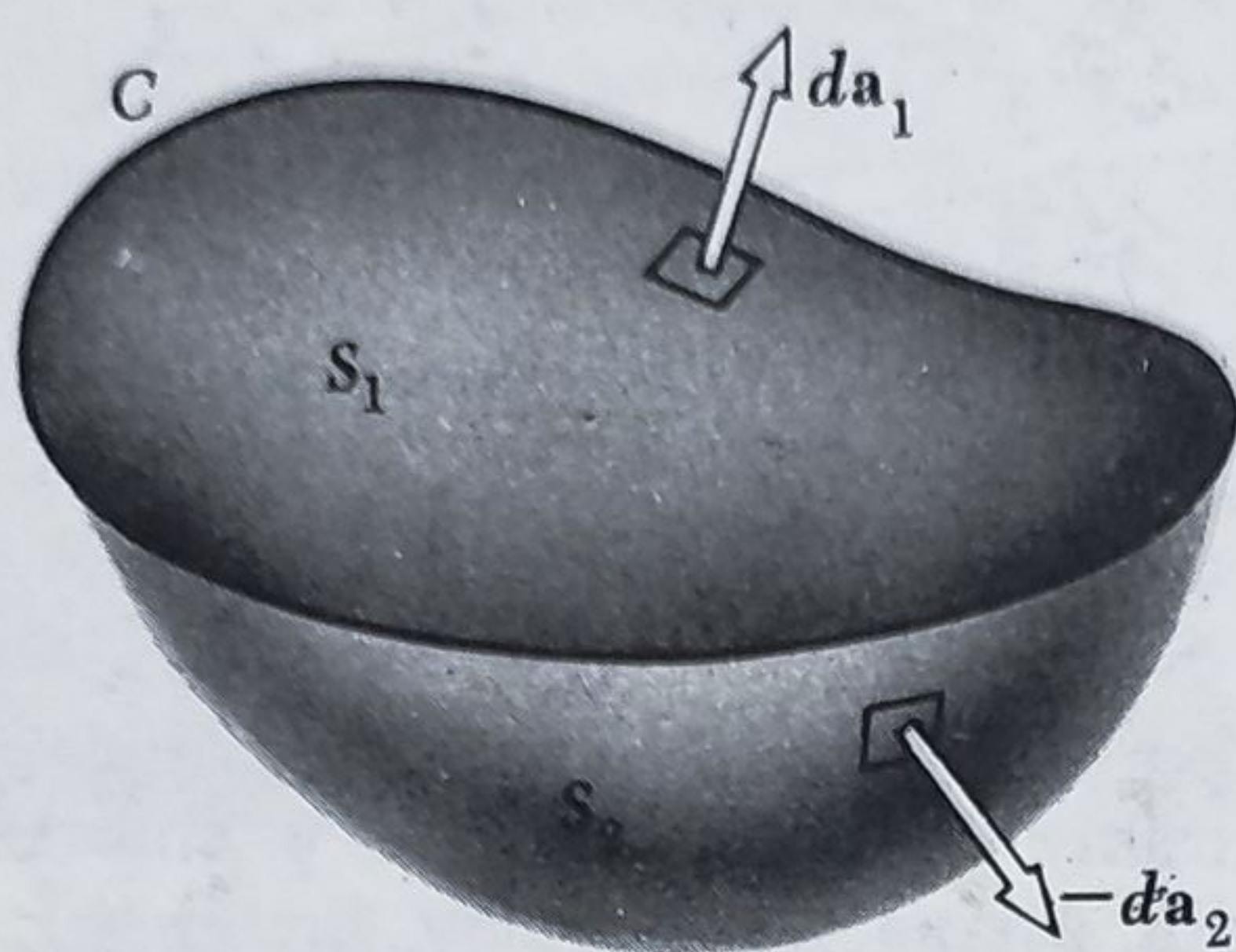
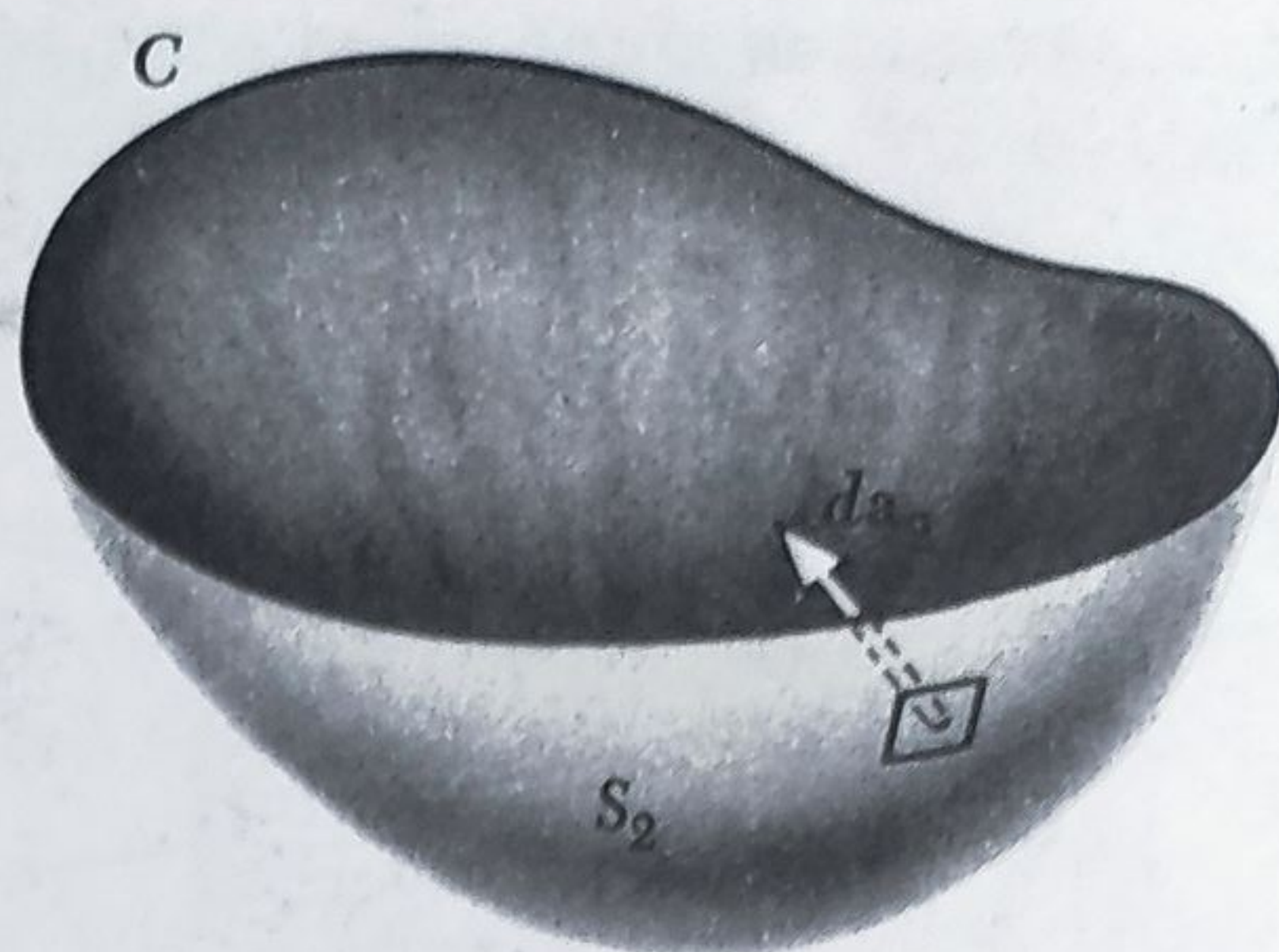
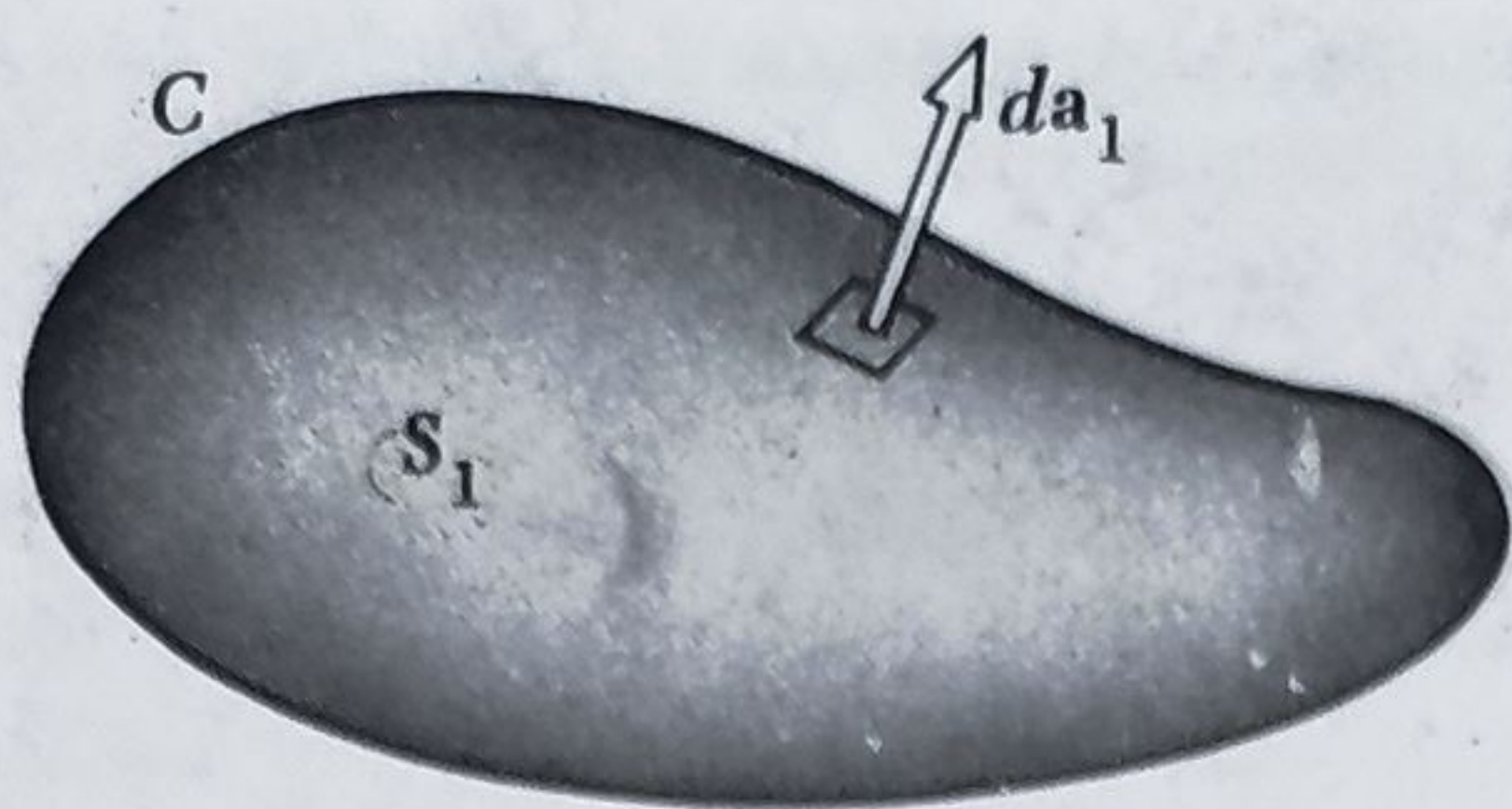


Fig. 7.7. (a) Fluxul prin  $C$  este

$$\Phi = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1$$

(b)  $S_2$  este o altă suprafață care are ca frontieră  $C$ . Aceasta va fi la fel de potrivită pentru a calcula  $\Phi$ .

(c) Unirea lui  $S_1$  și  $S_2$  pentru a face o suprafață închisă, pentru care  $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$  trebuie să se anuleze, dovedește că

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2$$

unitate de sarcină este  $(1/q) \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ . Vom numi această cantitate *tensiunea electromotoare*. Folosim pentru ea simbolul  $\mathcal{E}$ , și adesea îi scurtăm numele la „t.e.m.”.  $\mathcal{E}$  are aceleași dimensiuni ca potențialul electric și este măsurată în volți, sau jouli pe coulomb, în sistemul MKSA

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}. \quad (5)$$

Termenul *tensiune electromotoare* a fost introdus mai devreme, în § 4.10. El a fost definit ca lucrul pe unitatea de sarcină implicat în mișcarea unei sarcini în jurul unui circuit conținând o celulă voltaică. Lărgim acum definiția t.e.m. pentru a include orice influență care determină sarcina să circule în jurul unei traiectorii închise. Dacă se întâmplă ca traiectoria să fie un circuit fizic cu rezistența  $R$ , atunci t.e.m.  $\mathcal{E}$  produce scurgerea unui curent după legea lui Ohm:  $I = \mathcal{E}/R$ . În cazul particular pe care îl considerăm,  $\mathbf{f}$  este forța care acționează asupra unei sarcini într-un câmp magnetic, și  $\mathcal{E}$  are mărimea

$$\mathcal{E} = v\omega(B_1 - B_2). \quad (6)$$

Tensiunea electromotoare dată de ecuația 6 este legată într-un mod foarte simplu de *rata de schimbare a fluxului magnetic* prin buclă. Prin fluxul magnetic prin buclă înțelegem integrala de suprafață a lui  $\mathbf{B}$  care are bucla ca frontieră. Fluxul  $\Phi$  prin bucla sau curba închisă  $C$  din figura 7.7, a este dat de integrala de suprafață a lui  $\mathbf{B}$  pe  $S_1$ :

$$\Phi_{(S_1)} = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 \quad (7)$$



Am putea duce infinit de multe suprafețe mărginite de  $C$ . Figura 7.7,  $b$  arată o altă,  $S_2$ . De ce nu avem de precizat care suprafață este de folosit în calculul fluxului? *Nu există nici o diferență* deoarece  $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$  va avea aceeași valoare pentru toate aceste suprafețe. Să ne oprim o clipă pentru a lămurii aceasta. Fluxul prin  $S_2$  va fi  $\int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2$ . De notat că vectorul  $d\mathbf{a}_2$  iese din partea de sus a lui  $S_2$ , pentru a fi consistent cu alegerea pentru  $S_1$ . Vom obține un număr pozitiv dacă fluxul total prin  $C$  este orientat în sus.

$$\Phi_{(S_1)} = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2. \quad (8)$$

Am învățat în § 6.2 că în câmpul magnetic divergența este zero:  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ . Urmează atunci din teorema lui Gauss că dacă este orice suprafață închisă (un „balon”) și  $V$  este volumul dinăuntru:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \text{div } \mathbf{B} \, dv = 0. \quad (9)$$

Să aplicăm aceasta la suprafața închisă, mai degrabă ca un timpan, formată prin unirea lui  $S_1$  și  $S_2$ , ca în figura 7.7,  $c$ . Pe  $S_2$  normala exterioară este opusă vectorului  $d\mathbf{a}_2$  pe care l-am folosit pentru calculul fluxului prin  $C$ . Astfel

$$0 = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot (-d\mathbf{a}_2) \quad (10)$$

sau

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2.$$

Aceasta arată că nu are importanță care suprafață o folosim pentru a calcula fluxul prin  $C$ .

Aceasta este aproape evident dacă realizați că  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  implică un fel de conservare spațială a fluxului. În orice volum intră atât de mult flux cât iese. (Considerăm situația în întreg spațiul la un moment dat de timp.) Adesea este de folos să vizualizăm „tuburi” de flux. Un tub de flux (fig. 7.8) este o suprafață în fiecare punct al căreia linia de câmp magnetic se află în planul suprafeței. Aceasta este o suprafață prin care nu trece nici un flux, și ne putem gândi că ea conține o anumită cantitate de flux, așa cum un cablu telefonic conține fire. Prin orice curbă închisă dusă solidar împrejurul unui tub de flux, trece același flux. Aceasta s-ar putea spune despre intensitatea câmpului electric  $\mathbf{E}$  doar în regiuni unde nu există sarcină electrică, deoarece  $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ . Inducția câmpului magnetic are întotdeauna divergența zero peste tot.

Revenind acum la bucla dreptunghiulară în mișcare, să găsim *rata de schimbare* a fluxului prin buclă. În timpul  $dt$  bucla se deplasează o distanță  $vdt$ . Aceasta modifică în două moduri fluxul total prin buclă, care este  $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$  pe o suprafață care se sprijină pe buclă. După cum puteți vedea în figura 7.9, se câștigă flux la dreapta,  $B_2 vwdt$ , în timp ce un flux,  $B_1 vwdt$  se pierde la stînga. De aici  $d\Phi$ , schimbarea în flux prin buclă în timpul  $dt$ , este

$$d\Phi = -(B_1 - B_2) vwdt. \quad (11)$$



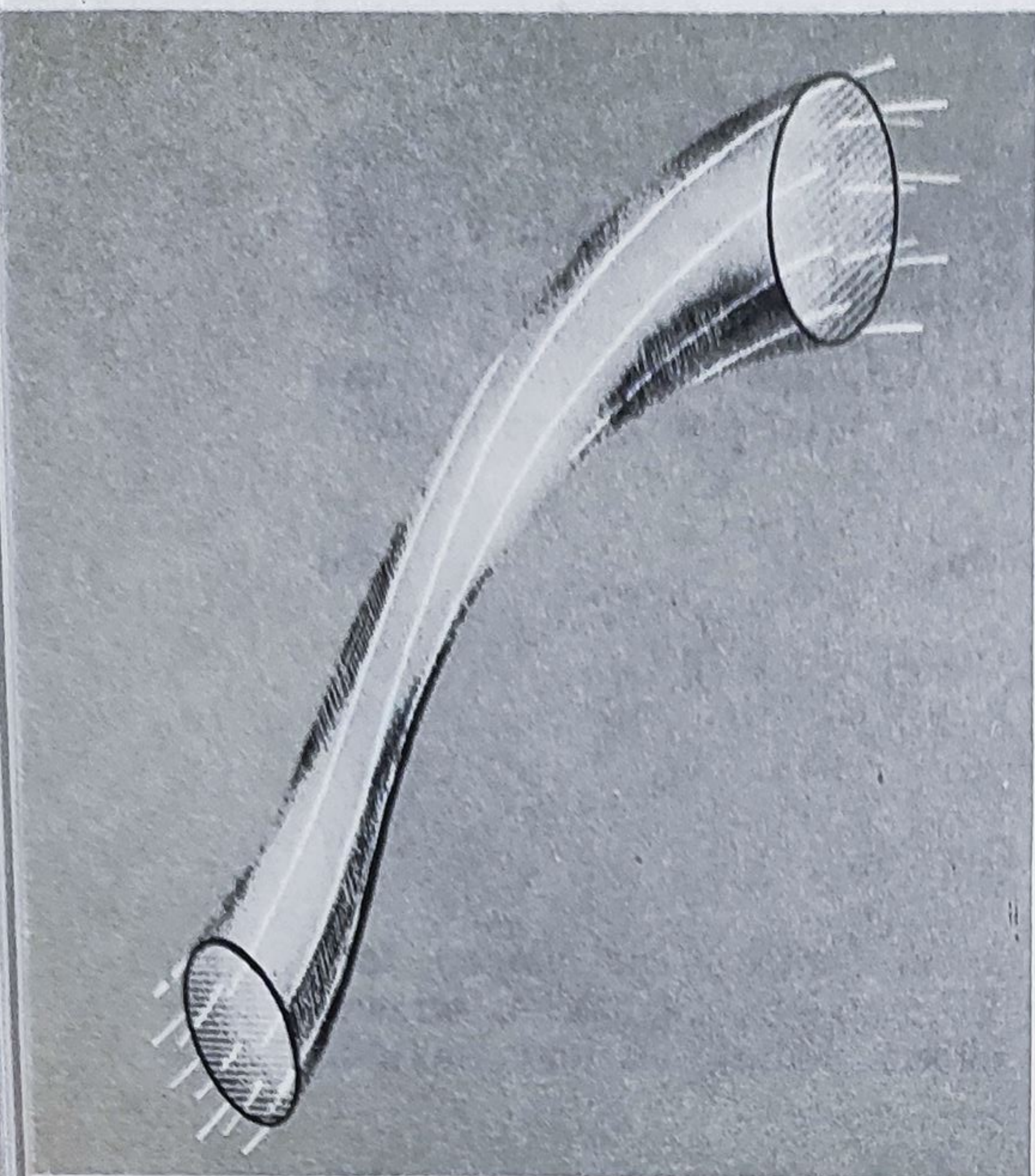


Fig. 7.8. Un tub de linii de câmp. Liniile câmpului magnetic formează suprafața laterală a tubului. Tubul închide o cantitate oarecare de flux  $\Phi$ . Indiferent unde îl tăiați, veți găsi că  $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$  în orice secțiune are aceeași valoare  $\Phi$ . Un astfel de tub nu trebuie să fie rotund. Puteți porni undeva cu orice secțiune, și mersul liniilor de câmp va determina cum se schimbă mărimea și forma secțiunii când mergeți de-a lungul tubului.

Comparînd ecuația 11 cu ecuația 6, vedem că, cel puțin în acest caz, tensiunea electromotoare se poate exprima ca

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (12)$$

Putem arăta că aceasta are loc în general, pentru o buclă de orice formă mișcîndu-se în orice fel. Bucla  $C$  din figura 7.10 ocupă poziția  $C_1$  la momentul  $t$ , și se mișcă astfel încît ocupă poziția  $C_2$  la momentul  $t + dt$ . Un element particular al buclei  $ds$  a fost transportat cu viteza  $v$  în noua sa poziție.  $S$  indică o suprafață care se sprijină pe buclă la momentul  $t$ . Fluxul prin buclă la acest moment este

$$\Phi(t) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}. \quad (13)$$

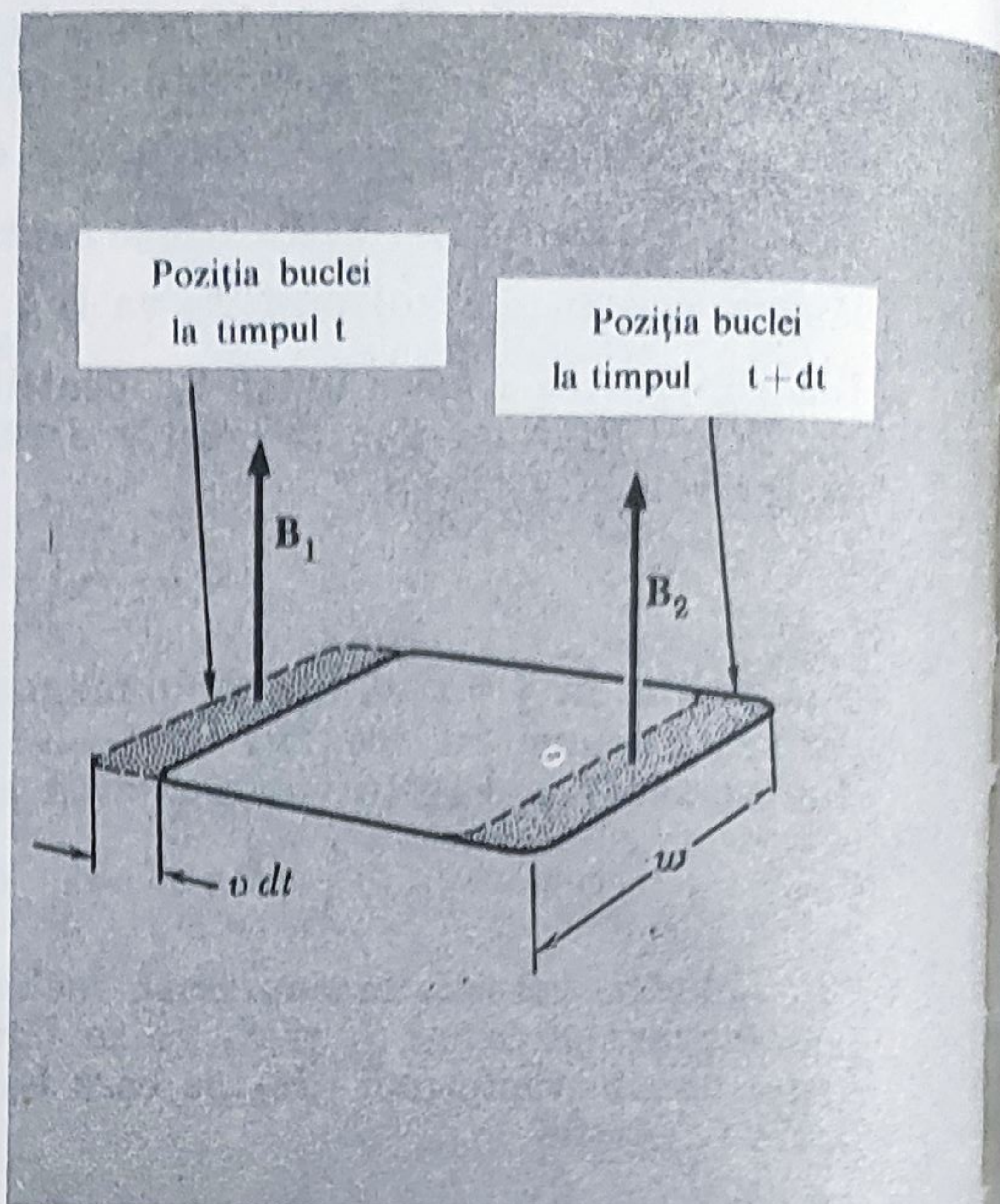


Fig. 7.9. În intervalul  $dt$  prin spiră fluxul crește cu  $B_2 w v dt$  și scade cu  $B_1 w v dt$ .



Inducția cîmpului magnetic  $\mathbf{B}$  provine de la surse care sînt staționare în sistemul nostru de referință și rămîne constantă în timp, în orice punct fixat din acest sistem. La momentul  $t + dt$  o suprafață care se sprijină pe buclă este suprafața originală  $S$ , lăsată fixă în spațiu, prelungită prin „marginea”  $dS$ . (Amintiți-vă, ne este îngăduit să folosim *orice* suprafață care se sprijină pe buclă pentru a calcula fluxul prin ea.) Astfel,

$$\Phi(t + dt) = \int_{S+dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi(t) + \int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}. \quad (14)$$

De aici schimbarea în flux, în timpul  $dt$ , este tocmai fluxul prin „marginea”  $dS$ ,  $\int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ . Pe margine, un element de orice suprafață  $da$  se poate exprima ca  $(\mathbf{v}dt) \times d\mathbf{s}$ , astfel încît integrala pe suprafața  $dS$  poate fi scrisă ca o integrală în jurul curbei  $C$ , în acest fel:

$$d\Phi = \int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_C \mathbf{B} \cdot [(\mathbf{v}dt) \times d\mathbf{s}]. \quad (15)$$

Deoarece  $dt$  este constantă pentru integrare, îl putem da factor și avem

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{s}). \quad (16)$$

După regula pentru produsul mixt (vol. I, p. 57) avem identitatea:  $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$ . Folosind aceasta pentru a rearanja ecuația 16, avem

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}. \quad (17)$$

Acum forța asupra unei sarcini  $q$  care este deplasată împreună cu bucla este tocmai  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , astfel că forța electromotoare, care este integrala curbilinie în jurul buclei a forței pe unitatea de sarcină, este chiar

$$\mathcal{E} = \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}. \quad (18)$$

Comparînd ecuația 17 cu ecuația 18 căpătăm relația simplă deja dată în ecuația 12, dar valabilă acum pentru o formă și mișcare arbitrară a buclei. (Nici măcar nu avem de presupus că  $\mathbf{v}$  este același în toate părțile spirei!) În rezumat, integrala curbilinie în jurul unei bucle în mișcare a lui  $\mathbf{f}/q$ , forța pe unitate de sarcină, este minus viteza de schimbare a fluxului prin buclă.

Sensul integralei curbilinii și direcția în care fluxul este numit pozitiv sînt de corelat printr-o regulă de șurub drept. De exemplu, în figura 7.6, fluxul este orientat *în sus* prin buclă și este *descrescător*. Luînd în considerare semnul minus din ecuația 12,

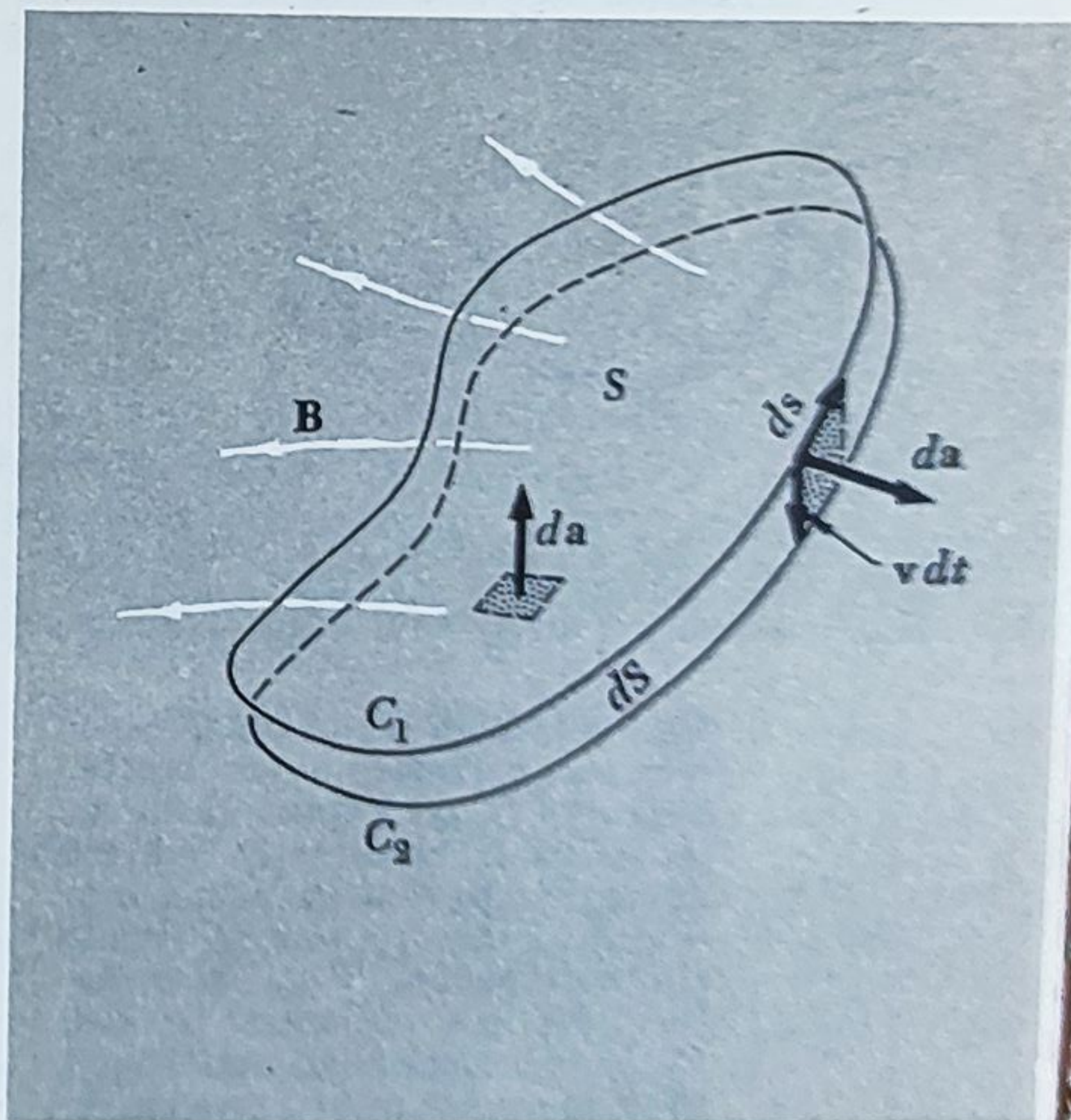


Fig. 7.10. Bucla se deplasează de la poziția  $C_1$  la poziția  $C_2$  în timpul  $dt$ .



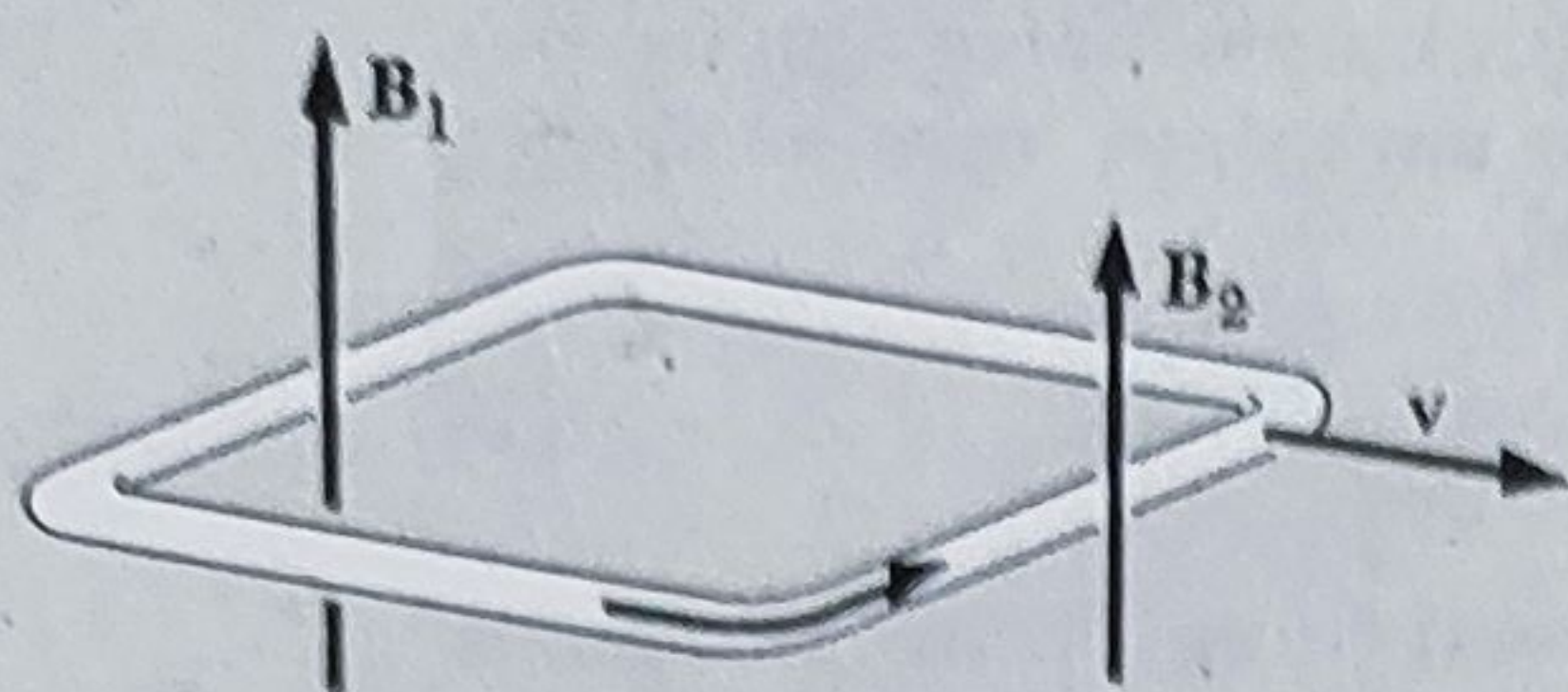


Fig. 7.11. Fluxul prin buclă este orientat în sus și este descrescător în mărime cu scurgerea timpului. Săgeata arată direcția tensiunii electromotoare, adică, direcția în care tinde să fie mișcată sarcina pozitivă.

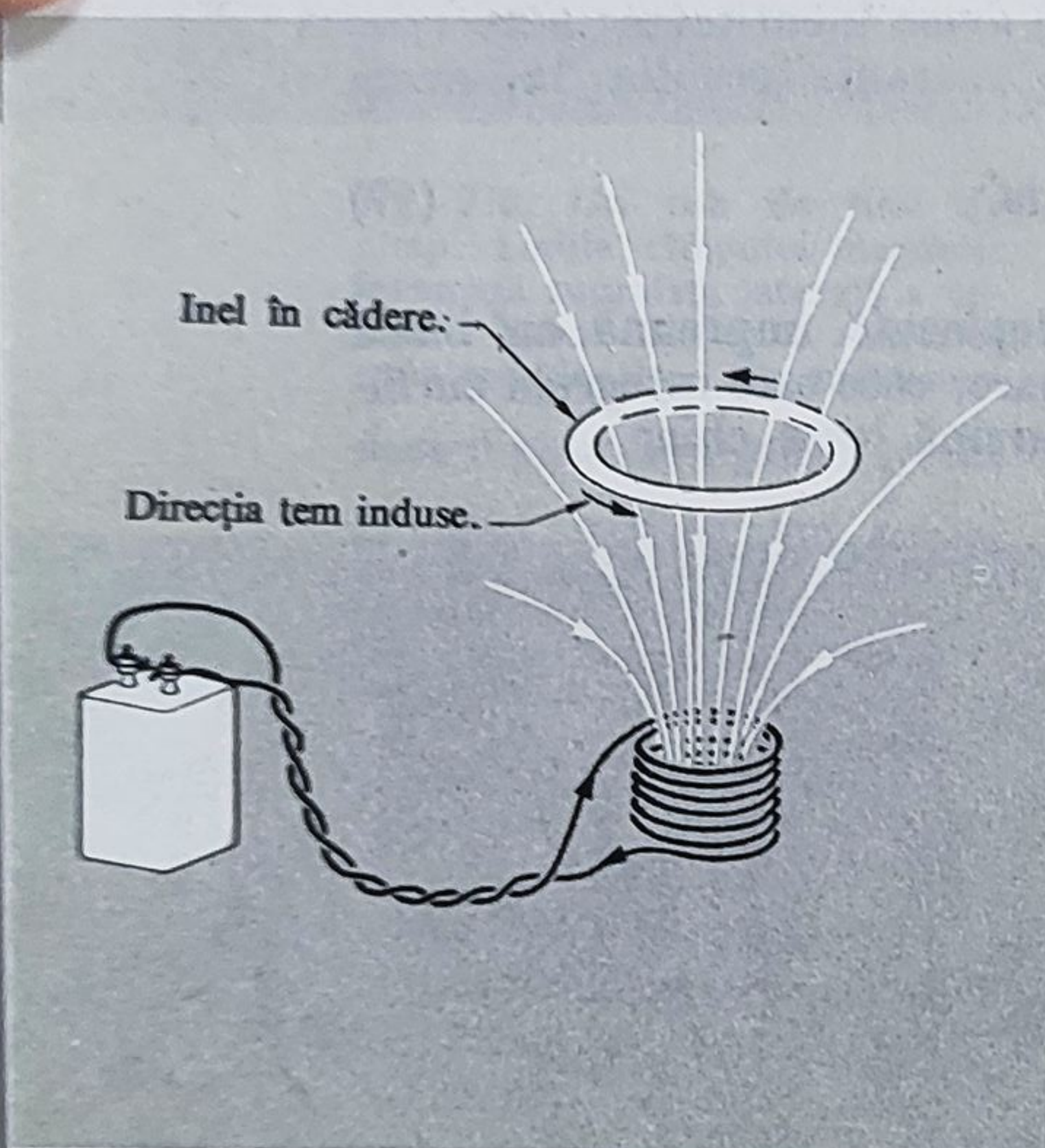


Fig. 7.12. Când inelul cade, fluxul prin inel orientat în jos crește. Legea lui Lenz ne spune că t.e.m. indusă va fi în direcția indicată de săgeți, pentru că aceea este sensul în care trebuie să circule curentul pentru a produce un flux prin inel orientat în sus. Sistemul reacționează astfel încât să se opună schimbării care apare.

regula noastră ar prezice o forță electromotoare care ar tinde să conducă o sarcină pozitivă în jurul buclei în sens contrar acelor de ceasornic, așa cum se vede privind în jos spre buclă (fig. 7.11).

Există un mod mai bun de a privi această problemă de semn și direcție. Observați că dacă un curent se scurge în direcția forței electromotoare induse, în situația arătată în figura 7.11, acest curent ar crea el însuși un oarecare flux prin buclă într-o direcție spre a *contracara* schimbarea presupusă de flux. Aceasta este un fapt fizic important, și nu consecința unei convenții arbitrare despre semne și direcții. Este manifestarea tendinței unui sistem de a rezista schimbării. În acest context este tradițional numită legea lui Lenz.

Un alt exemplu al legii lui Lenz este ilustrat în figura 7.12. Inelul conductor este în cădere în câmpul magnetic al bobinei. Fluxul prin inel este orientat în jos, și este *creșcător* în mărime. Pentru a *contracara* această schimbare, este necesar un nou flux orientat în sus. Acesta ar presupune un curent de-a lungul inelului în sensul săgeților pentru a produce un astfel de flux. Legea lui Lenz ne asigură că t.e.m. indusă va avea direcția corectă pentru a produce un astfel de curent.

Dacă tensiunea electromotoare produce curgerea curentului în bucla care este arătată în figurile 7.6 și 7.11, cum se va întâmpla dacă spira are o rezistență finită, o oarecare energie va fi disipată în fir. Ce furnizează această energie? Pentru a răspunde, să considerăm forța care acționează asupra curentului din spiră dacă acesta curge în sensul indicat de săgeată în figura 7.11. Conductorul din dreapta, în câmpul de inducție  $B_2$ , va fi acționat de o forță spre dreapta, în timp ce latura opusă a buclei, în câmpul de inducție  $B_1$ , va fi împinsă spre stînga. Dar  $B_1$  este mai mare decât  $B_2$ ,



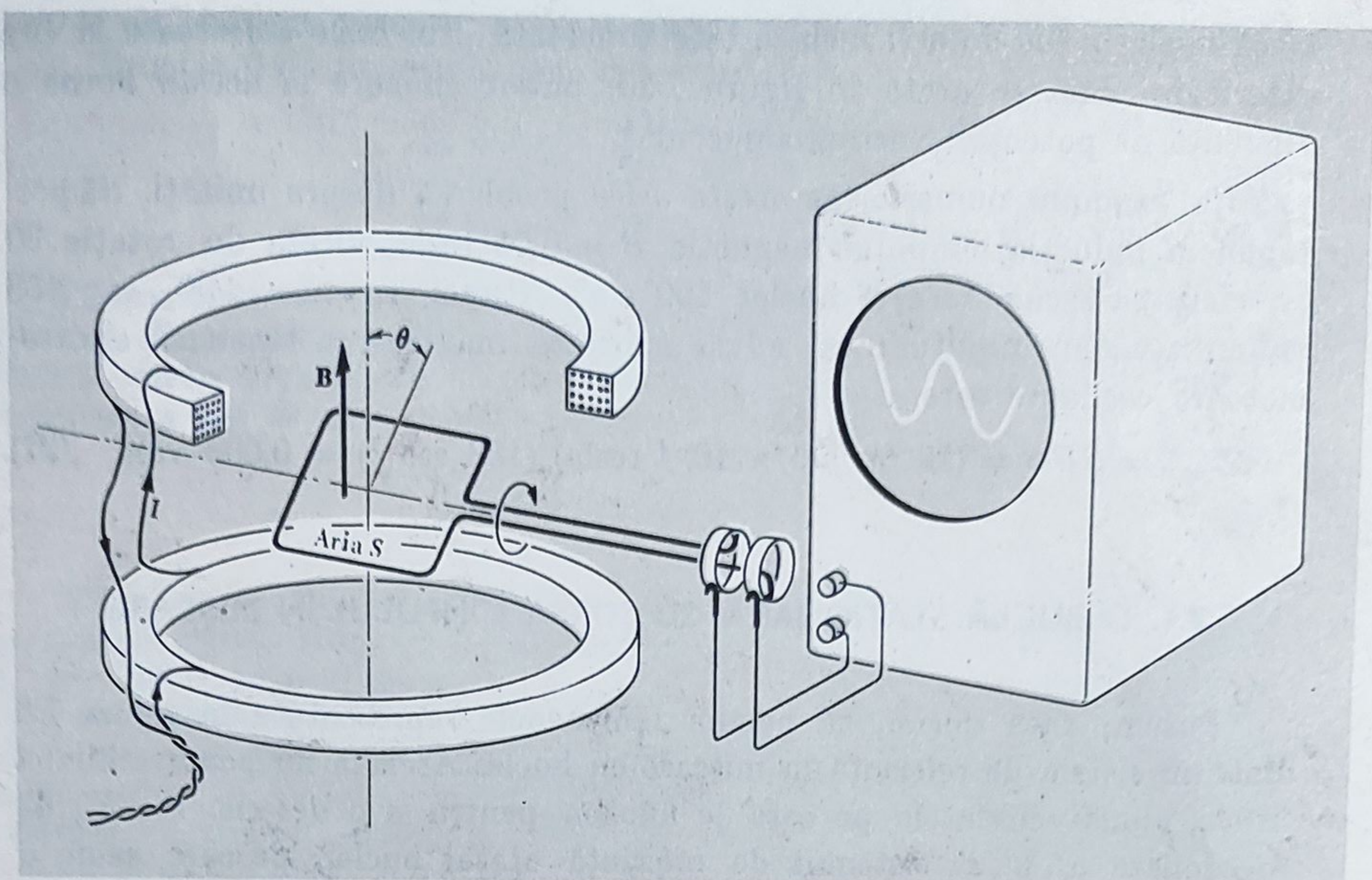


Fig. 7.13. Cele două bobine produc un câmp de inducție magnetică  $B$  care este aproximativ uniform în vecinătatea buclei. În buclă, care se rotește cu viteza unghiulară  $\omega$ , este indusă o forță electromotoare cu variație sinusoidală.

astfel că forța totală asupra buclei este spre stînga, *opunîndu-se mișcării*. Pentru a menține bucla în mișcare cu viteză constantă un oarecare agent extern are de efectuat lucru, și energia astfel investită se arată eventual sub formă de căldură în fir. Imaginați-vă ce s-ar întîmpla dacă legea lui Lenz era violată sau dacă forța asupra buclei ar fi acționat într-o direcție care să sprijine mișcarea buclei!

Un element foarte obișnuit în mașinile electrice și instrumentele electrice este o buclă ori bobină care se rotește într-un câmp magnetic. Să aplicăm ceea ce tocmai am învățat sistemului arătat în figura 7.13, o buclă în rotație cu viteză constantă într-un câmp magnetic care este aproximativ uniform. Fundamentele mecanice, ax, pivoți, acționare, nu sînt desenate. Câmpul de inducție  $B$  este creat de cele două bobine fixe. Să presupunem că bucla se rotește cu viteză unghiulară  $\omega$ , în radiani/sec. Dacă poziția ei la fiecare moment este precizată prin unghiul  $\varphi$ , atunci  $\varphi = \omega t + \alpha$ , unde constanta  $\alpha$  reprezintă poziția buclei la  $t = 0$ . Componenta lui  $B$  perpendiculară pe planul buclei este  $B \sin \varphi$ . De aceea fluxul prin buclă la momentul  $t$  este

$$\Phi(t) = SB \sin(\omega t + \alpha), \quad (19)$$

unde  $S$  este aria buclei. Pentru tensiunea electromotoare indusă avem

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = -SB\omega \cos(\omega t + \alpha). \quad (20)$$



Dacă bucla în loc de a fi închisă este conectată prin inele colectoare la fire exterioare, cum se arată în figura 7.13, putem măsura la aceste borne o diferență de potențial variind sinusoidal.

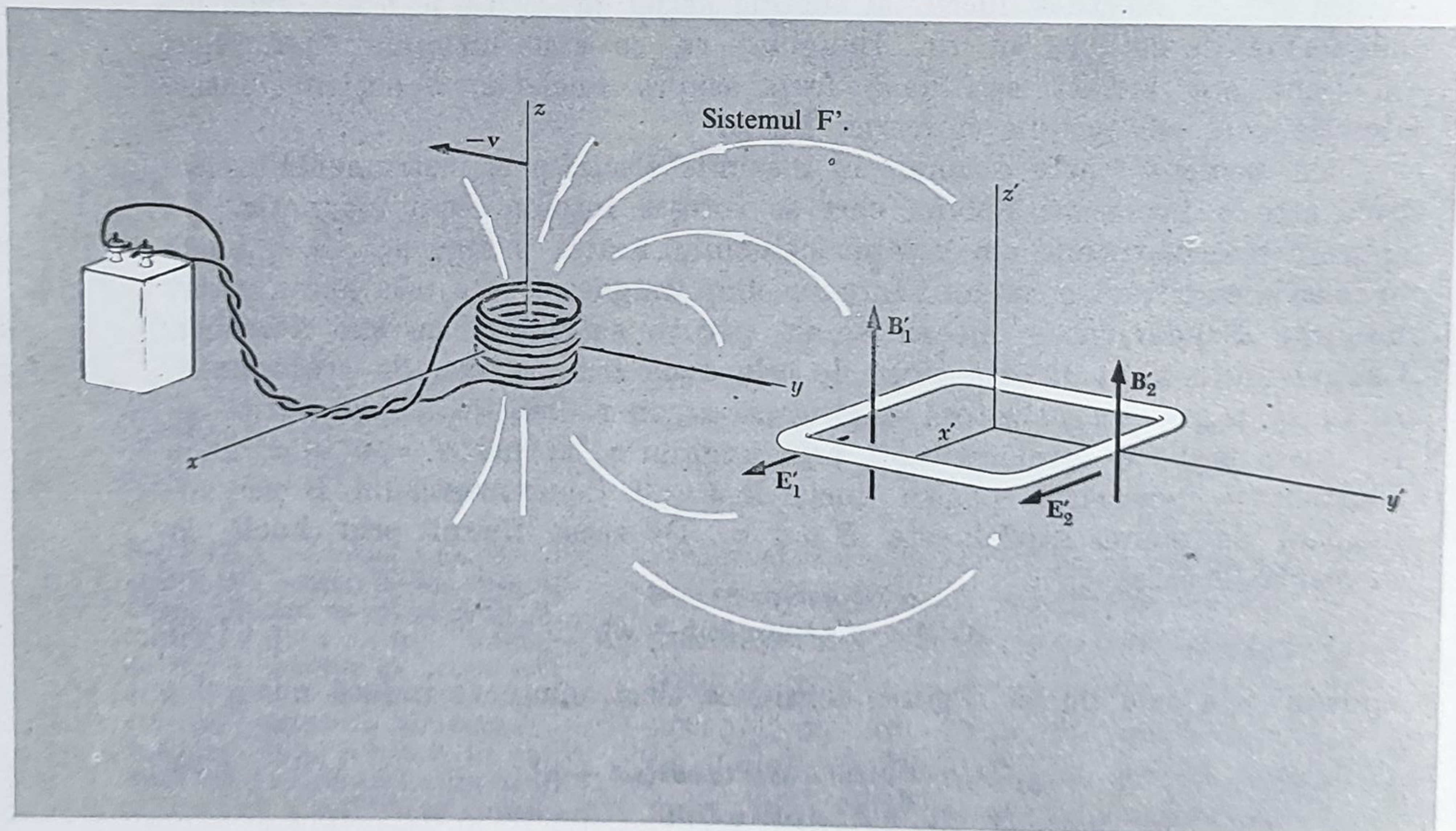
Un exemplu numeric lămurește orice problemă despre unități. Să presupunem inducția cîmpului magnetic  $B = 0,05$  tesla, viteza de rotație 30 de cicluri pe secundă, aria buclei  $100 \text{ cm}^2$ . Atunci  $\omega = 2\pi \times 30$ , sau 188 radiani/sec., și amplitudinea, adică mărimea maximă, a tensiunii electromotoare oscilante este

$$\mathcal{E}_{\max} = SB\omega = (10^{-2} \text{ m}^2) (5 \times 10^{-2} \text{ tesla}) (188 \text{ sec}^{-1}) = 0,093 \text{ volt.} \quad (21)$$

#### 7.4. O BUCLĂ STAȚIONARĂ CU SURSA CÎMPULUI ÎN MIȘCARE

Putem, dacă dorim, să privim fenomenele reprezentate în figura 7.6 dintr-un sistem de referință în mișcare cu bucla. Aceasta nu poate schimba fizica, numai cuvintele pe care le folosim pentru a o descrie. Fie  $F'$ , de coordonate  $x', y', z'$ , sistemul de referință atașat buclei, pe care acum o considerăm staționară (fig. 7.14). Bobina și bateria, staționare în sistemul  $F$ , se mișcă în direcția  $-y'$  cu viteza  $v' = -v$ . Fie  $B'_1$  și  $B'_2$  inducțiile magnetice măsurate la cele două extremități ale buclei de către observatori

Fig. 7.14. Privind în sistemul  $F'$ , bucla este în repaus, sursa cîmpului este în mișcare. Cîmpurile  $B'$  și  $E'$  sînt ambele prezente și sînt funcții de poziție și timp.





în  $F'$  la un moment oarecare  $t'$ . În aceste poziții va exista un câmp electric în  $F'$ . Ecuația 6.62 ne spune că

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_1 &= -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'_1 = \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_1 \\ \mathbf{E}'_2 &= -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'_2 = \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Pentru observatori din  $F'$  acesta este un câmp electric adevărat. El nu este un câmp electrostatic. Integrala curbilinie a lui  $\mathbf{E}'$  de-a lungul oricărei curbe închise din  $F'$  nu este în general zero. De fapt, integrala curbilinie a lui  $\mathbf{E}'$  de-a lungul buclei dreptunghiulare este:

$$\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}' = \omega v (B'_1 - B'_2). \quad (23)$$

Putem numi integrala curbilinie din ecuația 23 tensiunea electromotoare  $\mathcal{E}'$  pe această curbă. Dacă o particulă încărcată se mișcă odată în jurul curbei,  $\mathcal{E}'$  este lucrul efectuat asupra ei, pe unitatea de sarcină.  $\mathcal{E}'$  este legată de rata de schimbare a fluxului prin buclă. Pentru a vedea aceasta, observați că în timp ce bucla însăși este staționară, distribuția câmpului magnetic se mișcă acum cu viteza  $-\mathbf{v}$  a sursei. De aici obținem un rezultat analog ecuației 11, pentru fluxul pierdut sau câștigat la fiecare extremitate a buclei, și obținem că

$$\mathcal{E}' = -\frac{d\Phi'}{dt}. \quad (24)$$

Putem rezuma după cum urmează descrierile în cele două sisteme de referință  $F$ , în care sursa lui  $\mathbf{B}$  este în repaus, și  $F'$ , în care bucla este în repaus:

Un observator în  $F$  spune „Aici avem un câmp magnetic care, deși nu este uniform în spațiu, este constant în timp. Nu există nici un câmp electric. Acea buclă de sîrmă se mișcă cu viteza  $\mathbf{v}$  prin câmpul magnetic, astfel că sarcinile din ea sînt supuse unei forțe  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  newton pe unitatea de sarcină. Integrala curbilinie a acestei forțe pe unitate de sarcină, calculate de-a lungul întregii bucle este tensiunea electromotoare  $\mathcal{E}$  și este egală cu  $-d\Phi/dt$ . Fluxul  $\Phi$  este  $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$  pe o suprafață  $S$  care, la un moment oarecare de timp  $t$  după ceasul meu, se sprijină pe buclă.”

Un observator în  $F'$  spune: „Această buclă este staționară și numai un câmp electric ar putea determina sarcinile din ea să se miște. Dar există de fapt un câmp electric  $\mathbf{E}'$ . El pare să fie generat de obiectul de tip magnet care se întîmplă să treacă prin preajmă în acest moment cu viteza  $-\mathbf{v}$ , producînd în același timp un câmp magnetic  $\mathbf{B}'$  destul de puternic. Câmpul electric este astfel încît  $\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}'$  de-a lungul acestei bucle staționare nu este zero dar minus rata de schimbare a fluxului prin buclă,  $d\Phi'/dt'$ . Fluxul  $\Phi'$  este  $\int \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{a}'$  peste o suprafață care acoperă bucla, valorile lui  $\mathbf{B}'$  fiind măsurate toate pe această suprafață la un același moment de timp  $t'$ , după ceasul meu.”

Concluziile noastre de pînă aici sînt relativistic exacte. Ele se mențin pentru orice viteză  $v < c$  dacă observăm cu minuțiozitate distincțiile între  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{B}'$ ,  $t$  și  $t'$  etc. Dacă  $v \ll c$ , astfel că  $v^2/c^2$  poate fi neglijat,  $\mathbf{B}'$  va fi practic egal cu  $\mathbf{B}$ , și putem neglijă de asemenea distincția între  $t$  și  $t'$ .



în  $F'$  la un moment oarecare  $t'$ . În aceste poziții va exista un câmp electric în  $F'$ . Ecuația 6.62 ne spune că

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_1 &= -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'_1 = \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_1 \\ \mathbf{E}'_2 &= -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'_2 = \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Pentru observatori din  $F'$  acesta este un câmp electric adevărat. El nu este un câmp electrostatic. Integrala curbilinie a lui  $\mathbf{E}'$  de-a lungul oricărei curbe închise din  $F'$  nu este în general zero. De fapt, integrala curbilinie a lui  $\mathbf{E}'$  de-a lungul buclei dreptunghiulare este:

$$\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}' = \omega v (B'_1 - B'_2). \quad (23)$$

Putem numi integrala curbilinie din ecuația 23 tensiunea electromotoare  $\mathcal{E}'$  pe această curbă. Dacă o particulă încărcată se mișcă odată în jurul curbei,  $\mathcal{E}'$  este lucrul efectuat asupra ei, pe unitatea de sarcină.  $\mathcal{E}'$  este legată de rata de schimbare a fluxului prin buclă. Pentru a vedea aceasta, observați că în timp ce bucla însăși este staționară, distribuția câmpului magnetic se mișcă acum cu viteza  $-\mathbf{v}$  a sursei. De aici obținem un rezultat analog ecuației 11, pentru fluxul pierdut sau câștigat la fiecare extremitate a buclei, și obținem că

$$\mathcal{E}' = -\frac{d\Phi'}{dt}. \quad (24)$$

Putem rezuma după cum urmează descrierile în cele două sisteme de referință  $F$ , în care sursa lui  $\mathbf{B}$  este în repaus, și  $F'$ , în care bucla este în repaus:

Un observator în  $F$  spune „Aici avem un câmp magnetic care, deși nu este uniform în spațiu, este constant în timp. Nu există nici un câmp electric. Acea buclă de sîrmă se mișcă cu viteza  $\mathbf{v}$  prin câmpul magnetic, astfel că sarcinile din ea sînt supuse unei forțe  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  newton pe unitatea de sarcină. Integrala curbilinie a acestei forțe pe unitate de sarcină, calculate de-a lungul întregii bucle este tensiunea electromotoare  $\mathcal{E}$  și este egală cu  $-d\Phi/dt$ . Fluxul  $\Phi$  este  $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$  pe o suprafață  $S$  care, la un moment oarecare de timp  $t$  după ceasul meu, se sprijină pe buclă.”

Un observator în  $F'$  spune: „Această buclă este staționară și numai un câmp electric ar putea determina sarcinile din ea să se miște. Dar există de fapt un câmp electric  $\mathbf{E}'$ . El pare să fie generat de obiectul de tip magnet care se întimplă să treacă prin preajmă în acest moment cu viteza  $-\mathbf{v}$ , producînd în același timp un câmp magnetic  $\mathbf{B}'$  destul de puternic. Câmpul electric este astfel încît  $\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}'$  de-a lungul acestei bucle staționare nu este zero dar minus rata de schimbare a fluxului prin buclă,  $d\Phi'/dt'$ . Fluxul  $\Phi'$  este  $\int \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{a}'$  peste o suprafață care acoperă bucla, valorile lui  $\mathbf{B}'$  fiind măsurate toate pe această suprafață la un același moment de timp  $t'$ , după ceasul meu.”

Concluziile noastre de pînă aici sînt relativistic exacte. Ele se mențin pentru orice viteză  $v \leq c$  dacă observăm cu minuțiozitate distincțiile între  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{B}'$ ,  $t$  și  $t'$  etc. Dacă  $v \ll c$ , astfel că  $v^2/c^2$  poate fi neglijat,  $\mathbf{B}'$  va fi practic egal cu  $\mathbf{B}$ , și putem neglija de asemenea distincția între  $t$  și  $t'$ .



## 7.5. O LEGE DE INDUCȚIE UNIVERSALĂ

Să efectuăm trei experiențe cu aparatul arătat în figura 7.15. Măsuțele sînt pe roți astfel că pot fi deplasate cu ușurință. Un galvanometru sensibil a fost legat la vechea noastră buclă dreptunghiulară, și pentru a mări oricare forță electromotoare indusă punem mai multe spire de sîrmă în buclă. Sincer vorbind, sensibilitatea încă poate fi insuficientă, cu sursa slabă de cîmp magnetic figurată. Poate dumneavoastră puteți proiecta o versiune mai practică a experienței în laborator.

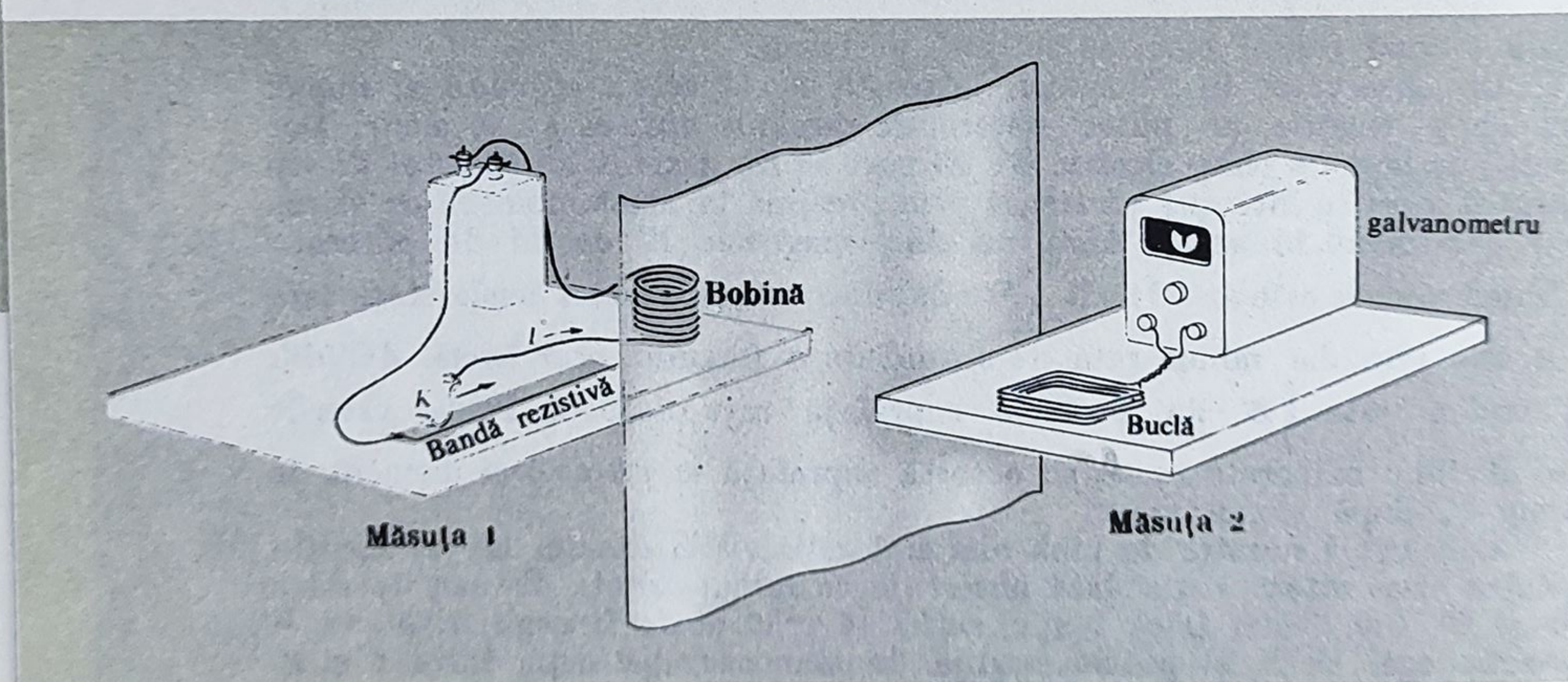
*Experiența I.* La curenț constant în bobină și masuța 1 staționară, masuța 2 se deplasează spre dreapta cu viteza  $v$ . *Galvanometrul deviază.* Nu sîntem surprinși; am analizat deja această situație în § 7.3 mai sus.

*Experiența II.* La curenț constant în bobină și masuța 2 staționară, masuța 1 se deplasează spre stînga cu viteza  $v$ . *Galvanometrul deviază.* Nici aceasta nu ne surprinde. Tocmai am discutat echivalența experiențelor I și 2, o echivalență care este un exemplu de invarianță Lorentz sau, pentru vitezele joase ale măsuțelor noastre, invarianță Galilei. Știm că în ambele experiențe devierea galvanometrului poate fi corelată ratei de schimbare a fluxului lui  $B$  prin buclă.

*Experiența III.* Ambele măsuțe rămîn în repaus, dar variem curențul  $I$  în bobină prin alunecarea contactului  $K$  de-a lungul rezistenței. Facem aceasta astfel încît viteza de descrescere a cîmpului  $B$  la buclă este aceeași cît a fost în experiențele I și II. *Deviază galvanometrul?*

Pentru un observator situat lîngă bucla de pe masuța 2 și care măsoară inducția magnetică în vecinătate ca funcție de timp și poziție, nu există nici o cale de a distinge între experiențele I și III. Imaginați-vă o perdea

Fig. 7.15. Ne imaginăm că fiecare măsuță se poate deplasa sau, cu ambele măsuțe fixate, se poate schimba treptat curențul în bobină.





groasă de stofă între cele două măsute. Deși ar putea fi diferențe minore între configurațiile câmpurilor pentru II și III, un observator care nu cunoștea ce era în spatele perdelei nu ar fi putut decide, doar pe baza măsurării inducției câmpului  $\mathbf{B}$  local, care caz a fost. De aceea, dacă galvanometrul nu a răspuns cu aceeași deviere în experiența III, ar însemna că relația între câmpurile electric și magnetic într-o regiune depinde de natura unei surse îndepărtate. Două câmpuri magnetice esențial asemănătoare în proprietățile lor locale ar avea asociate într-un caz, dar nu în celălalt, un câmp electric cu  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ .

Găsim prin experiență că III este echivalentă cu I și II. Galvanometrul deviază, cu aceeași mărime ca înainte. Experiențele lui Faraday au fost primele care demonstrează acest fapt fundamental. Tensiunea electromotoare pe care o observăm depinde numai de viteza de schimbare a fluxului lui  $\mathbf{B}$ , și nu de orice altceva. Putem enunța ca o relație universală Legea lui Faraday a Inducției:

Dacă  $C$  este o curbă închisă oarecare, staționară în coordonatele  $x, y, z$ , dacă  $S$  este o suprafață care se sprijină pe  $C$ , și  $\mathbf{B}(x, y, z, t)$  este câmpul magnetic măsurat în  $x, y, z$ , la orice moment  $t$ , atunci

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (25)$$

Folosind derivata vectorială rot, putem exprima această lege în formă diferențială. Dacă relația

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (26)$$

este adevărată pentru orice curbă  $C$  care acoperă suprafața  $S$ , cum afirmă legea noastră, urmează că în orice punct

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{d\mathbf{B}}{dt}. \quad (27)$$

Pentru a arăta că ecuația 27 urmează din ecuația 26, procedăm ca de obicei prin a restringe  $C$  în jurul unui punct, pe care îl presupunem punct nesingular pentru funcția  $\mathbf{B}$ . Atunci la limită variația lui  $\mathbf{B}$  peste mica porțiune de suprafață  $\mathbf{a}$  care acoperă  $C$  va fi neglijabilă și integrala de suprafață va fi simplu  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$ . Acum prin definiție (ec. 2.76) limita la care tinde  $\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  când restringem suprafața este  $\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{E}$ . Avem astfel, la limită,

$$\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = - \frac{d}{dt} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \left( - \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right). \quad (28)$$

Deoarece aceasta are loc pentru orice  $\mathbf{a}$  infinitesimal, trebuie ca\*

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{d\mathbf{B}}{dt}. \quad (29)$$

\* Dacă aceasta nu este evident, observați că alegând  $\mathbf{a}$  în direcția  $x$  se va obține  $(\text{rot } \mathbf{E})_x = - \frac{dB_x}{dt}$ , și așa mai departe.



Deoarece  $B$  poate depinde de poziție ca și de timp, vom scrie  $\partial B/\partial t$  în locul lui  $dB/dt$ . Avem astfel aceste formulări în întregime echivalente ale legii inducției:

sau

$$\boxed{\begin{aligned}\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.\end{aligned}} \quad (30)$$

În ecuația 30 cîmpul electric este de exprimat în voltpe metru, și  $B$  este de măsurat în tesla. Tensiunea electromotoare  $\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  va fi dată în volt. Relația între  $\mathcal{E}$  și viteza de variație a fluxului trebuie să fie

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d\Phi}{dt} \left( \frac{\text{tesla} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \right). \quad (31)$$

(volt)      (volt/m) (m)      (sec)      (tesla) (m<sup>2</sup>)

Expresia diferențială,  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ , explicitază destul de complet remarcă anterioară despre natura locală a relațiilor de cîmp. Variația în timp a lui  $B$  într-o vecinătate determină complet  $\text{rot } \mathbf{E}$  acolo — nimic altceva nu are importanță. Aceasta nu determină complet însuși cîmpul  $\mathbf{E}$ , desigur. Fără a afecta această relație orice cîmp electrostatic, cu  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ , ar putea fi superpus.

Ca exemplu concret, să presupunem că bobine ca acelea din figura 7.13 sînt alimentate cu curent alternativ de 50 cicl/sec., în loc de curent continuu. Curentul și cîmpul magnetic variază ca  $\sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$  sau  $\sin 314 t$ . Să presupunem că amplitudinea curentului este astfel încît inducția magnetică  $B$  din regiunea centrală atinge o valoare maximă de  $5 \times 10^{-3}$  Tesla. Dorim să studiem cîmpul electric indus și tensiunea electromotoare, pe curba circulară de 10 cm în rază arătată în figura 7.16. Putem presupune cîmpul  $B$  practic uniform în interiorul acestui cerc, la orice moment de timp

$$B = 5 \times 10^{-3} \sin 314 t \quad (32)$$

$B$  este în tesla și  $t$  în secunde. Fluxul prin bucla  $C$  este

$$\Phi = \pi r^2 B = \pi \times 10^{-2} \times 5 \times 10^{-3} \sin 314 t = 1,57 \times 10^{-4} \text{ tesla} \cdot \text{m}^2. \quad (33)$$

Folosind ecuația 31 pentru a calcula tensiunea electromotoare în volți,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -(314)(1,57 \times 10^{-4}) \cos 314 t = -0,049 \cos 314 t \text{ (volt)}. \quad (34)$$

Maximul atins de  $\mathcal{E}$  este 49 milivolți. Semnul minus va asigura că legea lui Lenz este respectată, dacă am definit corespunzător direcțiile. Variația lui  $\Phi$  și  $\mathcal{E}$  în timp este arătată în figura 7.17.

Ce se întîmplă cu cîmpul electric? În mod obișnuit nu putem deduce  $\mathbf{E}$  doar din cunoașterea lui  $\text{rot } \mathbf{E}$ . Totuși, curba noastră  $C$  este aici un cerc în jurul centrului unui sistem simetric. Dacă nu există alte cîmpuri electrice în preajmă, putem presupune că pe cercul  $C$ ,  $\mathbf{E}$  se află în acel plan și are o



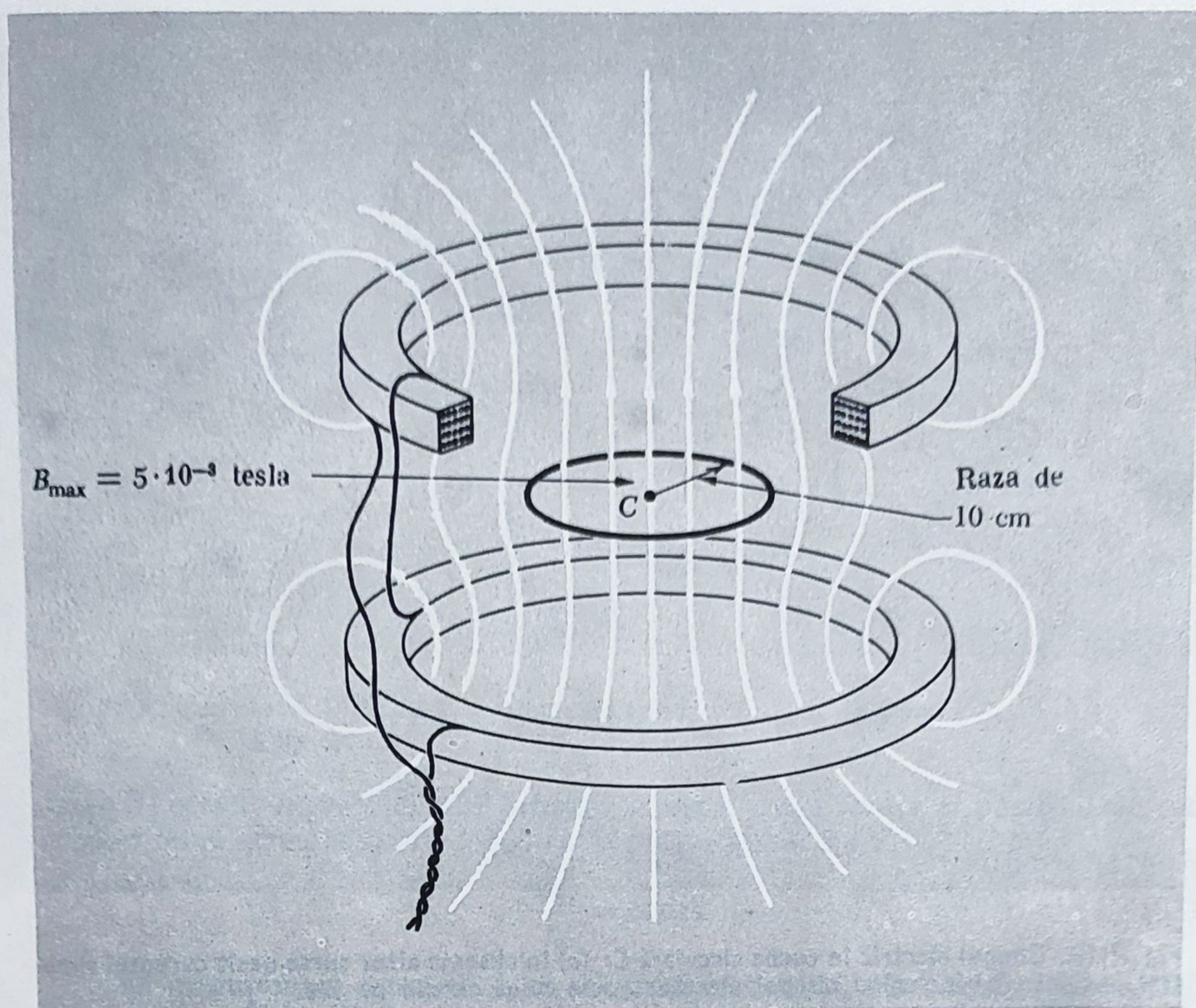


Fig. 7.16. Curentul alternativ produce în bobine un câmp magnetic care, la centru, oscilează între  $5 \cdot 10^{-3}$  tesla orientat în sus și  $5 \cdot 10^{-3}$  tesla orientat în jos. La orice moment câmpul este aproximativ uniform în regiunea cercului  $C$ .

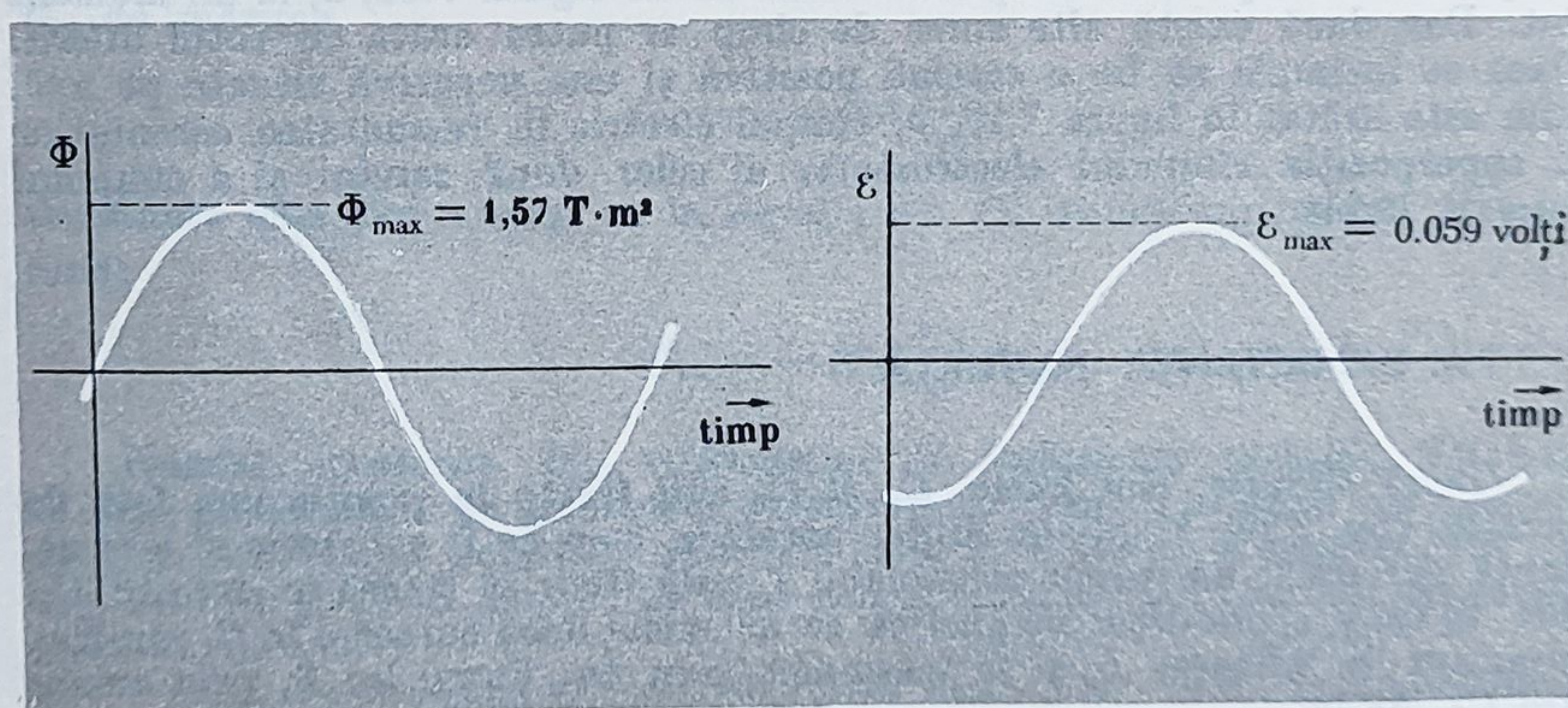


Fig. 7.17. (a) Fluxul prin cercul  $C$ .  
(b) Tensiunea electromotoare corespunzând curbei  $C$ .



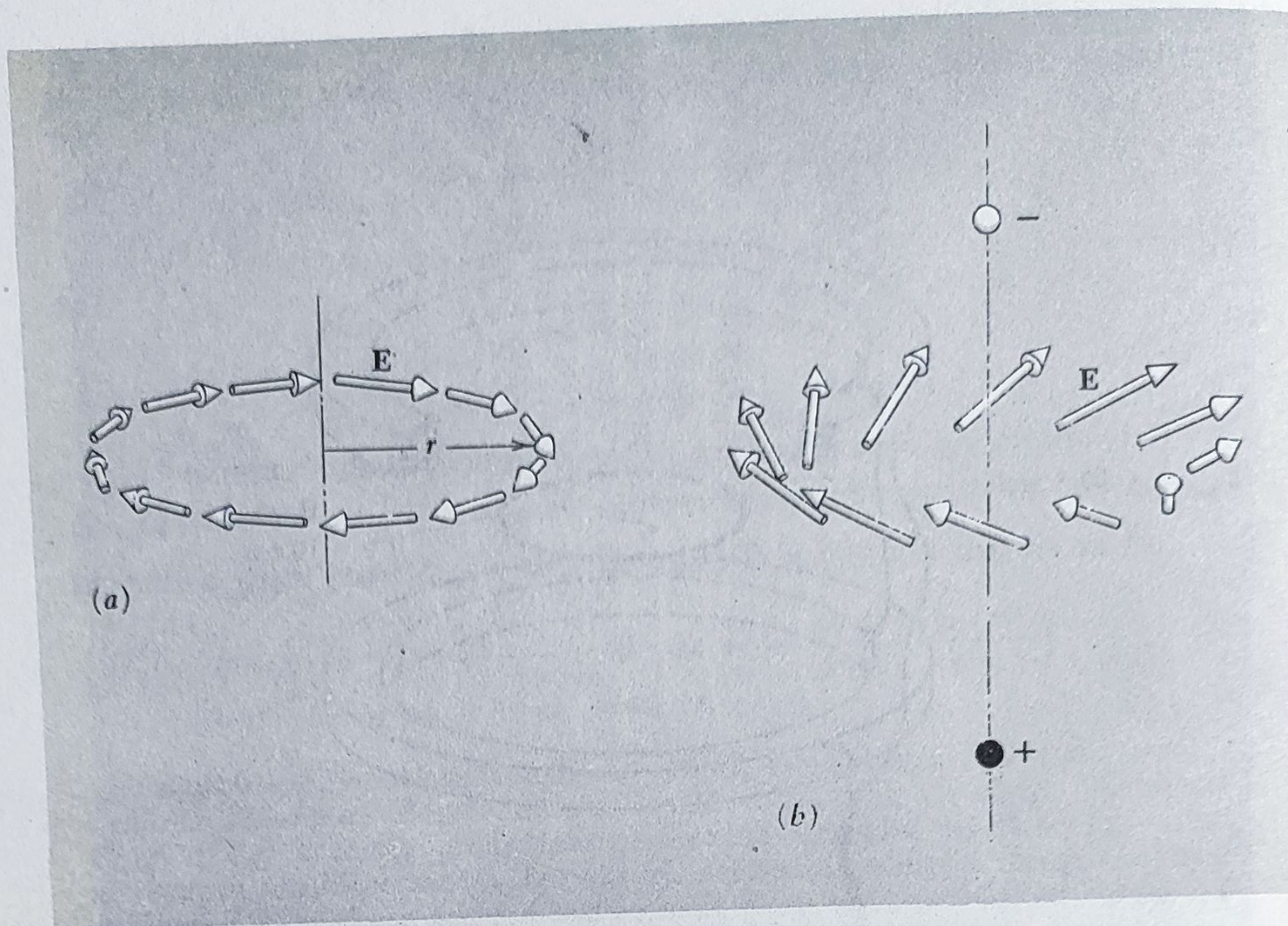


Fig. 7.18. Câmpul electric în curba circulară  $C$ : (a) în absența altor surse decât curentul simetric oscilant; (b) incluzînd câmpul electrostatic a două sarcini pe axă.

mărime constantă. Atunci este o problemă banală a prezice mărimea sa, deoarece  $\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi rE = \mathcal{E}$ , pe care am calculat-o deja. În acest caz, câmpul electric pe cerc ar putea arăta ca în figura 7.18, a, la un moment dat. Dar dacă există alte surse de câmp ar putea arăta cu totul diferit. Dacă se întîmplă să fie o sarcină pozitivă și una negativă situate pe axă, cum este arătat în figura 7.18, b, câmpul electric în vecinătatea cercului ar fi superpoziția câmpului electrostatic al celor două sarcini și a câmpului electric indus.

## 7.6. INDUCTANȚA MUTUALĂ

Două circuite, sau bucle,  $C_1$  și  $C_2$  sînt fixate în poziție una față de cealaltă (fig. 7.19). Printr-un mijloc oarecare, cum ar fi o baterie și o rezistență variabilă, un curent controlabil  $I_1$  este făcut să treacă în circuitul  $C_1$ . Fie  $\mathbf{B}_1(x, y, z)$  inducția magnetică ce ar exista dacă curentul în  $C_1$  rămînea constant la valoarea  $I_1$  și să însemnăm prin  $\Phi_{21}$  fluxul lui  $\mathbf{B}_1$  prin circuitul  $C_2$ . Astfel

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_2 \quad (35)$$



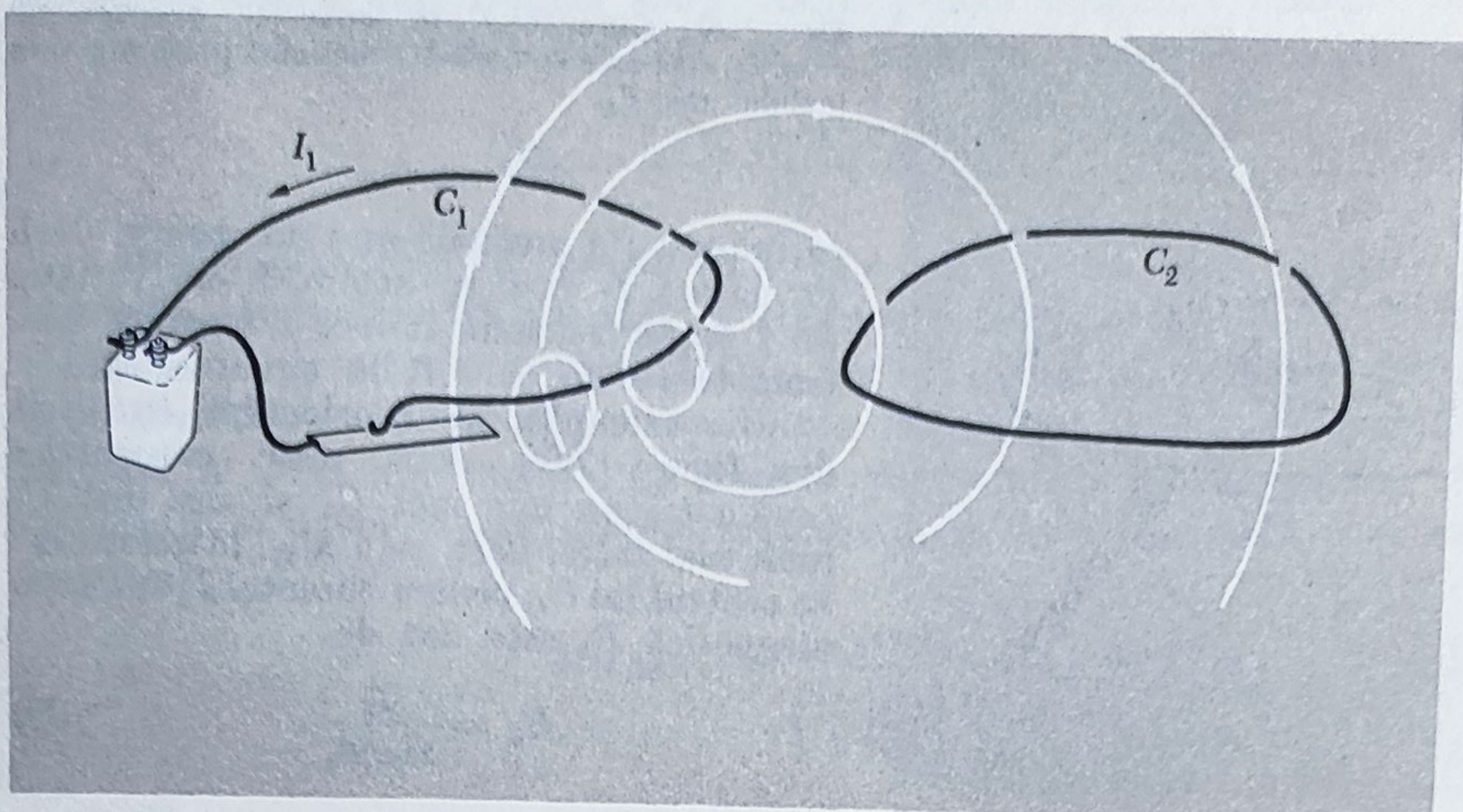


Fig. 7.19. Curentul  $I_1$  în bucla  $C_1$  produce un anumit flux  $\Phi_{21}$  prin bucla  $C_2$ .

unde  $S_2$  este o suprafață care acoperă bucla  $C_2$ . Cu forma și poziția relativă a celor două circuite fixate,  $\Phi_{21}$  va fi proporțional lui  $I_1$ :

$$\frac{\Phi_{21}}{I_1} = \text{const.} \quad (36)$$

Să presupunem acum că  $I_1$  se schimbă cu timpul, dar *destul de lent* astfel încît cîmpul  $B_1$  în orice punct din vecinătatea lui  $C_2$  și curentul  $I_1$  în  $C_1$  la același moment de timp sînt corelate cum ar fi fost pentru curenți staționari. (Pentru a vedea de ce o astfel de restricție este necesară, imaginați-vă că  $C_1$  și  $C_2$  sînt la 10 metri depărtare și facem curentul în  $C_1$  să se dubleze în valoare în 10 nanosecunde!) Fluxul  $\Phi_{21}$  se va schimba în măsura în care  $I_1$  se schimbă. Va exista o tensiune electromotoare indusă în circuitul  $C_2$ , de mărime

$$\mathcal{E}_{21} = -\text{const} \frac{dI_1}{dt}. \quad (37)$$

Constanta este aici aceeași ca în ecuația 36. Să scriem ecuația 37 în acest mod:

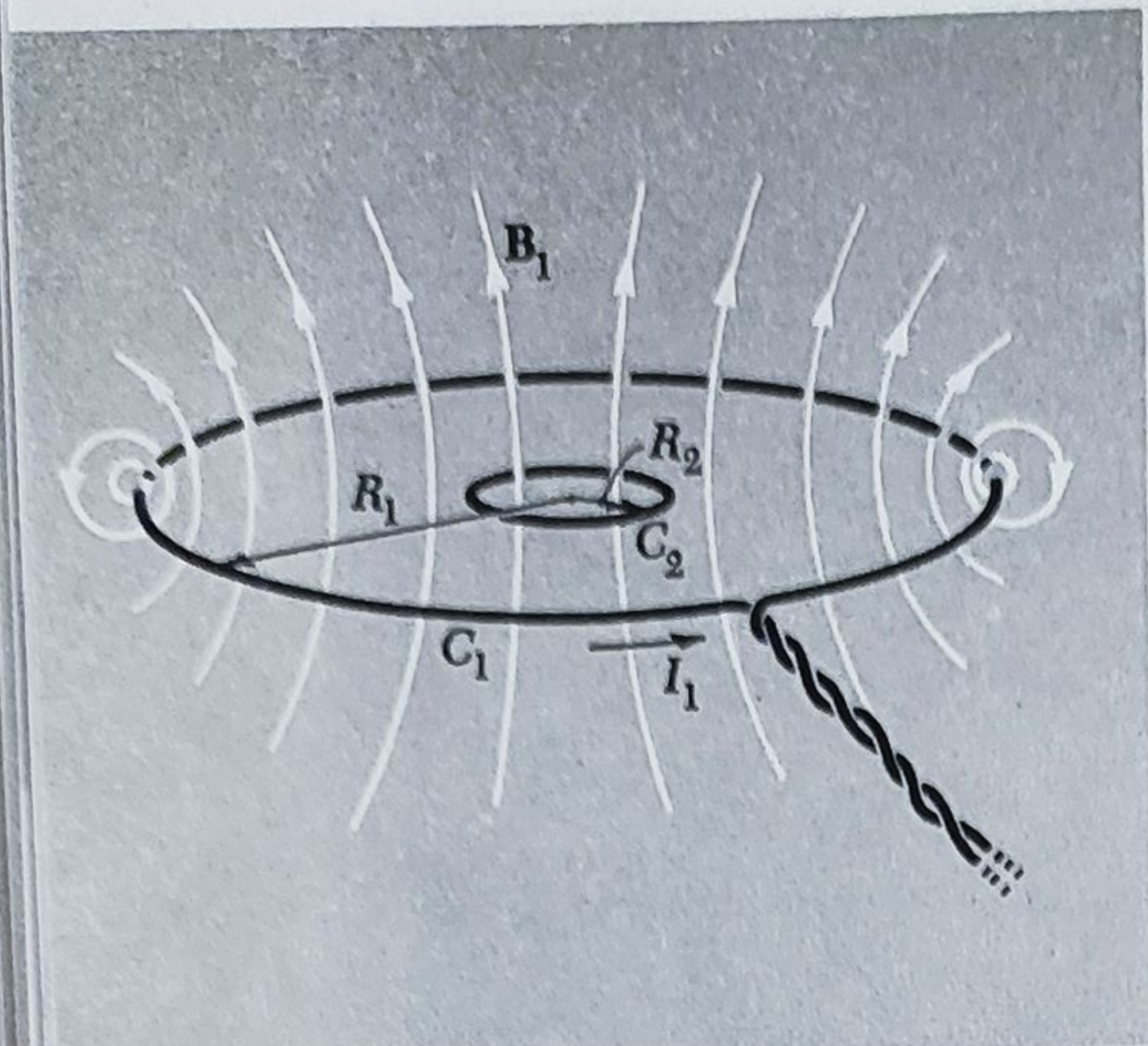
$$\mathcal{E}_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (38)$$

Numim constanta  $M_{21}$  coeficientul de *inductanță mutuală*. Valoarea sa este determinată de geometria dispunerii buclelor. Unitățile vor depinde desigur de alegerea unităților pentru  $\mathcal{E}$ ,  $I$  și  $t$ . În sistemul practic (SI), cu  $\Phi_{21}$  în volt și  $I_1$  în amper,  $M$  este exprimat în *henry*\*. Aceasta înseamnă

\* Unitatea este numită în cinstea lui Joseph Henry (1797–1878), cel mai cunoscut fizician american al vremii sale. Inducția electromagnetică a fost descoperită independent de către Henry, practic în același timp cu experiențele lui Faraday. Henry a fost primul care a observat fenomenul de autoinducție. A perfecționat electromagnetul și prototipul motorului electric, a inventat releul electric și a fost la un pas de a inventa telegrafia.



Fig. 7.20. Curentul  $I_1$  în inelul  $C_1$  produce un câmp  $B_1$  care este aproximativ uniform peste regiunea inelului mic  $C_2$ .



că inductanța mutuală este un henry dacă un curent  $I_1$  care se schimbă cu variație de 1 amper/secundă induce o tensiune electromotoare de 1 volt în circuitul  $C_2$ .

Ca exemplu, să considerăm circuitele din figura 7.20, două inele concentrice coplanare, un mic inel  $C_2$  și un inel  $C_1$  mult mai mare. Care este  $M_{21}$ , în acest caz? În centrul lui  $C_1$ , pentru curentul  $I_1$ , inducția magnetică  $B_1$  este dat de

$$B_1 = \frac{I_1}{2\epsilon_0 c^2 R_1}. \quad (39)$$

cu  $I_1$  în amperi,  $B_1$  în tesla. (Revedeți aliniatul de la începutul § 6.5, care conduce la ecuația 6.42, dacă nu vă amintiți cum se găsește câmpul la centrul unui inel de curent.) Presupunem că  $R_2 \ll R_1$  astfel că putem neglija variația lui  $B_1$  pe interiorul inelului mic. Atunci fluxul prin inelul mic este

$$\Phi_{21} = (\pi R_2^2) \frac{I_1}{2\epsilon_0 c^2 R_1} = \frac{\pi I_1 R_2^2}{2\epsilon_0 c^2 R_1}. \quad (40)$$

Astfel „constanta” din ecuația 36, în acest caz particular, are valoarea  $\pi R_2^2 / 2\epsilon_0 c^2 R_1$  și tensiunea electromotoare indusă în  $C_2$  va fi

$$\Phi_{21} = - \frac{\pi R_2^2}{2\epsilon_0 c^2 R_1} \cdot \frac{dI_1}{dt} \quad (41)$$

cu  $\Phi_{21}$  în volți și  $I_1$  în amperi. Deoarece  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} = 10^{-7}$  în unități SI,

$$\mathcal{E} \text{ (volt)} = - \frac{2\pi^2 R_2^2}{R_1} \times 10^{-7} \frac{dI}{dt}. \quad (42)$$

Astfel valoarea lui  $M_{21}$  în henry, cu  $R_2$  și  $R_1$  în metri, este

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-7} R_2^2}{R_1}. \quad (43)$$

Incidental, semnul minus pe care l-am menținut nu ne spune mult în acest stadiu. Dacă doriți să fiți siguri în ce fel va tinde forța electromotoare să poarte curentul în  $C_2$ , legea lui Lenz este ghidul dumneavoastră cel mai de nădejde.

Dacă circuitul  $C_1$  era alcătuit din  $N_1$  spire de sîrmă în loc de un singur inel, câmpul  $B_1$  la centru ar fi fost de  $N_1$  ori mai puternic, pentru un curent dat  $I_1$ . De asemenea, dacă bucla mică era alcătuită din  $N_2$  spire, toate de aceeași rază  $R_2$ , tensiunea electromotoare în fiecare spirală s-ar adăuga la aceea a următoarei, făcînd tensiunea electromotoare totală în acel circuit



de  $N_2$  ori cea a unei singure spire. Astfel pentru *înfășurări multiple* în fiecare bobină inductanța mutuală va fi dată de

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-7} N_1 N_2 R_2^2}{R_1}. \quad (44)$$

Aceasta presupune că spirele în fiecare bobină sînt strîns înfășurate împreună, secțiunea transversală a înfășurării fiind mică față de raza bobinei. Totuși, inductanța mutuală  $M_{21}$  are un înțeles bine definit pentru două circuite de orice formă sau distribuție. Ea este raportul forței electromotoare în volți din circuitul 2, produsă prin schimbarea de curenți în circuitul 1, la viteza de schimbare a curentului  $I_1$  în amperi/secundă. Aceasta înseamnă,

$$M_{21} \text{ (henry)} = \frac{\mathcal{E}_{21} \text{ (volt)}}{\left(\frac{dI_1}{dt}\right) \left(\frac{\text{A}}{\text{s}}\right)} \quad (45)$$

### 7.7. O TEOREMĂ DE „RECIPROCITATE“

Considerînd circuitele  $C_1$  și  $C_2$  ne-am fi putut interesa despre forța electromotoare indusă în circuitul  $C_1$  de către un curenți variabil în circuitul  $C_2$ . Aceasta ar implica un alt coeficient de inductanță mutuală,  $M_{12}$ :

$$M_{12} = \frac{\mathcal{E}_{12}}{\left(\frac{dI_2}{dt}\right)}. \quad (46)$$

Este un fapt remarcabil că pentru *oricare* două circuite,

$$M_{12} = M_{21}. \quad (47)$$

Aceasta nu este o problemă de simetrie geometrică. Chiar exemplul simplu din figura 7.20 nu este simetric față de cele două circuite. Notați cu  $R_1$  și  $R_2$  intră în mod diferit în expresia pentru  $M_{21}$ ; ecuația 47 afirmă că, pentru aceste două circuite neasemănătoare, dacă  $M_{21} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-7} N_1 N_2 R_2^2}{R_1}$  atunci  $M_{12} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-7} N_1 N_2 R_2^2}{R_1}$  de asemenea — și nu ceea ce am obține prin comutarea peste tot a indicilor 1 și 2!

Pentru a dovedi teorema, ecuația 47, avem de arătat că fluxul  $\Phi_{12}$  printr-un circuit oarecare  $C_1$  ca rezultat al unui curenți  $I$  în circuitul  $C_2$  este egal cu fluxul  $\Phi_{21}$  care străbate circuitul 2 cînd un curenți egal  $I$  curge în circuitul  $C_1$ . Pentru a arăta aceasta, folosim potențialul vector.

După teorema lui Stokes,

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (48)$$



În particular, dacă  $\mathbf{A}$  este potențialul vector al unui câmp magnetic  $\mathbf{B}$ , adică dacă  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , atunci avem

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi_S. \quad (49)$$

Adică, integrala curbilinie a potențialului vector în jurul buclei este egală cu fluxul lui  $\mathbf{B}$  prin buclă.

Acum potențialul vector este legat de sursa de curent cum urmează, în conformitate cu ecuația 6.35:

$$\mathbf{A}_{21} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{d\mathbf{s}_1}{r_{21}}. \quad (50)$$

$\mathbf{A}_{21}$  este potențialul vector, într-un punct oarecare  $(x_2, y_2, z_2)$  al câmpului magnetic generat de curentul  $I$  (amperi) care trece în circuitul  $C_1$ ;  $d\mathbf{s}_1$  este un element al buclei  $C_1$ ; și  $r_{21}$  este mărimea distanței de la acel element la punctul  $(x_2, y_2, z_2)$ .

Figura 7.21 arată cele două bucle  $C_1$  și  $C_2$ , cu curentul  $I$  curgând în  $C_1$ . Fie  $(x_2, y_2, z_2)$  un punct pe bucla  $C_2$ . Atunci fluxul prin  $C_2$  datorit curentului  $I$  în  $C_1$  este:

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \int_{C_2} \mathbf{A}_{21} \cdot d\mathbf{s}_2 = \int_{C_2} d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{A}_{21} = \\ &= \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{C_2} d\mathbf{s}_2 \cdot \int_{C_1} \frac{d\mathbf{s}_1}{r_{21}}. \end{aligned} \quad (51)$$

Analog, fluxul prin  $C_1$  datorat curentului  $I$  care trece prin  $C_2$  ar fi dat de

$$\Phi_{12} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{C_1} d\mathbf{s}_1 \cdot \int_{C_2} \frac{d\mathbf{s}_2}{r_{12}}. \quad (52)$$

Acum  $r_{12} = r_{21}$ , deoarece acestea sînt mărimi de distanțe, și nu vectori. Înțelesul fiecăreia din integralele de mai sus este: Luați produsul scalar al unei perechi de elemente de curbă, cite unul pe fiecare buclă, împărțiți prin distanța dintre ele și însumați peste toate perechile. Singura diferență între ecuația 51 și ecuația 52 este *ordinea* în care operația este efectuată, și aceasta nu poate afecta suma finală. De aici  $\Phi_{12} = \Phi_{21}$ , de unde urmează direct că  $M_{12} = M_{21}$ . Datorită acestei teoreme, nu

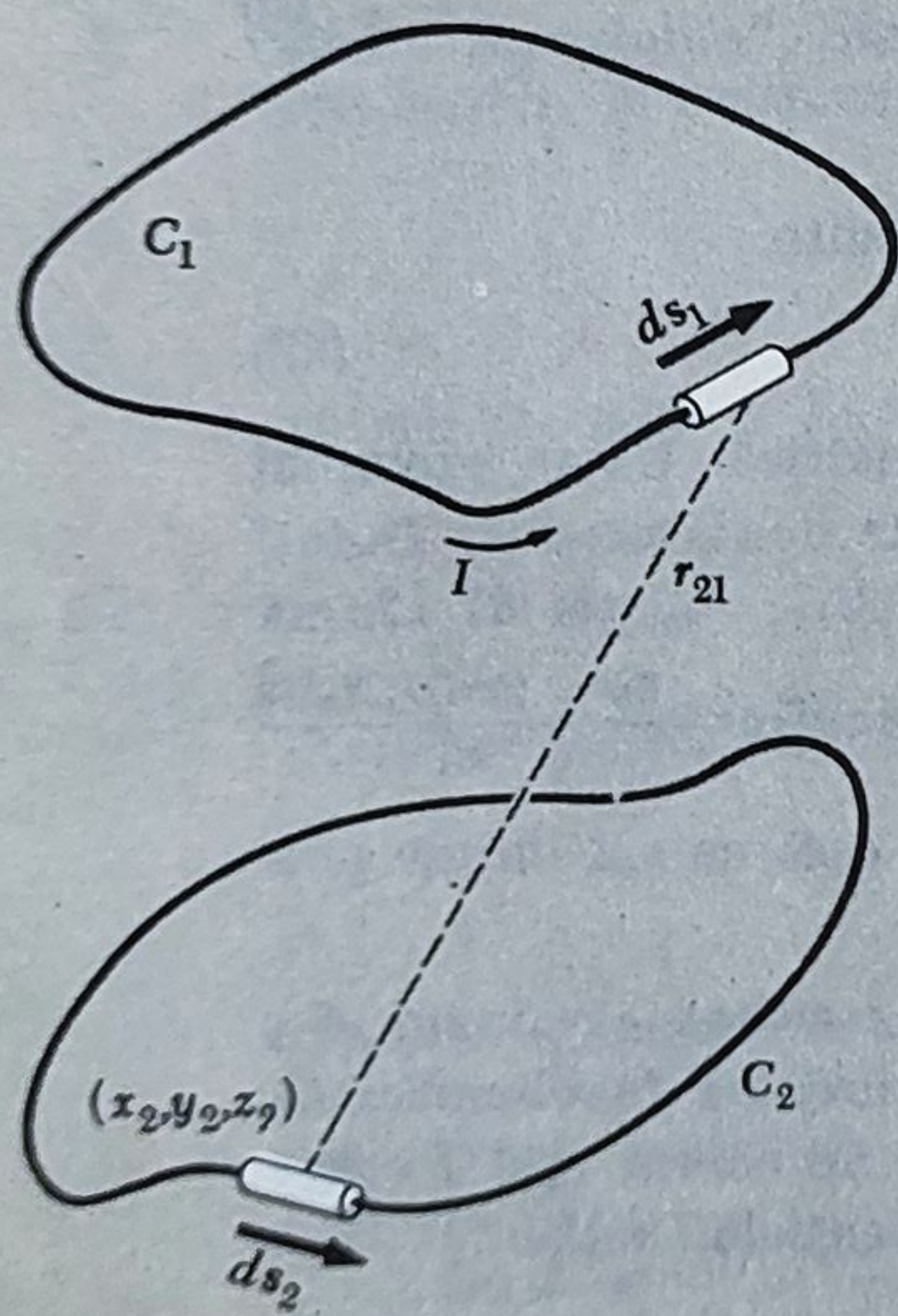


Fig. 7.21. Calcularea fluxului  $\Phi_{21}$  care trece prin  $C_2$  ca rezultat al curentului  $I$  care curge în  $C_1$ .



avem nevoie să facem nici o distincție între  $M_{12}$  și  $M_{21}$ . Putem vorbi, de aici înainte, de inductanța mutuală  $M$  a oricăror două circuite.

Teoreme de acest fel sînt adesea numite teoreme de „reciprocitate”. Există cîteva alte teoreme de reciprocitate despre circuitele electrice, nu nelegate de cea de aici. Aceasta poate să vă reamintească de relația  $C_{jk} = C_{kj}$  menționată în § 3.6 și tratată în problema 3.27. O relație de reciprocitate exprimă uzual o oarecare lege de simetrie generală care nu este aparentă în structura superficială a sistemului. Veți întîlni o lege de reciprocitate extrem de cuprinzătoare cînd studiați transmiterea undelor electromagnetice.

## 7.8. AUTOINDUCȚIA

Cînd curentul  $I_1$  se schimbă, există o schimbare în fluxul prin însuși circuitul  $C_1$ , în consecință este indusă o tensiune electromotoare. Să o numim  $\mathcal{E}_{11}$ . Legea inducției se menține, oricare ar fi sursa fluxului:

$$\mathcal{E}_{11} = - \frac{d\Phi_{11}}{dt} \quad (53)$$

unde  $\Phi_{11}$  este fluxul prin circuitul 1 al cîmpului  $B_1$  datorat curentului  $I_1$  în circuitul 1. Semnul minus exprimă faptul că tensiunea electromotoare este totdeauna orientată astfel încît să se opună schimbării de curent — din nou legea lui Lenz. Deoarece  $\Phi_{11}$  va fi proporțională lui  $I_1$ , putem scrie

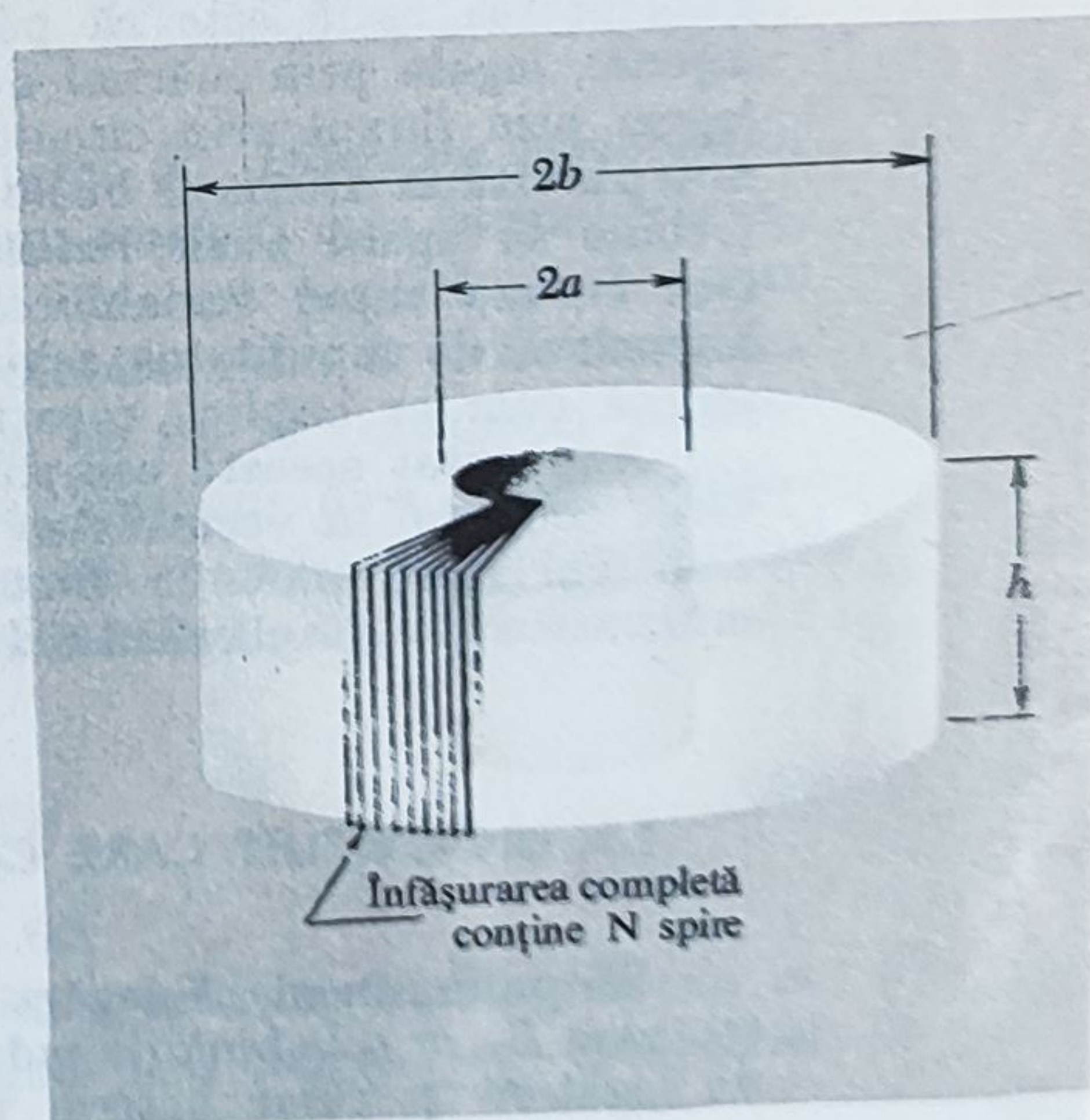
$$\mathcal{E}_{11} = -L_1 \frac{dI_1}{dt}. \quad (54)$$

Constanta  $L_1$  este numită *inductanța* circuitului.

Ca *exemplu* de circuit pentru care  $L_1$  poate fi calculată, să considerăm bobina dreptunghiulară toroidală din problema 6.19, arătată din nou aici în figura 7.22. Ați găsit (dacă ați lucrat acea problemă) că un curent  $I$ , în amperi, care trece în bobina de  $N$  spire produce un cîmp a cărui intensitate, la o rază  $r$  de la axa bobinei, este dată de  $B = NI/2\pi\epsilon_0 c^2 r$ . Fluxul total printr-o spirală a bobinei este integrala acestui cîmp peste secțiunea transversală a bobinei

$$\Phi (\text{o spirală}) = h \int_a^b \frac{NI}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} dr = \frac{NIh}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{b}{a}. \quad (55)$$

Fig. 7.22. O bobină toroidală de secțiune transversală dreptunghiulară. Sînt arătate numai cîteva spire.





Fluxul care străbate circuitul de  $N$  spire este de  $N$  ori mai mare:

$$\Phi = \frac{N^2 I h}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (56)$$

De aici tensiunea electromotoare indusă este

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{N^2 h}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{dI}{dt}. \quad (57)$$

Astfel autoinductanța acestei bobine este dată de

$$L = \frac{N^2 h}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (58)$$

Pentru  $I$  în amperi și  $\mathcal{E}$  în volți,  $h$  în metri, unitatea corespunzătoare pentru  $L$  este henry-ul, ca în cazul inductanței mutuale. În aceste unități avem:

$$L \text{ (henry)} = 2 \times 10^{-7} N^2 h \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (59)$$

Puteți gândi că unul dintre inelele pe care le-am considerat mai înainte ar fi fost un exemplu mai simplu pentru ilustrarea calculului inductanței. Totuși, dacă încercăm să calculăm inductanța unei simple bucle circulare de sîrmă, întîlnim o dificultate bizară. Pare o bună idee a simplifica problema prin presupunerea că firul are diametrul zero. Dar descoperim îndată că dacă un curent finit circulă printr-un filament de diametru zero, fluxul care străbate o buclă dintr-un astfel de filament este infinit! Rațiunea este că cîmpul  $B$ , în vecinătatea unui curent filamentar, variază ca  $1/r$  unde  $r$  este distanța de la filament, și integrala lui  $B \times$  aria diverge ca  $\int (dr/r)$


cînd o extindem pînă la  $r = 0$ . Pentru a evita aceasta putem lăsa raza firului finită, nu zero, care este în orice caz mai realistă. Aceasta poate face calculul ceva mai complicat, într-un caz dat, dar aceasta nu ne va îngrijora. Dificultatea reală este că părți diferite ale firului apar acum ca circuite diferite, legate prin mărimi de flux diferite. Nu mai sîntem siguri ce înțelegem prin fluxul prin circuit. De fapt, deoarece tensiunea electromotoare este diferită în diferitele bucle filamentare în care se poate împărți circuitul, trebuie să apară unele *redistribuirii* de densitate de curent cînd prin inel trec curenți rapid variabili. De aici inductanța circuitului poate depinde intrucîtva de rapiditatea schimbării lui  $I$ , și astfel să nu fie strict o constantă cum ar implica ecuația 54.

Am evitat această complicație în exemplul bobinei toroidale prin ignorarea cîmpului în vecinătatea imediată a spirelor individuale în înfășurare. Cea mai mare parte a fluxului *nu* trece prin firele înseși și ori de cîte ori aceasta se întîmplă efectul de care tocmai ne-am ocupat va fi neimportant.

## 7.9. UN CIRCUIT CARE CONȚINE AUTOINDUCTANȚĂ

Să presupunem că legăm o baterie, care debitează tensiunea electromotoare  $\mathcal{E}_0$ , la o bobină de inductanță  $L$ , ca în figura 7.23, *a*. Bobina, firele de legătură și chiar bateria vor avea o oarecare rezistență. Nu ne inte-



rezează cum este distribuită aceasta în circuit. Ea poate fi însumată într-o rezistență  $R$ , indicată pe diagrama de circuit a figurii 7.23,  $b$  printr-un simbol de rezistență cu această valoare. De asemenea, restul circuitului, în special firele de legătură, contribuie puțin la inductanța întregului circuit; presupunem că aceasta este cuprinsă în  $L$ . Cu alte cuvinte, figura 7.23,  $b$  reprezintă o idealizare a circuitului fizic: bobina  $L$ , simbolizată prin , nu are rezistență; rezistorul  $R$  nu are inductanță. Acest circuit idealizat îl vom analiza acum.

Dacă curentul  $I$  în circuit variază cu rata  $dI/dt$ , va fi indusă o tensiune electromotoare  $LdI/dt$ , într-un sens care să se opună acestei schimbări. De asemenea, există tensiunea electromotoare constantă  $\mathcal{E}_0$  a bateriei. Dacă definim direcția pozitivă a curentului ca aceea în care bateria tinde să poarte curentul în jurul circuitului, atunci tensiunea electromotoare netă la orice moment este  $\mathcal{E}_0 - LdI/dt$ . Aceasta face curentul să treacă prin rezistența  $R$ . Adică,

$$\mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} = RI. \quad (60)$$

Putem de asemenea descrie situația în acest fel: Diferența de potențial între punctele  $A$  și  $B$ , pe care o vom numi *tensiune de-a lungul bobinei*, este  $L dI/dt$ , cu extremitatea de sus a inductanței pozitivă dacă  $I$  este *crescător* în direcția arătată. Diferența de potențial între  $B$  și  $C$ , tensiunea de-a lungul rezistenței, este  $RI$ , cu capătul de sus al rezistenței pozitiv. De aici suma tensiunii de-a lungul bobinei și tensiunii de-a lungul rezistorului este  $L dI/dt + RI$ . Aceasta este aceeași cu diferența de potențial între bornele bateriei, care este  $\mathcal{E}_0$  (bateria noastră idealizată nu are rezistență internă). Astfel avem

$$\mathcal{E}_0 = L \frac{dI}{dt} + RI \quad (61)$$

care este o simplă reformulare a ecuației 60.

Înainte de a privi la soluția matematică a ecuației 60, să prezicem ce este de așteptat să se întâmple în acest circuit dacă comutatorul este închis

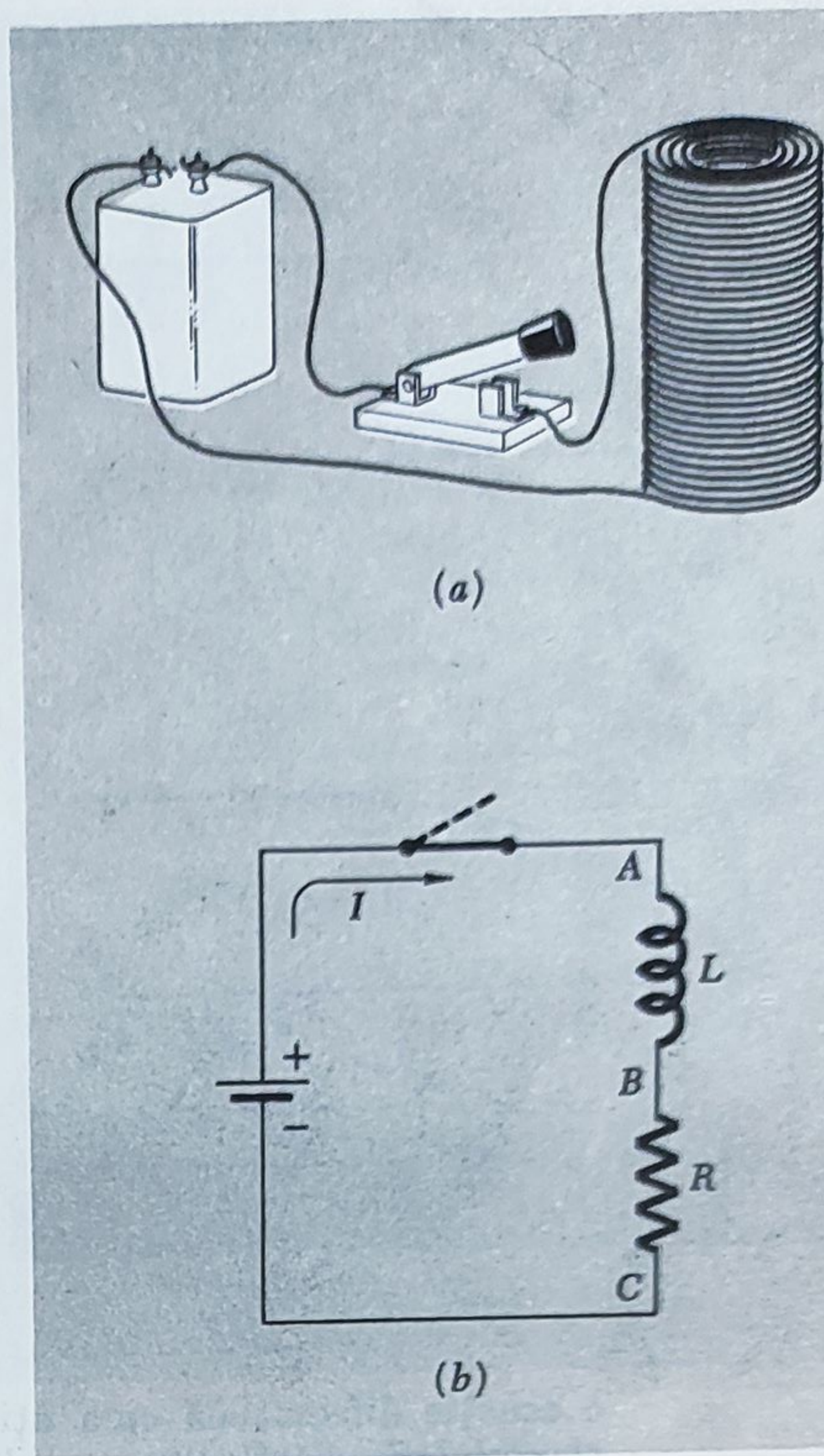
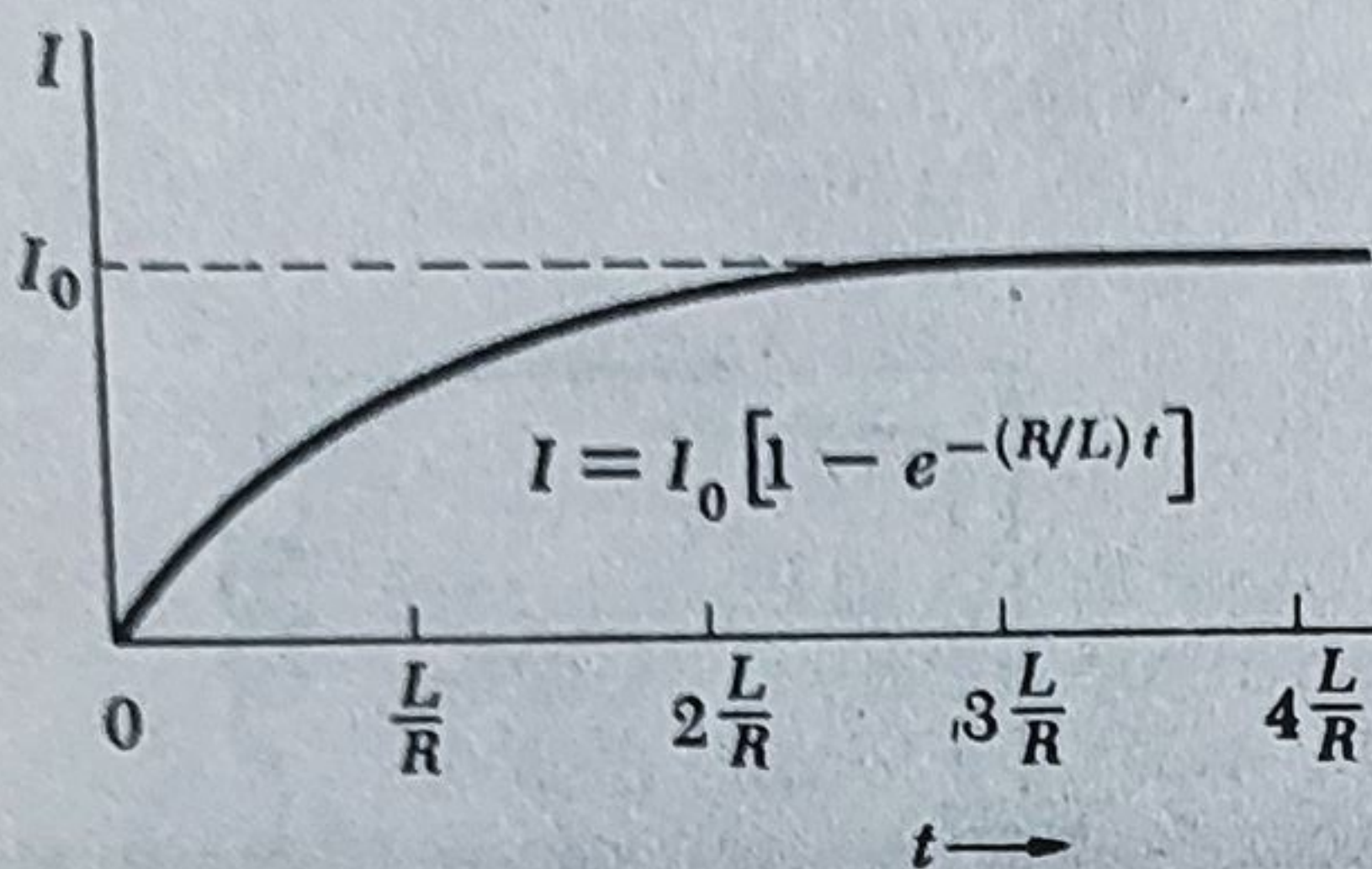
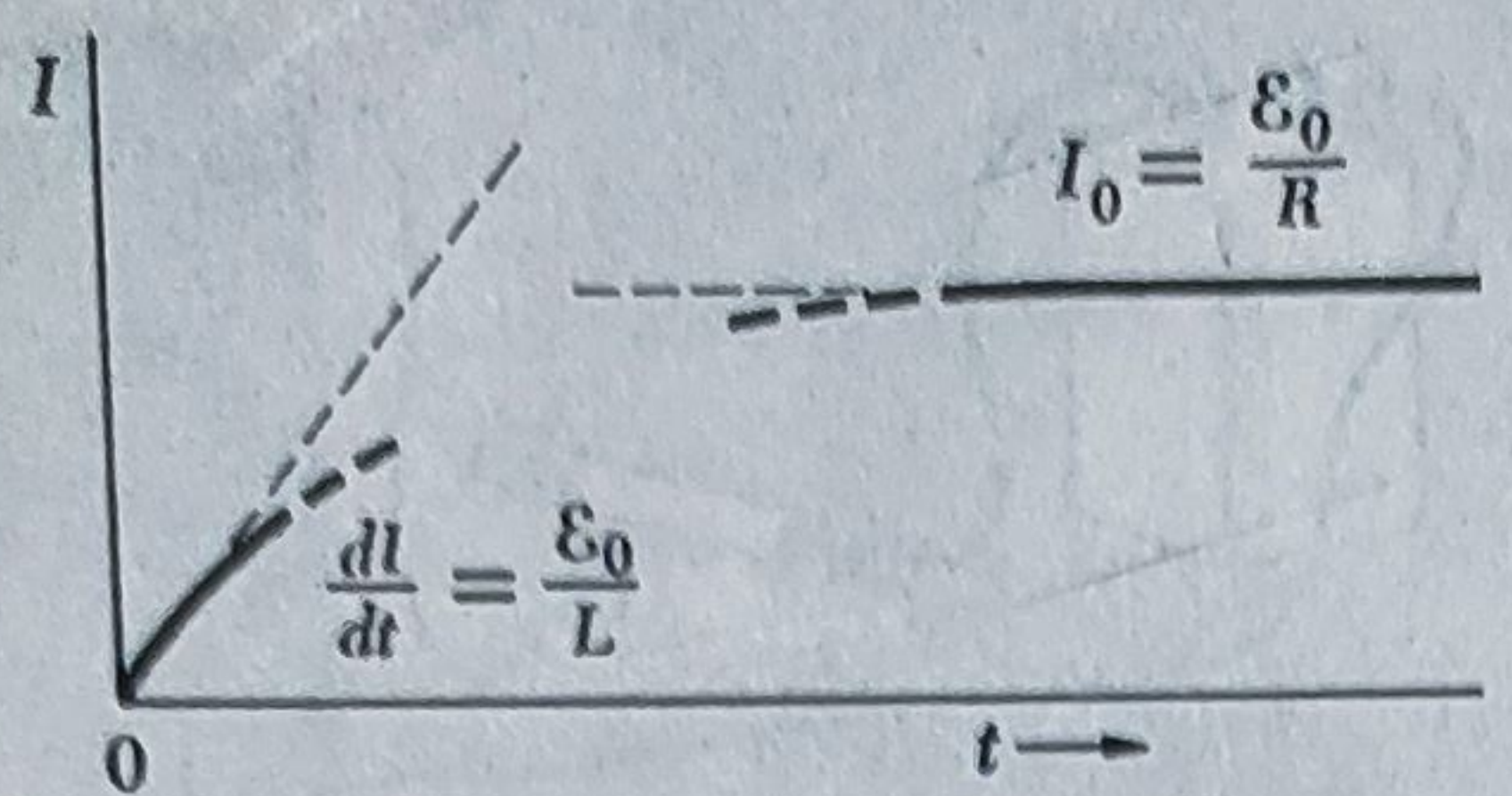


Fig. 7.23. Un circuit simplu cu inductanță (a) și rezistență (b).



Fig. 7.24. (a) Cum trebuie să se comporte curentul la momentul inițial și după ce s-a scurs foarte mult timp. (b) Variația completă a curentului cu timpul în circuitul din fig. 7.23.



la  $t = 0$ . Înainte de închiderea comutatorului, curentul este în mod necesar  $I = 0$ . Mult timp după ce comutatorul a fost închis, o stare oarecare staționară va fi fost atinsă, cu curent practic constant la o oarecare valoare  $I_0$ . Atunci și pe urmă,  $dI/dt \approx 0$  și ecuația 60 se reduce la

$$\mathcal{E}_0 = RI_0. \quad (62)$$

Tranziția de la curent zero la curent de stare staționară  $I_0$  nu poate interveni brusc la  $t = 0$ , deoarece  $dI/dt$  ar fi infinită. De fapt, imediat după  $t = 0$ , curentul  $I$  va fi atât de mic încât cel de-al doilea termen  $RI$  în ecuația 60 poate fi neglijat, dând

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{L}. \quad (63)$$

Inductanța  $L$  limitează rata de creștere a curentului.

Ceea ce știm acum este rezumat în figura 7.24, a. Rămîne doar de găsit cum are loc întreagă trecerea. Ecuația 60 este o ecuație diferențială cum ați întâlnit deja în § 4.11 și în volumul I, capitolul 6. Fără alte considerații putem scrie o soluție a ecuației 60 care satisface condiția noastră inițială,  $I = 0$  la  $t = 0$ .

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} (1 - e^{-(R/L)t}). \quad (64)$$

Graficul din figura 7.24, b arată curentul care atinge valoarea sa asimptotică  $I_0$  în mod exponențial. „Constanta de timp” a acestui circuit este cantitatea  $L/R$ . Dacă  $L$  este măsurat în henry și  $R$  în ohmi, aceasta rezultă în secunde, deoarece henry  $\sim$  volt/(amper/secundă), și ohm  $\sim$  volt/(amper/secundă).

Ce se întâmplă dacă deschidem comutatorul după ce curentul  $I_0$  a fost stabilit, forțînd astfel curentul să cadă brusc la zero? Aceasta ar face termenul  $LdI/dt$  infinit negativ! Catastrofa poate fi mai mult decît matematică. Au fost omorîți oameni deschizînd comutatoare în circuite de înaltă inductivitate. Ceea ce se întâmplă în general este că o tensiune indusă foarte înaltă produce o scînteie sau arc de-a lungul contactelor comutatorului deschis, astfel încît curentul continuă și pe urmă. Să îndepărtăm în schimb bateria din circuit închizînd o cale conductoare de-a lungul combinației  $LR$  ca în figura 7.25, a, în același timp deconectînd bateria. Avem acum un circuit descris de ecuația

$$0 = L \frac{dI}{dt} + RI \quad (65)$$



Fig. 7.25. (a) Circuit LR. (b) Atenuare exponențială a curentului în circuitul LR.

cu condiția inițială  $I = I_0$  la  $t = t_1$ , unde  $t_1$  este momentul la care scurtcircuitul a fost închis. Soluția este simplă funcția de descreștere exponențială:

$$I = I_0 e^{-(R/L)(t-t_1)} \quad (66)$$

cu același timp caracteristic  $L/R$  ca înainte.

### 7.10. ENERGIA ÎNMAGAZINATĂ ÎN CÎMPUL MAGNETIC

În timpul procesului de stingere a curentului descris de ecuația 66 și figura 72.5, b, este dirijată energie în rezistența  $R$ . Deoarece energia  $dW$  dirijată în fiecare interval scurt  $dt$  este  $RI^2 dt$ , energia totală dirijată după închiderea comutatorului la momentul  $t_1$  trebuie să fie:

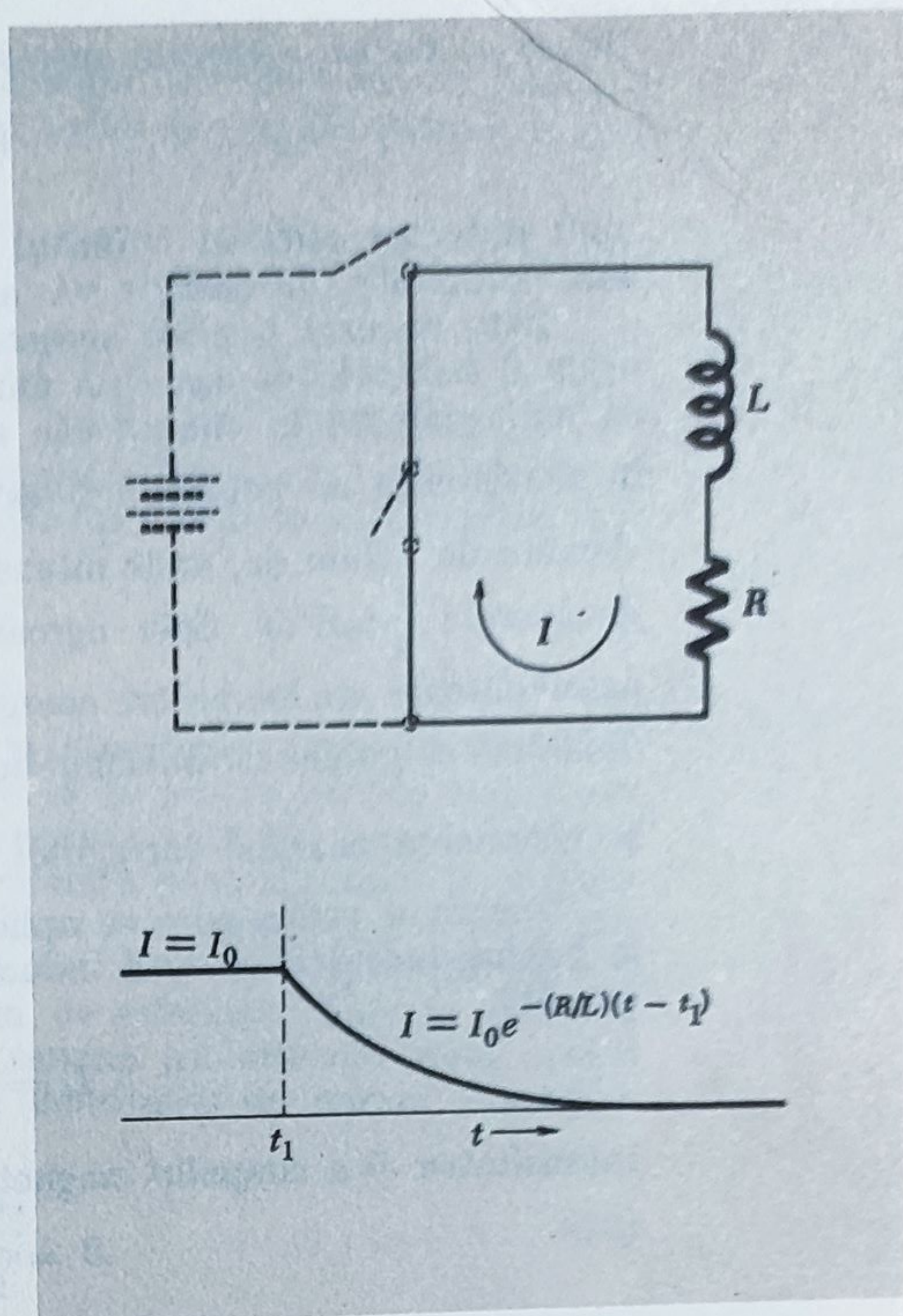
$$W = \int_{t_1}^{\infty} RI^2 dt = \int_{t_1}^{\infty} RI_0^2 e^{-(2R/L)(t-t_1)} dt. \quad (67)$$

Cu substituția  $x = 2R(t - t_1)/L$  aceasta este ușor evaluată:

$$W = RI_0^2 \left( \frac{L}{2R} \right) \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2} LI_0^2. \quad (68)$$

Sursa acestei energii a fost inductanța cu cîmpul ei magnetic. Într-adevăr, exact acea cantitate de lucru a fost efectuată de baterie pentru a instala mai întâi curentul — în afara energiei dirijate în rezistență între  $t = 0$  și  $t = t_1$ , care a fost de asemenea furnizată de baterie. Pentru a vedea că aceasta este o relație generală, notați că dacă avem un curent crescător într-o inductanță, trebuie să se efectueze lucru pentru a întreține curentul împotriva forței electromotoare  $LdI/dt$ . Astfel lucrul efectuat în timpul  $dt$  este

$$dW = LI \frac{dI}{dt} dt = LI dI = \frac{1}{2} Ld(I^2). \quad (69)$$





De aceea, putem atribui o energie totală

$$W = \frac{1}{2} LI^2, \quad (70)$$

unui inductor purtând curentul  $I$ . La eventuala stingere a acestui curent, acea cantitate de energie va apare altundeva.

Este natural a privi aceasta ca energie înmagazinată în câmpul magnetic al bobinei, tot așa cum am descris energia unui condensator încărcat ca înmagazinată în câmpul său electric. Energia unui condensator încărcat la o diferență de potențial  $U$  este  $\frac{1}{2} CU^2$ , și este obținută atribuind unui element de volum  $dv$ , unde intensitatea câmpului electric este  $E$ , o cantitate de energie  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dv$ . Este agreabil, dar, a găsi că o relație întru totul asemănătoare are loc pentru energia înmagazinată într-o inductanță. Aceasta înseamnă că putem atribui câmpului magnetic o densitate de energie  $\frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 B^2$ , și însumarea energiei întregului câmp va da energia  $\frac{1}{2} LI^2$ .

Pentru a vedea cum se aplică aceasta într-un caz, ne putem întoarce la bobina toroidală a cărei inductanță  $L$  am calculat-o în § 7.8. Am găsit (ec. 58)

$$L = \frac{N^2 h}{2\pi \epsilon_0 c^2} \ln \left( \frac{b}{a} \right). \quad (71)$$

Intensitatea  $B$  a câmpului magnetic, pentru curentul  $I$ , a fost dată

$$B = \frac{NI}{2\pi \epsilon_0 c^2 r} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}. \quad (72)$$

Pentru a calcula integrala de volum a lui  $\frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 B^2$  putem folosi un element de volum constând din pătura cilindrică schițată în figura 7.26, cu volumul  $2\pi r h dr$ . Când această pătură trece de la  $r = a$  la  $r = b$ , ea mătură întreg spațiul care conține câmp magnetic. (Dacă vă amintiți inducția magnetică  $B$  este zero peste tot în afara torului.)

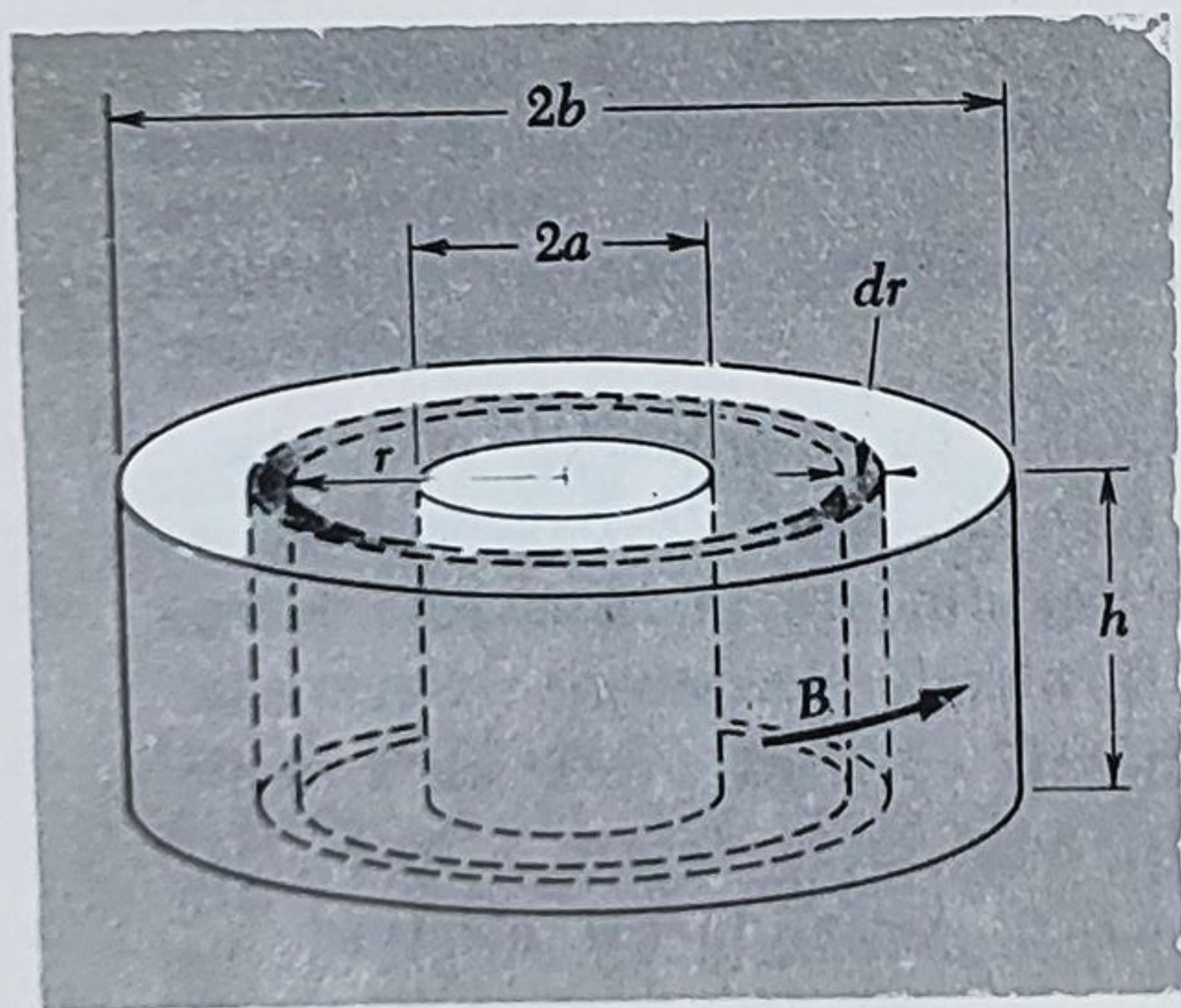


Fig. 7.26. Calcularea energiei înmagazinate în câmpul magnetic al bobinei toroidale din fig. 7.22.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 \int B^2 dv &= \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 \int_a^b \left( \frac{NI}{2\pi \epsilon_0 c^2 r} \right)^2 2\pi r h dr = \\ &= \frac{N^2 h I^2}{4\pi \epsilon_0 c^2} \ln \left( \frac{b}{a} \right). \end{aligned} \quad (73)$$

Comparînd acest rezultat cu ecuația 71, vedem că, într-adevăr

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 \int B^2 dv = \frac{1}{2} LI^2. \quad (74)$$

Propoziția mai generală, perechea propoziției despre câmpul electric din ecuația 1.36, este că energia  $W$  de asociat cu orice câmp magnetic  $B(x, y, z)$  este dată de:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 \int_{\text{câmpul întreg}} B^2 dv. \quad (75)$$



Cu  $B$  în Tesla și  $v$  în metri cubi,  $W$  în ecuația 75 va fi dat în joule. În ecuația 70, folosind unitățile practice SI, henry și amper, pentru  $L$  și  $I$ ,  $W$  va fi de asemenea dat în joule.

### 7.11. „CEVA LIPSEȘTE“

Să revedem relațiile între sarcini și câmpuri. După cum am învățat în capitolul 2, o enunțare echivalentă a legii lui Coulomb este relația diferențială

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (76)$$

care leagă densitatea de sarcină electrică  $\rho$  și intensitatea câmpului electric  $\mathbf{E}$ . Aceasta se menține pentru sarcini în mișcare ca și pentru sarcini staționare. Adică,  $\rho$  poate fi o funcție de timp ca și de poziție. Cum am pus în evidență în capitolul 5, faptul că ecuația 76 este valabilă pentru sarcini în mișcare este consistent cu *invarianța de sarcină*. Oricum s-ar mișca o particulă încărcată, sarcina sa, măsurată prin integrala lui  $\mathbf{E}$  pe o suprafață care o înconjoară, apare aceeași în oricare sistem de referință. Sarcina electrică în mișcare este curent electric. Deoarece sarcina nu este niciodată creată sau distrusă, densitatea de sarcină  $\rho$  și densitatea de curent  $\mathbf{J}$  satisfac totdeauna condiția

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (77)$$

Am scris prima oară această „Ecuatie de continuitate“ ca ecuația 4.9.

Dacă densitatea de curent  $\mathbf{J}$  este constantă în timp, o numim o distribuție de curent staționară. Câmpul magnetic al unei distribuții de curent staționare satisface ecuația.

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (78)$$

Am lucrat cu această relație în capitolul 6.

Acum sîntem interesați în distribuția de sarcini și câmpuri care variază în timp. Să presupunem că avem o distribuție de sarcină  $\rho(x, y, z, t)$  cu  $\partial \rho / \partial t \neq 0$ . De exemplu, am putea avea un condensator care se descarcă printr-o rezistență. În conformitate cu ecuația 77,  $\partial \rho / \partial t \neq 0$  implică

$$\operatorname{div} \mathbf{J} \neq 0. \quad (79)$$

Dar după ecuația 78, deoarece divergența rotorului *oricărei* funcții vectoriale este identic nulă (vezi prob. 2.15)

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) = 0. \quad (80)$$

Contradicția arată că ecuația 78 *nu poate fi corectă* pentru un sistem în care densitatea de sarcină este variabilă în timp. Desigur, nimeni nu a pretins aceasta; o distribuție de curent staționară, pentru care ecuația 78 are loc, este una în care nici densitatea de curent  $\mathbf{J}$ , în afară de densitatea de sarcină  $\rho$ , nu depinde de timp.



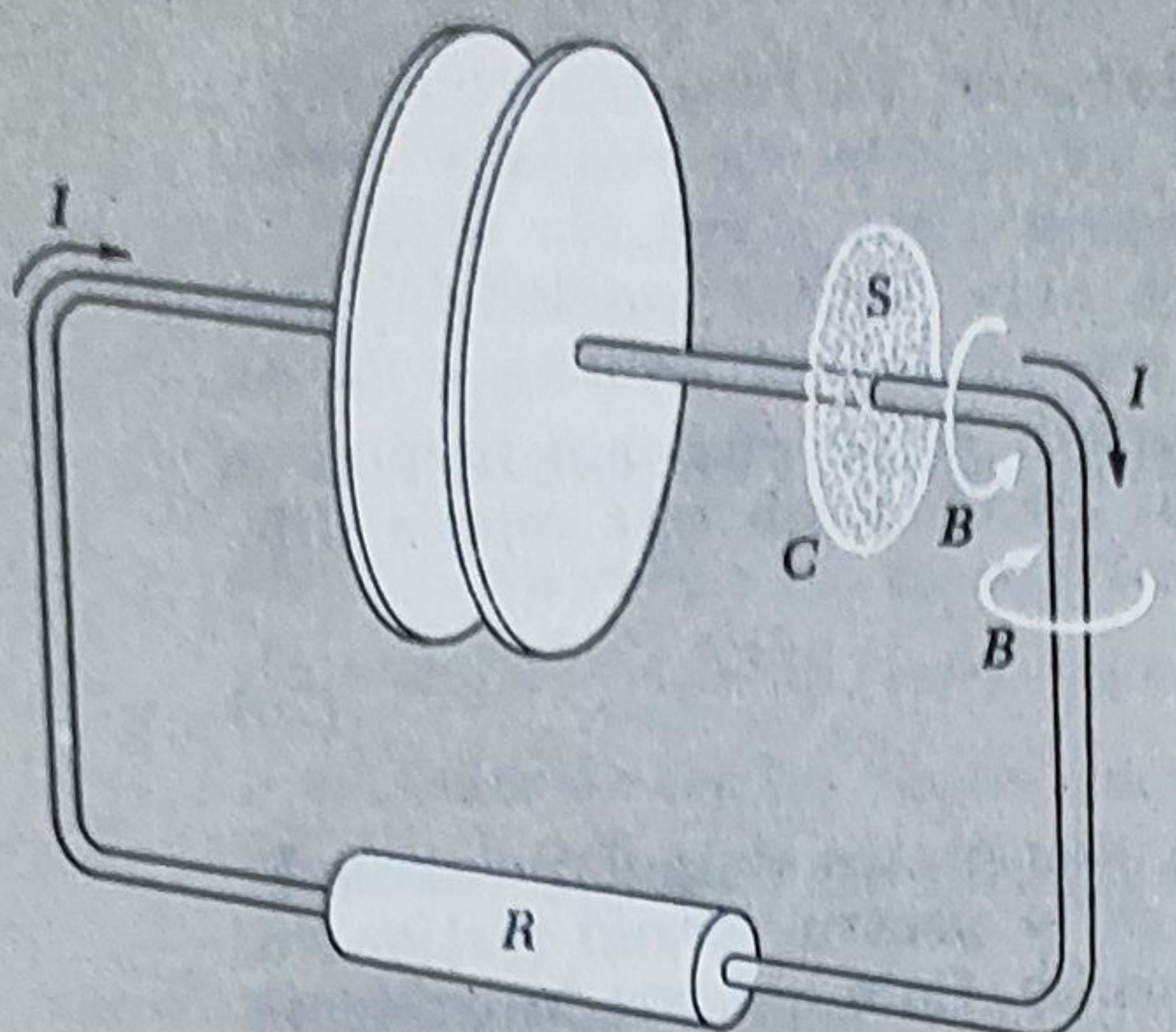


Fig. 7.27. După încărcare cu armătura dreaptă pozitivă, condensatorul se descarcă prin rezistență. Există un câmp de inducție magnetică  $B$  în jurul firului. Integrala lui  $\text{rot } B$ , pe suprafața  $S$  care trece prin fir, are valoarea  $I/\epsilon_0 c^2$ .

Problema se poate pune în termeni întrucâtva diferiți considerând integrala curbilinie de câmp magnetic în jurul firului care transportă în afară sarcina de la placa de condensator din figura 7.27. După teorema lui Stokes,

$$\int_C B \cdot dl = \int_S \text{rot } B \cdot da. \quad (81)$$

Suprafața  $S$  trece chiar prin conductorul în care trece curentul  $I$ . În interiorul acestui conductor,  $\text{rot } B$  are o valoare finită, anume  $J/\epsilon_0 c^2$ , și integrala din dreapta rezultă egală cu  $I/\epsilon_0 c^2$ . Aceasta înseamnă că, dacă curba  $C$  este în vecinătatea firului și departe de spațiul dintre plăci, mărimea câmpului magnetic de acolo nu diferă de câmpul în jurul oricărui fir care poartă același curent. Acum suprafața  $S'$  în figura 7.28 este de asemenea o suprafață care acoperă  $C$ , și poate fi folosită la fel de bine în aplicarea teoremei lui Stokes, ecuația 81. Prin această suprafață, totuși, *nu trece curent de loc!* Totuși,  $\text{rot } B$  nu poate fi zero peste tot pe  $S'$  fără a încălca teorema lui Stokes. De aceea, pe

$S'$ ,  $\text{rot } B$  trebuie să depindă de încă altceva decât de densitatea de curent  $J$ .

Putem doar trage concluzia că ecuația 78 este de înlocuit printr-o oarecare altă relație, în situația mai generală a distribuțiilor de sarcină variabile. Să scriem în loc

$$\text{rot } B = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} J + (?) \quad (82)$$

și să vedem dacă putem descoperi ce trebuie (?) să fie.

O altă linie de gândire sugerează răspunsul. Amintiți-vă că ecuațiile de transformare ale câmpului electromagnetic, ecuația 6.58, sînt complet simetrice în  $E$  și  $B$ . Acum în fenomenul de inducție al lui Faraday un *câmp magnetic variabil* este însoțit de un *câmp electric*, într-o manieră descrisă de ecuația 30:

$$\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (30)$$

Aceasta este o relație locală care leagă câmpurile electric și magnetic în spațiul vid — sarcinile nu sînt direct implicate. Dacă simetria față de  $E$  și  $B$  se păstrează, trebuie să ne așteptăm ca un *câmp electric variabil* să poată genera un *câmp magnetic*. Ar trebui să fie un fenomen de inducție descris de o ecuație ca ecuația 30, dar cu rolurile lui  $E$  și  $B$  schimbate.



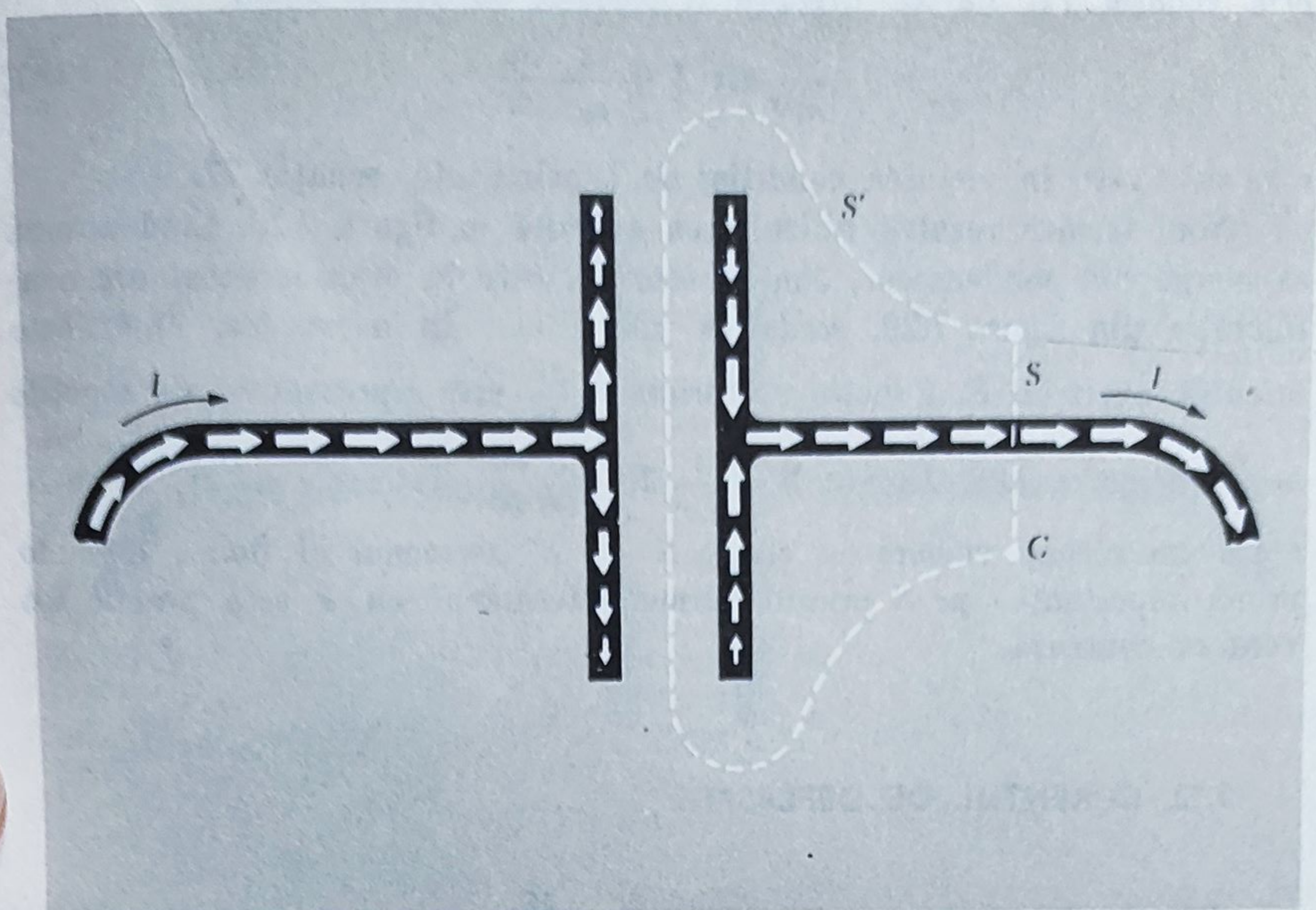


Fig. 7.28. Săgețile albe arată curgerea curentului în conductori. Suprafața  $S'$ , care are la fel ca  $S$  curba  $C$  drept margine, nu este traversată de curent.

Va apare că este nevoie de schimbat de asemenea semnul, dar aceasta este totul:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (83)$$

Aceasta dă termenul lipsă care este cerut în ecuația 82. Pentru a verifica aceasta, să scriem

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (84)$$

și să luăm divergența în ambii membrii:

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{B}) = \text{div}\left(\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{J}\right) + \text{div}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right). \quad (85)$$

Partea stângă este în mod necesar zero, după cum am observat deja. În termenul al doilea din dreapta putem schimba ordinea de diferențiere față de coordonate și timp. Astfel

$$\text{div}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho) \quad (86)$$



prin ecuația 71. Partea dreaptă a ecuației 85 devine acum

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (87)$$

care este zero în virtutea condiției de continuitate, ecuația 77.

Noul termen rezolvă dificultatea apărută în figura 7.28. Când sarcina se scurge din condensator, câmpul electric, care în orice moment are configurația din figura 7.29, *scade* în intensitate. În acest caz,  $\partial \mathbf{E} / \partial t$  este orientat invers lui  $\mathbf{E}$ . Funcția vectorială  $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  este reprezentată de săgețile negre în figura 7.30. Cu  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ , integrala lui  $\operatorname{rot} \mathbf{B}$  pe  $S'$  are acum aceeași valoare ca și pe  $S$ . Pe  $S'$  termenul al doilea este de primă importanță, pe  $S$  primul termen, termenul cu  $\mathbf{J}$  este practic tot ceea ce contează.

## 7.12. CURENTUL DE DEPLASARE

Să observăm că câmpul vectorial  $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  apare ca o *continuare* a distribuției curentului de conducție. Maxwell l-a numit *curent de deplasare*, și numele a rămas deși nu mai pare foarte potrivit. Mai precis, putem defini o „densitate a curentului de deplasare”  $\mathbf{J}_d$ , spre a o distinge de densitatea curentului de conducție  $\mathbf{J}$ , scriind ecuația 84 în acest fel:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} (\mathbf{J} + \mathbf{J}_d) \quad (88)$$

și definind  $\mathbf{J}_d \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ .

Am avut nevoie de noul termen pentru a face relația între curent și câmpul magnetic consistentă cu ecuația de continuitate, în cazul curenților de conducție variabili în timp. Dacă apare acolo, el implică existența unui nou efect de conducție în care un câmp electric variabil este însoțit de un câmp magnetic. Dacă efectul este real, de ce nu l-a descoperit Faraday? Mai întâi, el nu l-a căutat, dar există un motiv mai fundamental pentru care experiențe ca aceea a lui Faraday nu au putut dezvălui nici un nou efect de atribuit ultimului termen din ecuația 84. În orice aparat în care există câmpuri electrice variabile, sînt prezente în același timp curenți de conducție, sarcini în mișcare. Inducția magnetică  $\mathbf{B}$ , peste tot în jurul aparatului, este tocmai ce ați aștepta ca acei curenți să producă. De fapt, este aproape exact câmpul pe care l-ați calcula dacă, neglijînd faptul că circuitele pot să nu fie continue, ați fi folosit formula „Biot-Savart”, ecuația 6.38, pentru a găsi contribuția fiecărui element de curent de conducție la câmpul dintr-un punct oarecare din spațiu.



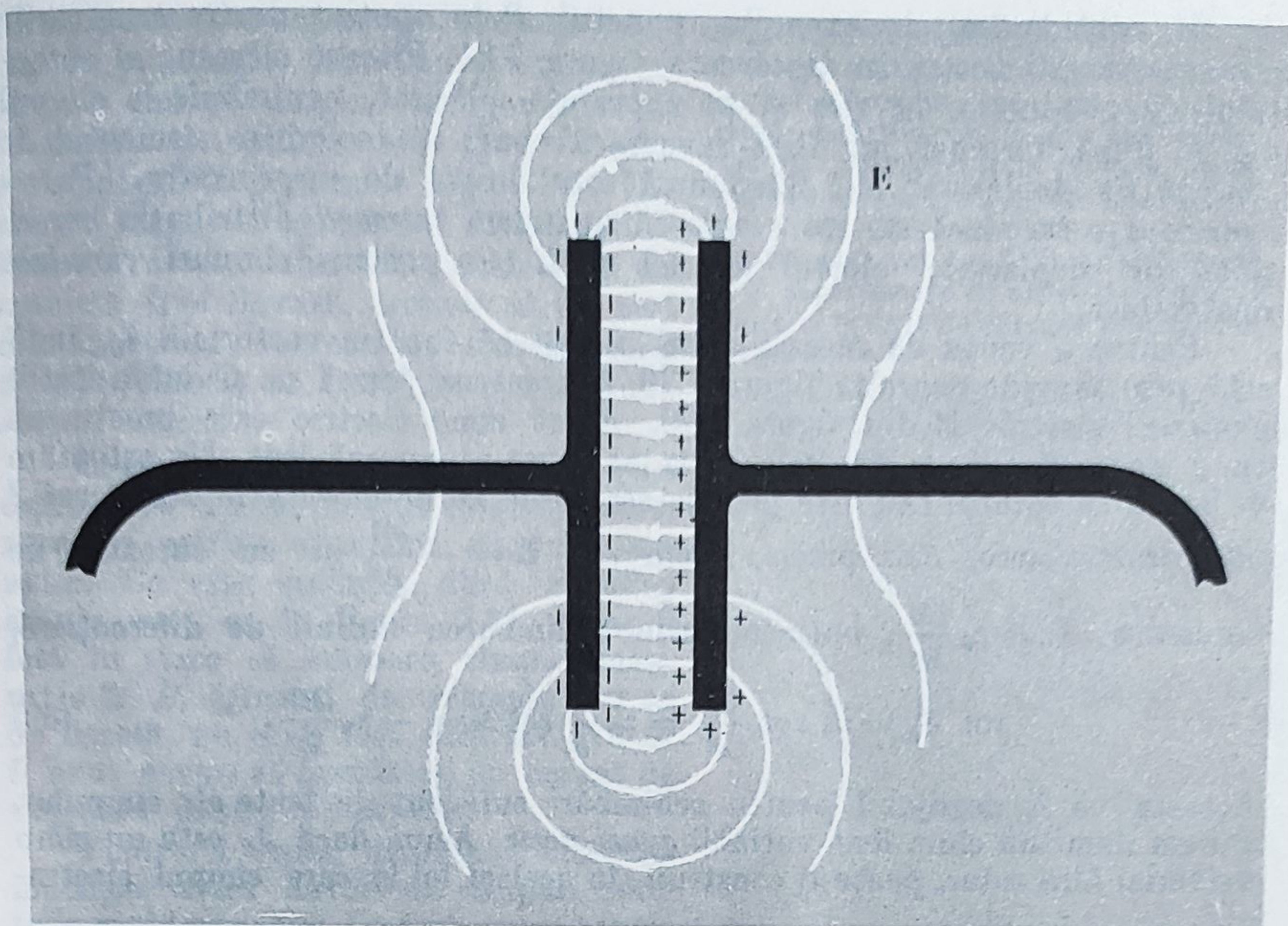
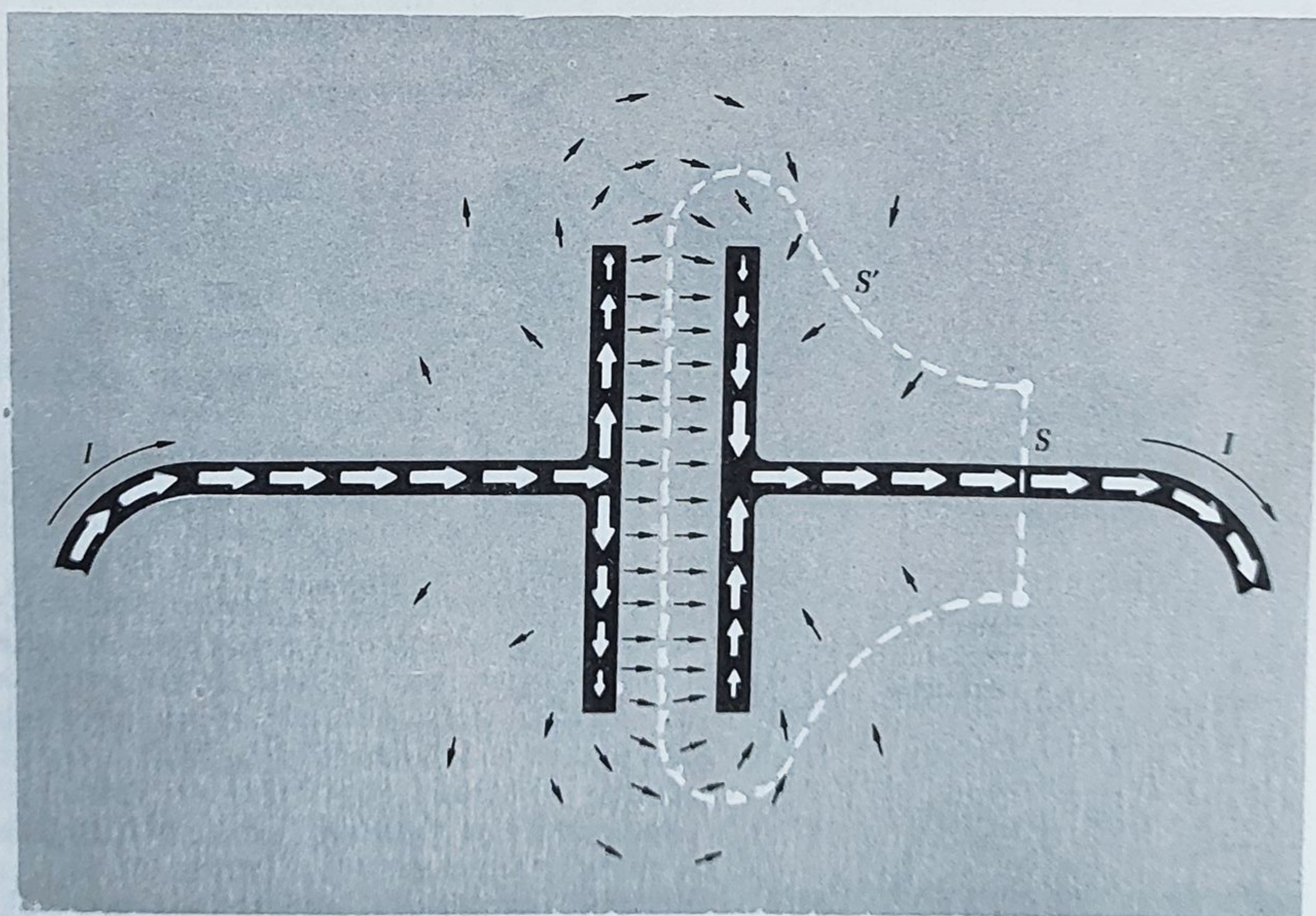


Fig. 7.29. Câmpul electric la un moment dat. Mărimea lui  $E$  este în timp *descrescătoare* peste tot.

Fig. 7.30. Curentul de conducție (săgeți albe) și curentul de deplasare (săgeți negre).





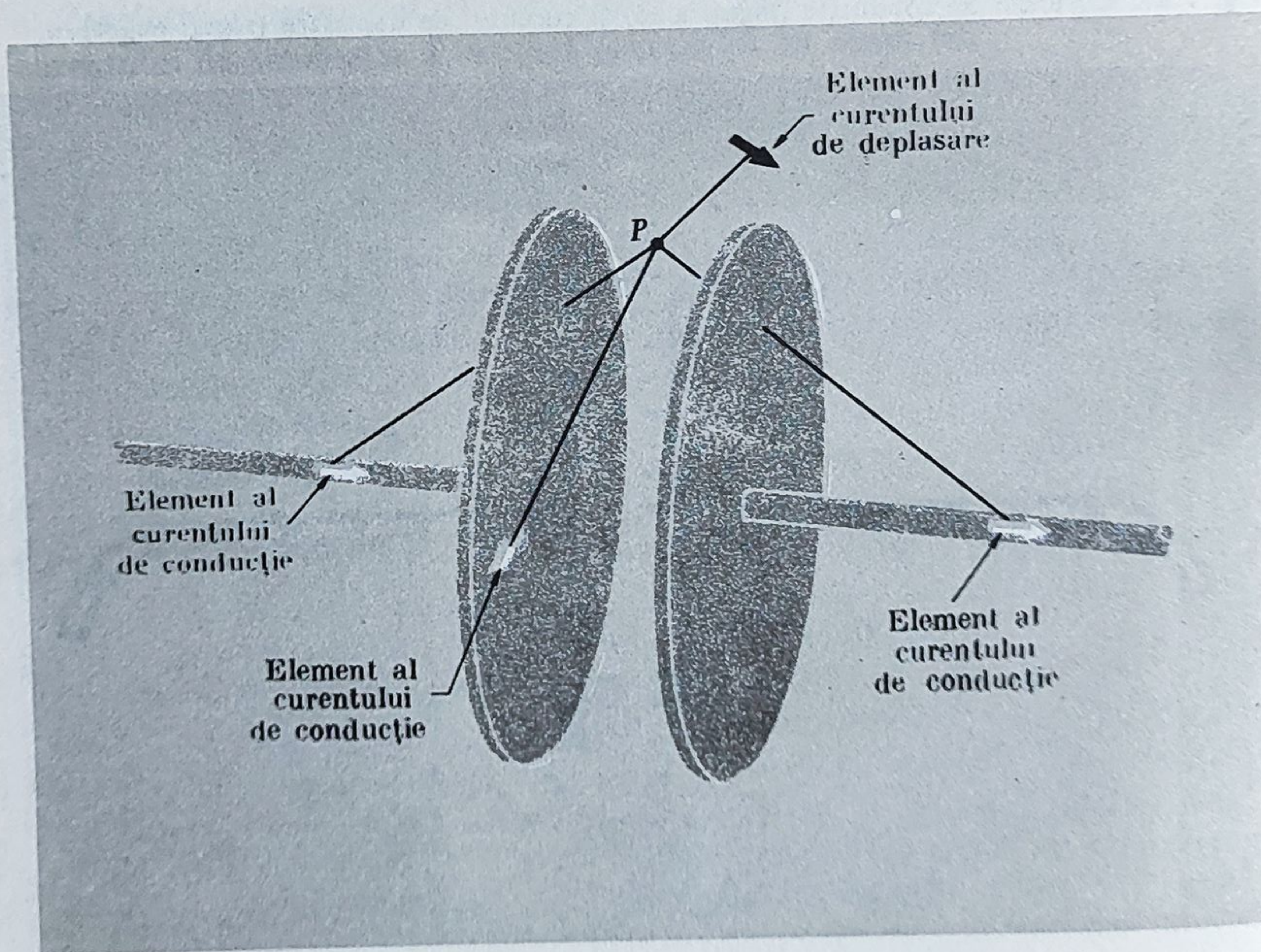
Să considerăm, de exemplu, punctul  $P$  în spațiul dintre armăturile condensatorului nostru în descărcare, figura 7.31. Fiecare element al curentului de conducție, în fire și pe suprafața plăcilor, contribuie la câmpul din  $P$ , după formula lui Biot-Savart. Trebuie să includem elementul de „curent de deplasare”  $\mathbf{J}_d$ ? Răspunsul este destul de surprinzător. Putem include  $\mathbf{J}_d$ ; dar dacă sîntem atenți să includem *întreagă* distribuția curentului de deplasare, efectul ei net va fi zero pentru câmpuri variabile relativ lent.

Pentru a vedea de ce este astfel, notați că funcția vectorială  $\mathbf{J}_d$ , indicată prin săgețile negre în figura 7.30, are aceeași formă ca și intensitatea câmpului electric  $\mathbf{E}$  din figura 7.29. Acest câmp electric este practic un câmp electrostatic, cu excepția faptului că se atenuează lent. Ne așteptăm de aceea că rotorul său este practic zero ceea ce ar implica faptul că  $\text{rot } \mathbf{J}$  este practic zero. Mai precis, avem  $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  și cu curentul de deplasare  $\mathbf{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ , obținem, prin schimbarea ordinii de diferențiere,

$$\text{rot } \mathbf{J}_d = \epsilon_0 \text{rot } \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{E} = -\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (89)$$

Aceasta va fi neglijabil pentru schimbări suficient de lente ale câmpului. Putem numi un câmp lent variabil *quasi-static*. Acum dacă  $\mathbf{J}_d$  este un câmp vectorial fără rotor, poate fi construit, în același fel în care câmpul electro-

Fig. 7.31. În cazul câmpurilor lent variabile, contribuția totală la câmpul magnetic în orice punct, de la toți curenții de deplasare, este zero. Câmpul magnetic în  $P$  poate fi calculat prin formula Biot-Savart aplicată numai pentru elementele de curent de conducție.





static poate fi compus din câmpurile sarcinilor punctuale, prin superpunerea curenților radiali curgînd spre exterior de la sursele punctuale sau spre interior spre „găurile” punctuale (fig. 7.32). Dar câmpul magnetic al oricărei distribuții de curenți *radiale*, simetrice, calculată în maniera Biot-Savart, trebuie să fie zero din simetrie, deoarece nu există nici o direcție unică, cu excepție a însăși direcției radiale.

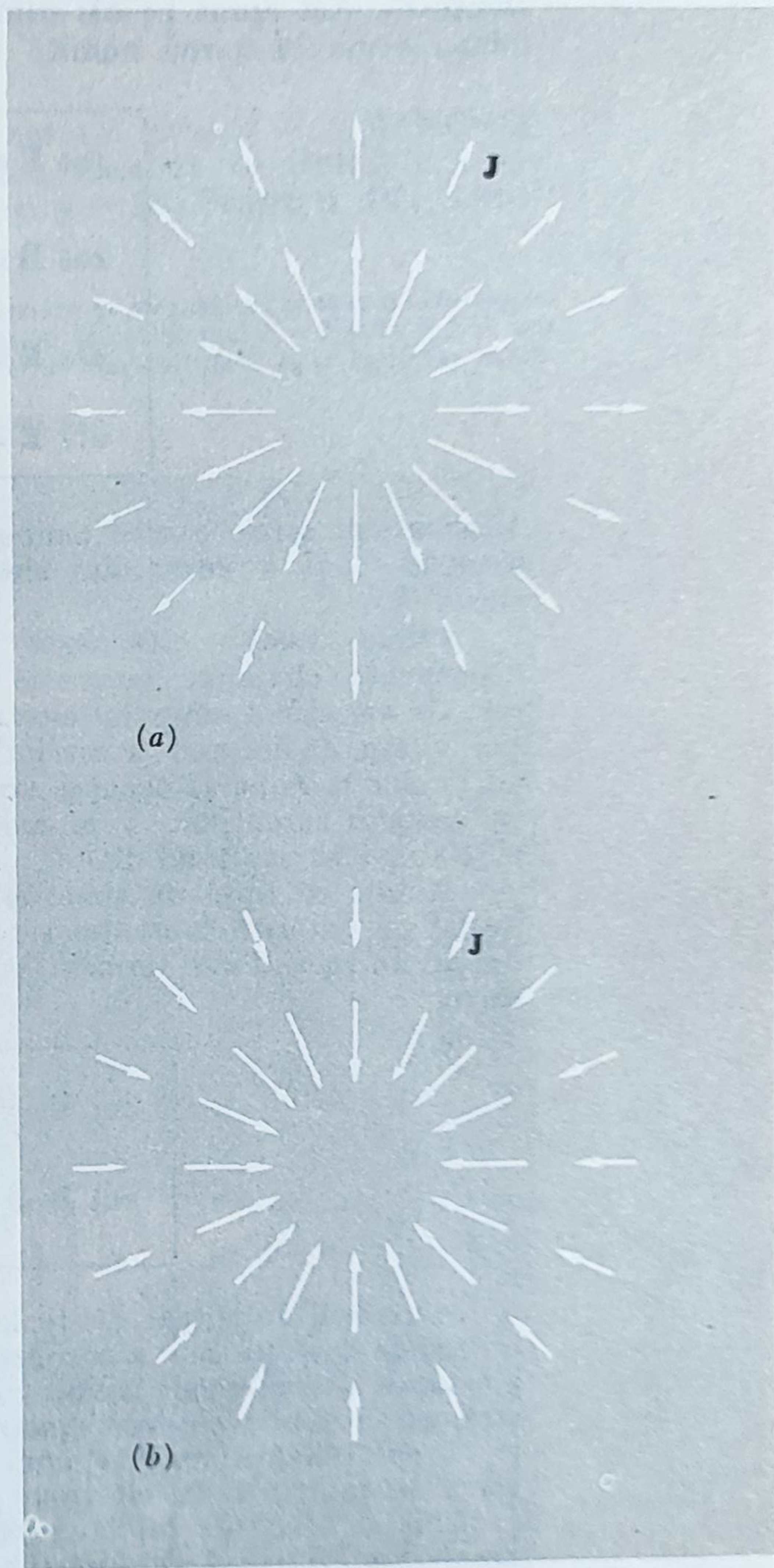
În câmpul *quasi-static*, atunci, numai curenții de conducție sînt singurele surse necesare pentru a explica câmpul magnetic. Cu alte cuvinte, dacă Faraday aranja ceva ca în figura 7.31, și ar fi fost în stare să măsoare câmpul magnetic în *P*, folosind de exemplu un ac de busolă, nu ar fi fost surprins. Nu ar fi avut nevoie să inventeze un curenți de deplasare pentru a-l explica.

Pentru a vedea acest nou efect de inducție, avem nevoie de câmpuri electrice rapid variabile. De fapt, avem nevoie ca schimbările să apară în timpul care îi trebuie luminii să traverseze aparatul. De aceea demonstrația directă a trebuit să-l aștepte pe Hertz, ale cărui experiențe au venit mulți ani după ce legea însăși a fost enunțată de Maxwell.

### 7.13. ECUAȚIILE LUI MAXWELL

James Clerk Maxwell, după ce a studiat cercetările în electricitate ale lui Faraday, a pornit să formuleze matematic o teorie a electricității și magnetismului. Maxwell nu s-a putut folosi de relativitate — aceasta a apărut cincizeci de ani mai târziu. Structura materiei era un mister, relația între lumină și electromagnetism nebănuită. Multe din argumentele pe care le-am folosit pentru a face ultimul nostru pas par evidente, dar erau de negîndit atunci. Totuși, în timp ce teoria lui Maxwell s-a dezvoltat, termenul pe care l-am discutat,  $\partial \mathbf{E} / \partial t$ , a apărut cu totul natural în formularea sa. El l-a numit „curenți de deplasare”. Maxwell era interesat de câmpul electric

Fig. 7.32. Reprezentarea a ceea ce se înțelege printr-o distribuție radială de curenți. Densitatea de curenți  $\mathbf{J}$  pentru sursa punctiformă în (a) sau pentru „gaura” punctiformă în (b) este asemănătoare câmpului electric al unei sarcini punctuale. Orice distribuție de curenți pentru care  $\text{rot } \mathbf{J} = 0$  ar putea fi făcută prin superpunere de astfel de surse și găuri, și trebuie de aceea să aibă câmpul magnetic nul.





în substanța solidă ca și în vid și când vorbește despre un „curent de deplasare” el include adesea de asemenea o oarecare sarcină în mișcare. Vom lămuri acest punct în capitolul 9 unde studiem câmpurile electrice în materie. Într-adevăr Maxwell a gândit spațiul însuși ca un mediu, „eterul”, încît chiar în absența materiei solide curentul de deplasare apărea în ceva. Dar nu contează — ecuațiile sale matematice au fost perfect clare și neambigue, și introducerea curentului de deplasare a fost o descoperire teoretică de prim rang.

Descrierea lui Maxwell a câmpului electromagnetic a fost esențialmente completă. Am ajuns pe căi diferite la diferite părți ale ei, pe care le vom aduna acum în forma numită tradițional *ecuațiile lui Maxwell*:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{J} \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{90}$$

Acestea sînt scrise pentru câmpuri în vid, în prezența densității de sarcină electrică  $\rho$  și a curentului electric, adică, a sarcinii în mișcare, de densitate  $\mathbf{J}$ .

Prima ecuație este *legea lui Faraday a inducției*. A doua exprimă dependența câmpului magnetic de densitatea *curentului de deplasare*, sau rată de variație a câmpului electric, și de densitatea *curentului de conducție*, sau viteza de mișcare a sarcinii. A treia ecuație este echivalentă cu legea lui Coulomb. A patra ecuație exprimă că nu există surse de cîmp magnetic *cu excepția* curenților. Vom avea mai multe de spus despre acest aspect al Naturii în capitolul 10.

Notăți că lipsa de simetrie în aceste ecuații, față de  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{E}$ , este în întregime datorită prezenței sarcinii electrice și curentului electric de conducție. În spațiul vid, termenii cu  $\rho$  și  $\mathbf{J}$  sînt zero, și ecuațiile lui Maxwell devin

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{91}$$

Aici termenul de curent de deplasare este cu totul important. Prezența sa, alături de analogul său în prima ecuație, implică posibilitatea *undelor electromagnetice*. Recunoscînd aceasta, Maxwell a continuat să dezvolte cu succes strălucit o teorie electromagnetică a luminii. Veți explora fizica undelor, și în particular a undelor luminoase, în volumul III. Putem arăta chiar acum că o perturbație electromagnetică în deplasare cu viteza  $c$  este compatibilă cu ecuațiile lui Maxwell. Pentru a face aceasta, vom descrie un aranjament foarte simplu de câmpuri electrice și magnetice care reprezintă



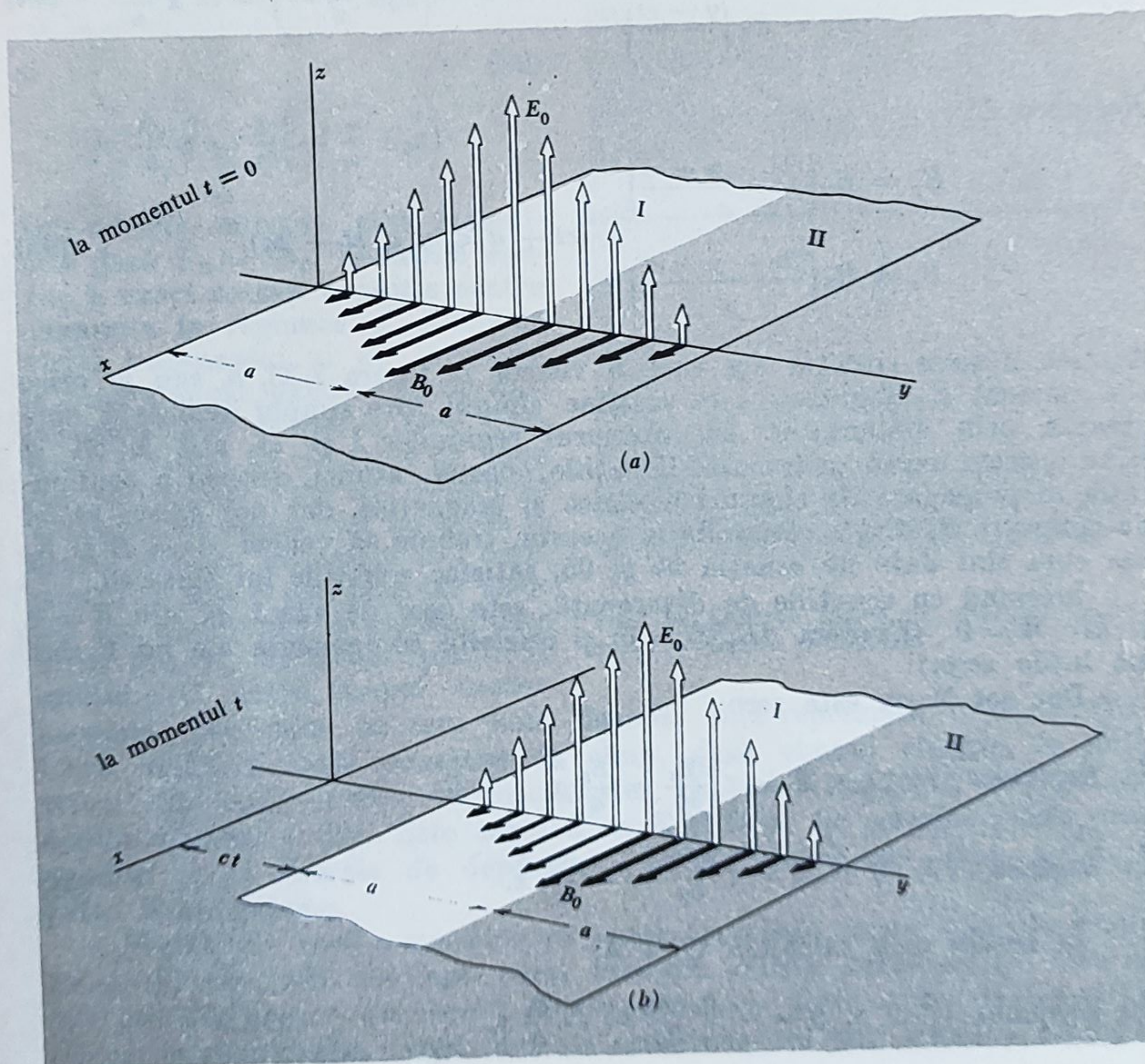
o perturbație în deplasare, și apoi vom arăta că aceste câmpuri satisfac toate ecuațiile lui Maxwell, *ecuația 91*.

La momentul de timp  $t = 0$ , există, presupunem, un câmp electric în regiunea dintre planele  $y = 0$  și  $y = 2a$ . Această intensitate a câmpului  $E$  are numai o componentă  $z$ , și componenta sa  $z$  depinde numai de  $y$ , în următorul fel:

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 \frac{y}{a} & (0 \leq y \leq a) \\ E_z &= E_0 \frac{2a - y}{a} & (a \leq y \leq 2a) \end{aligned} \quad (\text{la timpul } t = 0). \quad (92)$$

După cum se indică în figura 7.33, *a*, aceasta descrie o distribuție în formă de „fronon” a intensității câmpului, maximă în centru în  $y = a$  și descrescând linear până la zero în  $y = 0$  și  $y = 2a$ . Pentru  $y$  dat, câmpul

Fig. 7.33. O configurație particulară de câmpuri electrice și magnetice, presupusă în deplasare cu viteza  $c$  în direcția  $y$ . Câmpurile sînt arătate în (a) la timpul  $t = 0$  și în (b) la un timp ulterior. Aceste câmpuri vor satisface ecuațiile lui Maxwell dacă  $B_0 = E_0/c$ . De notat orientarea relativă între  $E$ ,  $B$  și direcția de deplasare,  $\hat{y}$ .





este același pentru toți  $x$  și  $z$ . Adică, avem câmp electric în toată regiunea dintre două plane paralele, deși arătăm în figură vectori numai pe axa  $y$ . Porțiunile umbrite însemnate I și II se află în interiorul acestor plane. Oriunde în afară, adică, pentru  $y = 0$  și  $z = 2a$ , câmpul electric este zero la acest moment de timp. La același timp, în această regiune din spațiu există și un câmp magnetic. El are doar o componentă  $x$ , dată de

$$\begin{aligned} B_x &= B_0 \frac{y}{a} & (0 \leq y \leq a) \\ B_x &= B_0 \frac{2a - y}{a} & (a \leq y \leq 2a) \end{aligned} \quad (\text{la momentul } t = 0). \quad (93)$$

Aceste câmpuri le-am inventat pur și simplu. Să facem acum configurația de câmp să se deplaseze în direcția  $y$  cu viteza  $c$ , păstrându-și forma. O putem face scriind ecuații după cum urmează:

*Regiunea I:*

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 \left( \frac{y - ct}{a} \right) \\ B_x &= B_0 \left( \frac{y - ct}{a} \right) \end{aligned} \quad (ct \leq y \leq ct + a). \quad (94)$$

*Regiunea II:*

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 \left( \frac{2a - y + ct}{a} \right) \\ B_x &= B_0 \left( \frac{2a - y + ct}{a} \right) \end{aligned} \quad (ct + a \leq y \leq ct + 2a). \quad (95)$$

Aceasta descrie situația așa cum o vedem în figura 7.33, *b*, sau la orice alt moment  $t$ . Regiunea care conține câmpul este simplu deplasată spre dreapta prin distanța  $ct$ . În interiorul regiunilor I și II, atât  $E$  cât și  $B$  au aceeași formă ca înainte. Ecuațiile noastre, atunci, descriu o configurație în propagare de câmpuri electrice și magnetice, dar pot exista astfel de câmpuri? Pentru a răspunde la aceasta, trebuie să vedem dacă  $E$  și  $B$ , așa cum sint date de ecuația 94 și 95, satisfac ecuațiile lui Maxwell.

Începînd cu ecuațiile de divergență, este ușor de văzut că  $\text{div } E = 0$  și  $\text{div } B = 0$ . (Evident  $\partial E_z / \partial z = 0$ : și celelalte componente ale lui  $E$  sint ele înșile zero.)

Dar  $\text{rot } E$  nu este zero:

$$\text{În Regiunea I: } \nabla \times E = \hat{x} \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{E_0}{a} \hat{x}.$$

$$\text{În Regiunea II: } \nabla \times E = \hat{x} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{E_0}{a} \hat{x}. \quad (96)$$

În același mod calculăm  $\nabla \times B$ :

$$\text{În Regiunea I: } \nabla \times B = -\hat{z} \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{B_0}{a} \hat{z}.$$



În Regiunea II:

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\hat{z} \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{B_0}{a} \hat{z}. \quad (97)$$

Derivatele parțiale față de  $t$  sînt:

În Regiunea I:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{c}{a} E_0 \hat{z} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{c}{a} B_0 \hat{x}.$$

În Regiunea II:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{c}{a} E_0 \hat{z} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c}{a} B_0 \hat{x}. \quad (98)$$

Cîmpurile vor satisface ecuațiile „inducției” în regiunea I, dacă

$$\frac{E_0}{a} \hat{x} = -\left(-\frac{c}{a} B_0 \hat{x}\right)$$

și (99)

$$-\frac{B_0}{a} \hat{z} = \frac{1}{c^2} \left(-\frac{c}{a} E_0 \hat{z}\right).$$

Într-adevăr, acestea sînt îndeplinite dacă  $E_0 = cB_0$ . Ecuațiile conduc la exact aceeași condiție pentru cîmpurile în regiunea I. Exact în virful frontonului, și de asemenea la fiecare capăt, există singularități matematice în cîmpurile alese. Pentru a fi siguri că ecuațiile de cîmp sînt satisfăcute *peste tot*, trebuie să vedem că nu există nici un necaz în aceste puncte. Nu există nici unul, pentru că  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  sînt *continue* acolo (un salt abrupt sau discontinuitate, în  $\mathbf{E}$  sau  $\mathbf{B}$ , nu ar fi posibil în spațiul gol). Astfel cîmpul electromagnetic particular pe care l-am descris, care reprezintă o undă călătoare, satisface toate ecuațiile de cîmp, dacă cîmpul electric, în volți/metru este egal cu de  $c$  ori intensitatea cîmpului magnetic, în tesla, în același moment și loc. Este esențial ca  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  să fie perpendiculare unul pe altul și pe direcția de deplasare — altfel ecuațiile de cîmp nu ar fi putut fi îndeplinite.

„Frontonul” nostru mișcător vă poate surprinde ca un exemplu destul de special de undă. De fapt, acest exemplu simplu dezvăluie tot ceea ce este esențial despre *orice* undă electromagnetică. Doar avem nevoie să ne gîndim la *superpoziție*. După cum am accentuat frecvent, ecuațiile cîmpului

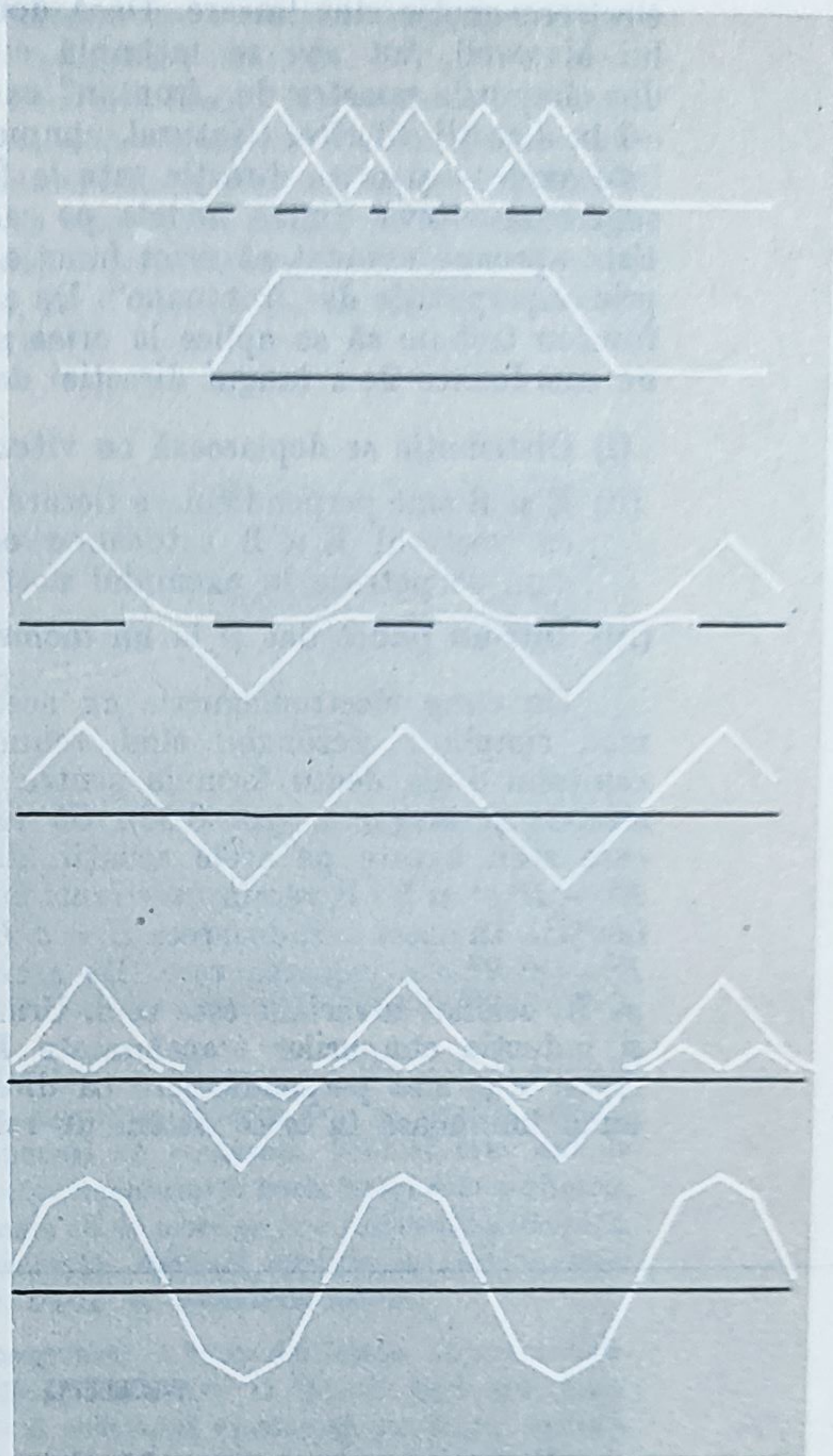


Fig.7.34. Diverse forme de undă făcute prin superpunere de „frontoane”.



electromagnetic sînt lineare. Dacă două seturi de cîmpuri satisfac ecuațiile lui Maxwell, tot așa se întîmplă cu suma lor. Putem avea orice număr din cîmpurile noastre de „fronton” care se propagă prin spațiu, în aceeași, ori în direcții diferite. (Natural, cîmpurile nu ne interesează cum sînt orientate axele — și orice direcție este la fel de bună ca și axa  $y$ .) Figura 7.34 sugerează cîteva dintre undele pe care le-ați putea face din „frontoane”. Este aproape evident că *orice* funcție ar putea fi exprimată oricît de bine prin superpoziție de „frontoane”. De aceea, ceea ce am învățat despre unda fronton trebuie să se aplice la orice undă în care  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  sînt funcții doar de coordonate de-a lungul direcției de mișcare. Aceste fapte generale sînt:

- (i) Distribuția se deplasează cu viteza  $c$ , cu formă neschimbătoare
- (ii)  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  sînt perpendiculare fiecare pe celălalt și pe direcția de deplasare cu vectorul  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  totdeauna orientat în direcția de deplasare, așa cum se petrece în exemplul nostru
- (iii) Într-un punct dat și la un moment dat,  $\mathbf{E} = c \mathbf{B}$ .

Un cîmp electromagnetic cu aceste proprietăți se transformă într-un mod simplu și rezonabil cînd schimbăm sistemele de coordonate. În capitolul 6 am dedus formule pentru transformările Lorentz ale cîmpurilor electric și magnetic (ec. 6.58). Să folosim rezultatele din Problema 6.11, care erau bazate pe acele ecuații, după care cele două cantități scalare,  $E^2 - B^2 c^2$  și  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  rămîn *invariante* într-o transformare la un alt referențial inerțial. În acest caz, deoarece  $E = c B$  în orice punct, cantitatea invariantă  $E^2 - c^2 B^2$  are valoarea zero. De asemenea, deoarece  $\mathbf{E}$  este perpendicular pe  $\mathbf{B}$ , celălalt invariant este zero. Urmează că în orice alt sistem intensitatea și inducția cîmpurilor transformate  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  diferă în mărime printr-un factor  $c$  și sînt perpendiculare ca direcție. O undă luminoasă arată ca o undă luminoasă în orice sistem de referință.

## PROBLEME

7.1. Care este forța electromotoare maximă indusă într-o bobină de 4000 de spire, rază medie 12 cm, în rotație cu 30 de revoluții pe secundă în cîmpul magnetic al pămîntului unde intensitatea cîmpului este  $5 \times 10^{-3}$  tesla?

R. 1,70 volt

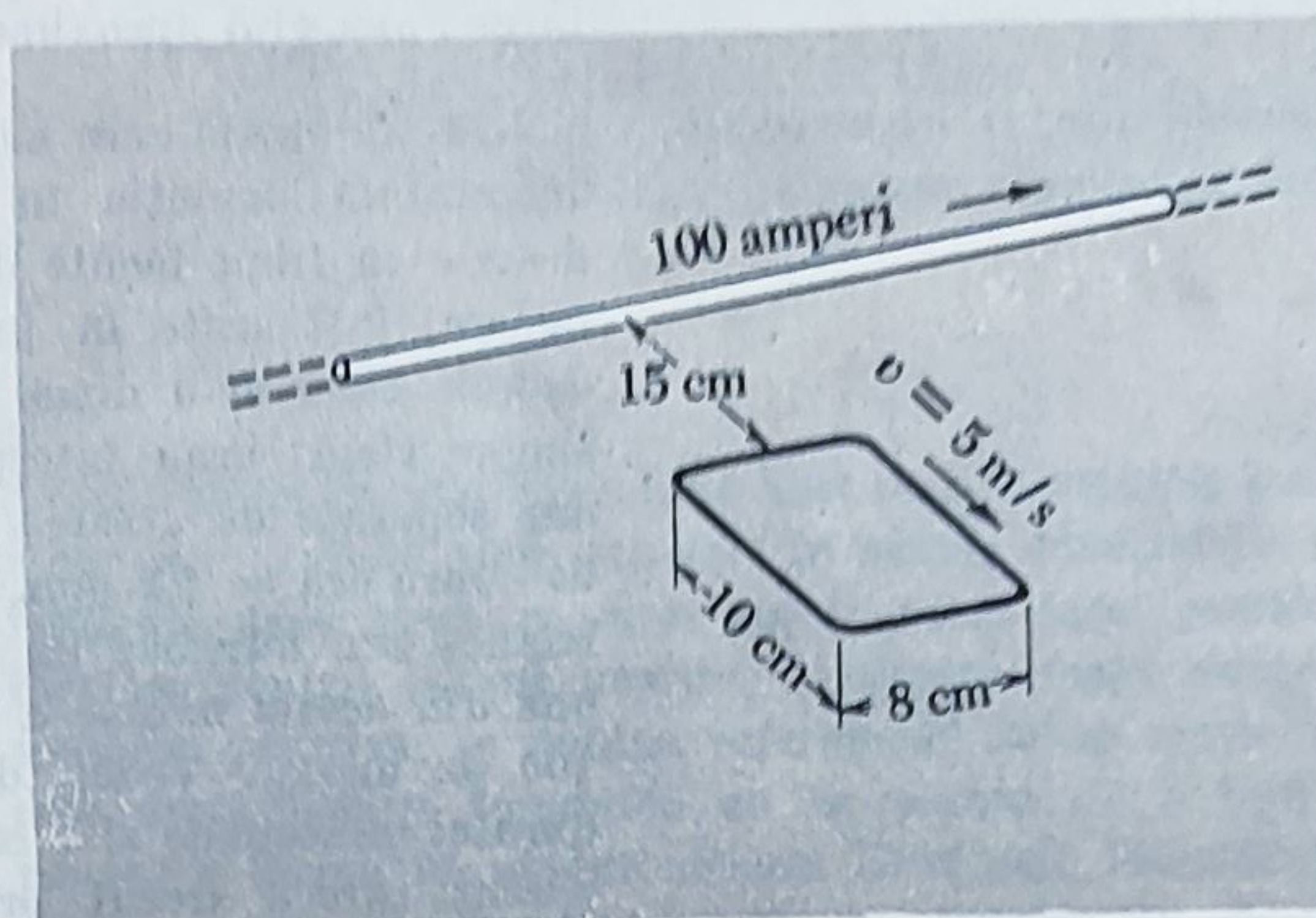
7.2. O buclă dreptunghiulară se mișcă printr-un cîmp magnetic astfel încît forța electromotoare este, și rămîne zero. Descrieți modurile în care bucla s-ar putea mișca.

*Relație între schimbarea de flux și transferul de sarcină.*

7.3. O bobină în formă de inel cu  $N$  spire și arie  $A$  este situată în cîmpul unui magnet. Ea este conectată la un circuit exterior printr-o pereche de conductori răsuciți. Rezistența circuitului, incluzînd bobina însăși este  $R$ . Să presupunem că fluxul prin bobină este schimbat



intr-un mod oarecare de la valoarea staționară inițială  $\Phi_i$  la o valoare staționară finală  $\Phi_f$ . Arătați că sarcina totală  $Q$  care trece prin circuit, drept rezultat, este independentă de viteza de variație a fluxului. O bobină ca aceasta este adesea folosită pentru a măsura intensitatea cîmpului într-un magnet. Să presupunem că bobina este situată cu planul ei perpendicular pe  $\mathbf{B}$ . Care este relația dintre  $B$ ,  $NA$ ,  $R$  și sarcina  $Q$  cînd bobina este rotită cu  $90^\circ$ ? cu  $180^\circ$ ?



Problema 7.4

7.4. Calculați forța electromotoare din bucla în mișcare din figură în momentul la care este în poziția arătată acolo. Presupuneți că rezistența bobinei este atât de mare încît efectul curentului în bucla însăși este neglijabil. Estimați în mare cît de mare ar fi o rezistență suficientă, în această privință. Indicați direcția în care ar trece curentul prin buclă, la momentul arătat.

Verificarea conservării energiei.

7.5. Să presupunem că bucla din figura 7.6 are o rezistență  $R$ . Arătați că oricare ar fi acel ceva care trage bucla cu viteză constantă efectuează un lucru mecanic în intervalul  $dt$  care se acordă exact cu energia dirijată în rezistență în acest interval, presupunînd că auto-inducțanța buclei se poate neglija. Care este sursa energiei în figura 7.14 unde bucla este staționară?

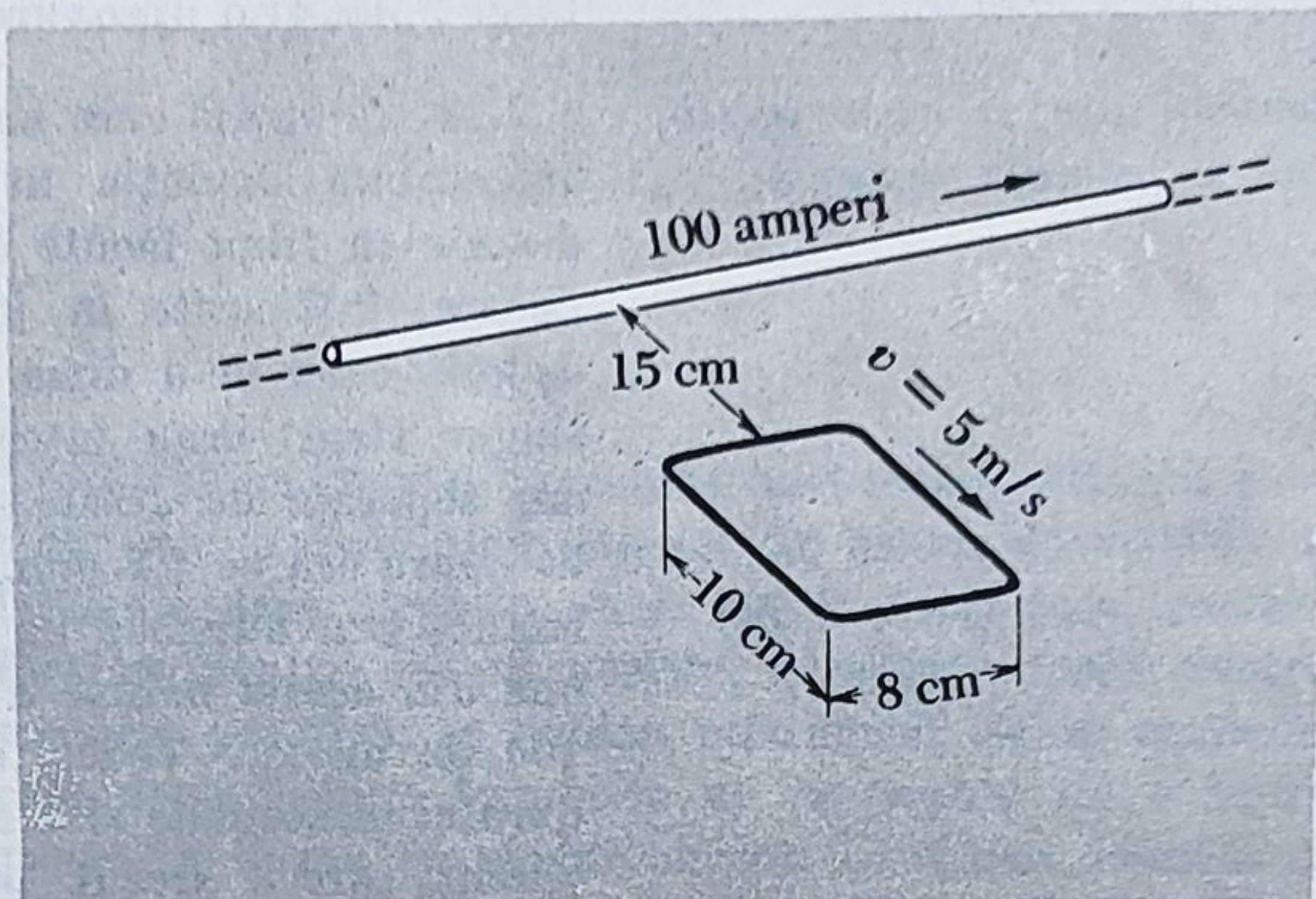
7.6. Depinde prezicerea unei variații sinusoidale simple a forței electromotoare pentru bucla din figura 7.13 de faptul că bucla este dreptunghiulară, de uniformitatea cîmpului magnetic, sau de amîndouă? Explicați. Puteți sugera un aranjament cu o buclă rotitoare și bobine staționare care să dea o t.e.m. nesinusoidală? Schițați curba tensiune — timp pe care v-ați aștepta să o vedeți la osciloscop, cu acel aranjament.

Autoinducțanța unui solenoid lung.

7.7. Calculați autoinducțanța unui solenoid cilindric 10 cm în diametru și 2 metri lung. Are un singur strat de înfășurare conținînd un total de 1200 spire. Presupuneți



într-un mod oarecare de la valoarea staționară inițială  $\Phi_i$  la o valoare staționară finală  $\Phi_f$ . Arătați că sarcina totală  $Q$  care trece prin circuit, drept rezultat, este independentă de viteza de variație a fluxului. O bobină ca aceasta este adesea folosită pentru a măsura intensitatea cîmpului într-un magnet. Să presupunem că bobina este situată cu planul ei perpendicular pe  $B$ . Care este relația dintre  $B$ ,  $NA$ ,  $R$  și sarcina  $Q$  cînd bobina este rotită cu  $90^\circ$ ? cu  $180^\circ$ ?



Problema 7.4

7.4. Calculați forța electromotoare din bucla în mișcare din figură în momentul la care este în poziția arătată acolo. Presupuneți că rezistența bobinei este atât de mare încît efectul curentului în bucla însăși este neglijabil. Estimați în mare cît de mare ar fi o rezistență suficientă, în această privință. Indicați direcția în care ar trece curentul prin buclă, la momentul arătat.

Verificarea conservării energiei.

7.5. Să presupunem că bucla din figura 7.6 are o rezistență  $R$ . Arătați că oricare ar fi acel ceva care trage bucla cu viteză constantă efectuează un lucru mecanic în intervalul  $dt$  care se acordă exact cu energia dirijată în rezistență în acest interval, presupunînd că auto-inductanța buclei se poate neglija. Care este sursa energiei în figura 7.14 unde bucla este staționară?

7.6. Depinde prezicerea unei variații sinusoidale simple a forței electromotoare pentru bucla din figura 7.13 de faptul că bucla este dreptunghiulară, de uniformitatea cîmpului magnetic, sau de amîndouă? Explicați. Puteți sugera un aranjament cu o buclă rotitoare și bobine staționare care să dea o t.e.m. nesinusoidală? Schițați curba tensiune — timp pe care v-ați aștepta să o vedeți la osciloscop, cu acel aranjament.

Autoinductanța unui solenoid lung.

7.7. Calculați autoinductanța unui solenoid cilindric 10 cm în diametru și 2 metri lung. Are un singur strat de înfășurare conținînd un total de 1200 spire. Presupuneți



într-o primă aproximație că în interiorul solenoidului câmpul magnetic este uniform pînă la capete. Estimați mărimea erorii pe care o veți introduce prin aceea. Este adevăratul  $L$  mai mare sau mai mic decît rezultatul dumneavoastră aproximativ?

7.8. Cum ați înfășura o bobină de rezistență astfel încît autoinductanța ei să fie mică?

Inductanța mutuală a buclelor circulare coaxiale.

7.9. Deduceți o formulă aproximativă pentru inductanța mutuală a două inele circulare de aceeași rază  $a$ , montate ca roți pe același ax cu centrele la  $b$  cm depărtare. Folosiți o aproximație bună pentru  $b \gg a$ .

Reconstituire istorică implinind inductanța mutuală.

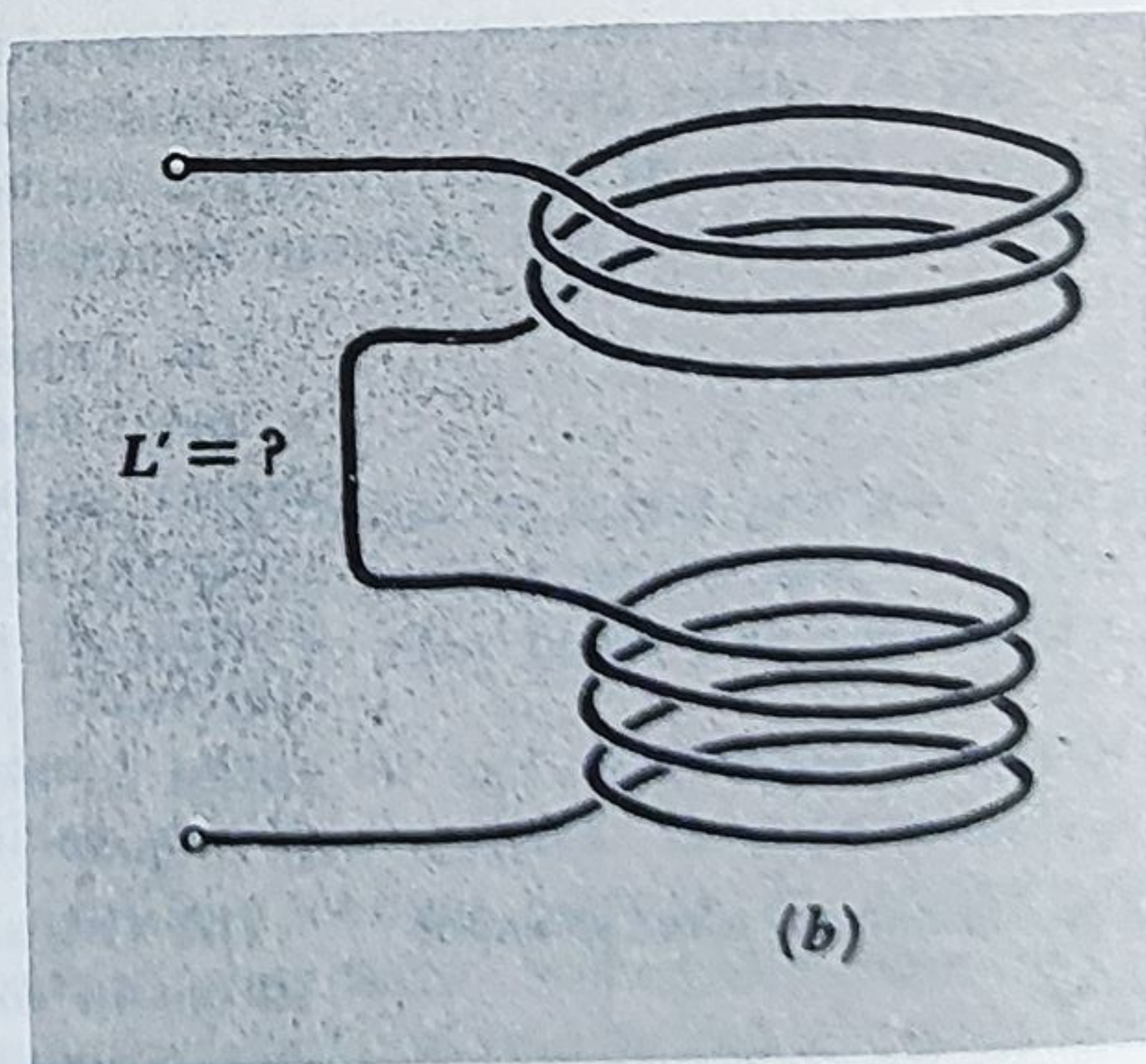
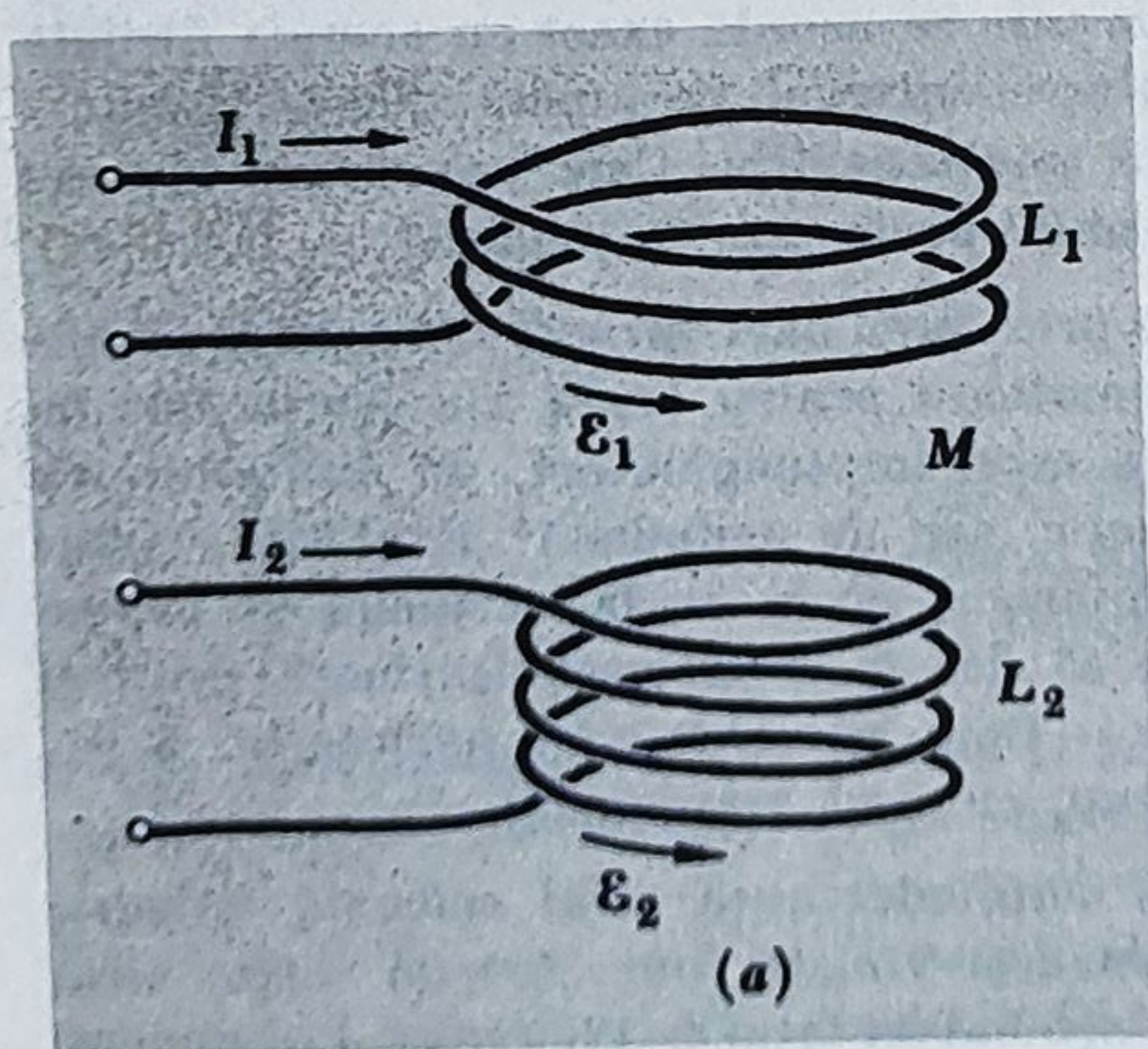
7.10. Bobinele care au produs înția oară o ușoară dar detectabilă deviație în detectorul lui Faraday, el le descrie ca fiind făcute din 62 metri de sîrmă de cupru fiecare, înfășurate în jurul unui bloc mare de lemn. Spirele celei de-a doua înfășurări (adică, bobine cu un singur strat) erau interpuse printre acelea ale primei, dar separate de acestea prin izolație. Diametrul sîrmei de cupru era de 1,2 mm. El nu dă dimensiunile blocului lemnos sau numărul de spire în bobine. În experiență, una din aceste bobine a fost conectată la o „baterie de 100 de anozii“. Vedeți dacă puteți face o estimare a duratei în secunde și a mărimei în amperi a pulsului de curent care a trecut prin galvanometrul său.

Inductanța combinată a bobinelor în serie, și o regulă generală despre  $L$  și  $M$ .

7.11. Partea (a) a figurii arată două bobine cu autoinductanțe  $L_1$  și  $L_2$ . În poziția relativă arătată acolo inductanța mutuală este  $M$ . Direcția pozitivă a curentului și direcția pozitivă a forței electromotoare în fiecare bobină sînt definite de către săgețile din figură. Ecuațiile care leagă curenții și forțele electromotoare sînt:

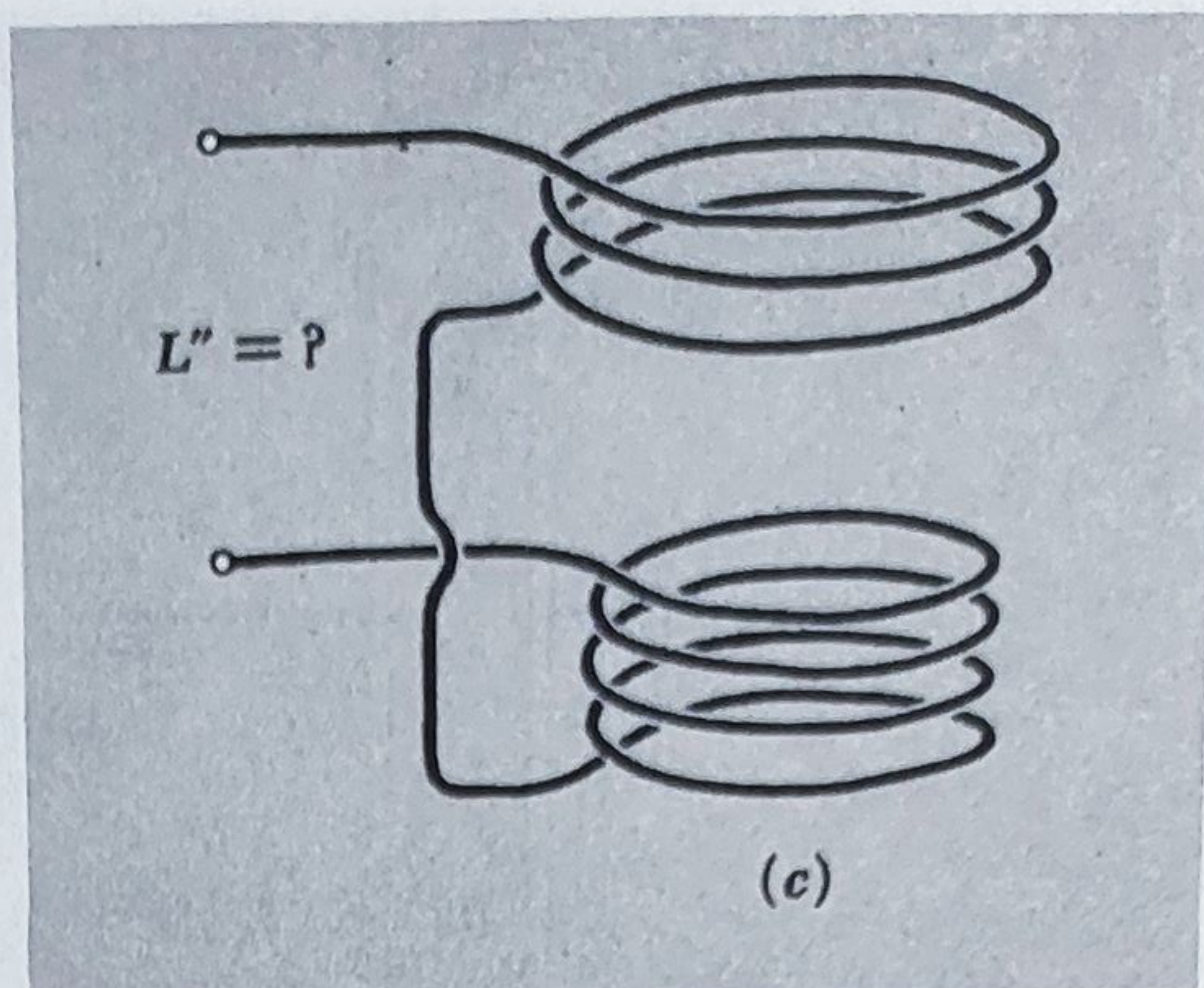
$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt} \text{ și } \mathcal{E}_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt}.$$

Problema 7.11, a, b





Problema 7.11, c



Fiind dat că  $M$  este totdeauna luat ca o constantă pozitivă, cum trebuie alese semnele în aceste ecuații? Ce se întâmplă dacă alegeam, cum am fi putut face, cealaltă direcție pentru curent pozitiv, și pentru forță electromotoare pozitivă, în bobina inferioară? Acum conectați cele două bobine împreună ca în partea (b) a figurii pentru a forma un singur circuit. Care este inductanța  $L'$  a acestui circuit, exprimată în funcție de  $L_1$ ,  $L_2$  și  $M$ ? Care este inductanța  $L''$  a circuitului format prin conectarea bobinelor ca în (c)? Care circuit, (b) sau (c), are inductanța mai mare? Considerind că autoinductanța oricărui circuit trebuie să fie o mărime pozitivă (de ce nu ar putea fi negativă?), încercați dacă puteți trage o concluzie generală, valabilă pentru orice pereche imaginabilă de bobine, privitor la mărimea relativă a lui  $L_1$ ,  $L_2$  și  $M$ .

*Problemă astrofizică implicând energia în câmpul magnetic.*

**7.12.** În spațiul interstelar din Galaxia noastră se crede că în general câmpul magnetic este de ordinul de mărime a  $10^{-10}$  tesla. Materia în acest spațiu nu este nimic mai mult decât atomii de hidrogen, aproximativ unul pe centimetru cub, cu viteze termice de ordinul a  $10^5$  cm/s. Cum se compară cantitatea de energie înmagazinată în câmpul magnetic, într-un volum dat, cu aceea înmagazinată ca energie cinetică a materiei?

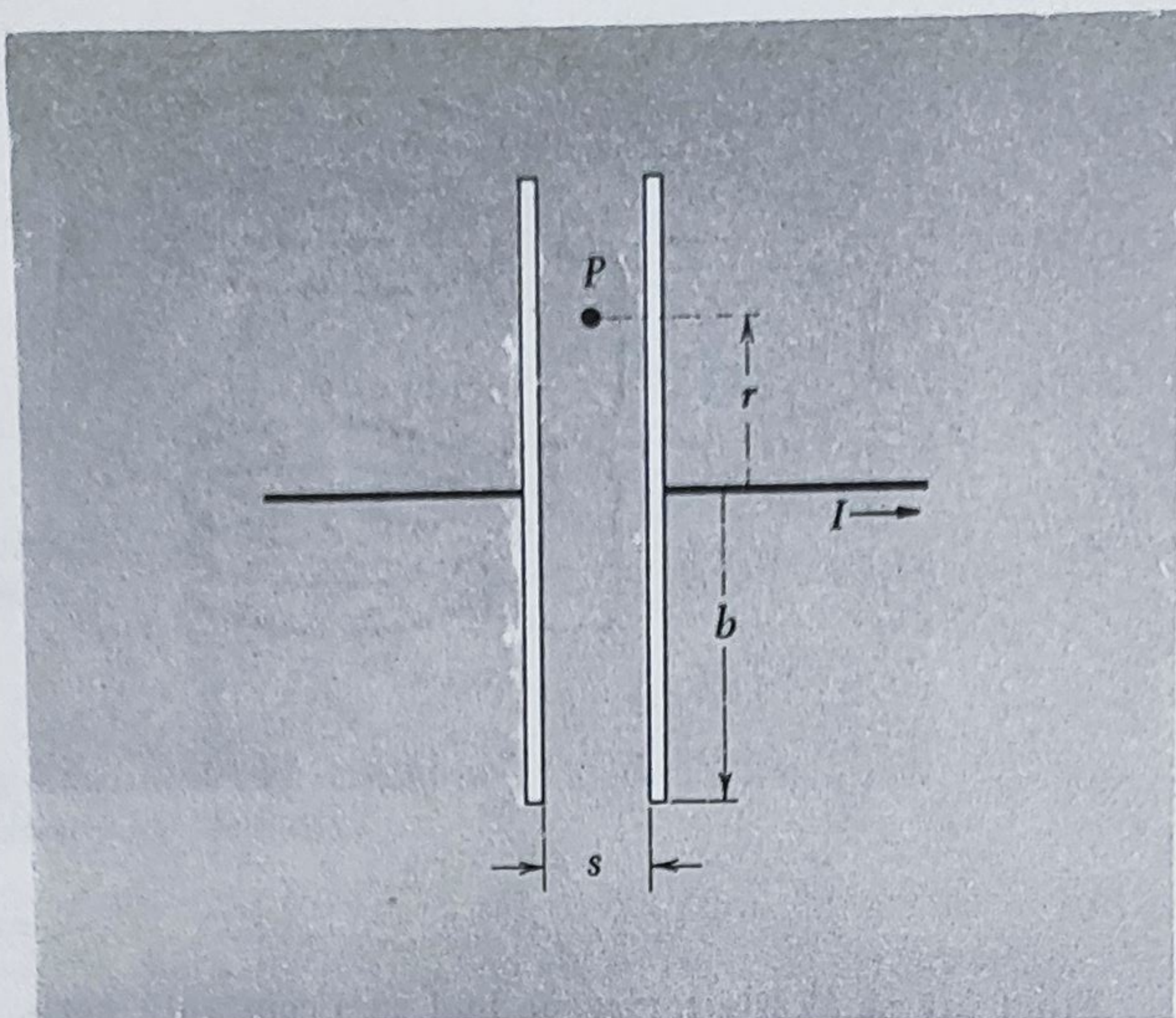
*Studiul unui circuit LR.*

**7.13.** O bobină cu rezistența 0,01 ohm și autoinductanță 0,50 milihenry, este conectată la o baterie de 12 volți cu rezistența internă neglijabilă. După cât timp de la închiderea comutatorului, va crește curentul la 90 procente din valoarea sa finală? Câtă energie, în joule, este înmagazinată în câmpul magnetic? Cât de multă energie a fost extrasă din baterie până la acel moment?

*Curentul de deplasare.*

**7.14.** Câmpul magnetic înăuntrul condensatorului în descărcare arătat în figura 7.27 poate fi calculat în





Problema 7.14

principiu prin sumarea contribuțiilor de la toate elementele curentului de conducție, cum s-a indicat în figura 7.31. Aceea ar putea fi o treabă lungă. Dacă putem presupune simetrie în jurul acestei axe, este mult mai ușor a găsi inducția  $\mathbf{B}$  într-un punct prin folosirea legii integrale

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{c^2} \int \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} \right) \cdot d\mathbf{a}$$

aplicată pe o traiectorie circulară prin punct. Avem nevoie numai să știm curentul total cuprins de această traiectorie. Folosiți aceasta pentru a găsi cîmpul în  $P$ , care este la mijlocul drumului dintre plăcile condensatorului și la o distanță  $r$  de axa de simetrie. (Comparați aceasta cu calculul cîmpului electric indus  $\mathbf{E}$ , în exemplul din figura 7.16.)

$$\text{R. } 2\pi r B = \frac{I}{\epsilon_0 c^2} \frac{r^2}{b^2}, \quad B = \frac{I r}{2\pi \epsilon_0 c^2 b^2}.$$

*Ecuatiile lui Maxwell.*

**7.15.** Arătați că următorul cîmp electromagnetic satisface ecuațiile lui Maxwell:

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = \cos(y - ct)$$

$$B_x = \frac{1}{c} \cos(y - ct), \quad B_y = B_z = 0.$$



## Capitolul 8

### Circuite de curent alternativ

8.1. Un circuit rezonant	290
8.2. Curentul alternativ	294
8.3. Rețele de curent alternativ	301
8.4. Admitanța și impedanța	303
8.5. Puterea și energia în circuite de curent alternativ	306
Probleme	310



## 8.1. UN CIRCUIT REZONANT

Un circuit conținând inductanță, capacitate și rezistență a fost unul dintre exemplele de oscilator armonic amortizat discutate în vol. I, cap. 7. Acum putem vedea în mod precis ceea ce se petrece în acel sistem. Schema de circuit din figura 8.1 reprezintă un astfel de circuit *RLC* serie.

Fie  $Q$  sarcina, la momentul  $t$ , pe condensatorul din acest circuit. Diferența de potențial, sau tensiunea pe condensator, este  $U$ , care este aceeași ca tensiunea de-a lungul combinației-serie de inductanță  $L$  și rezistență  $R$ . Convenim ca  $U$  să fie pozitiv când placa superioară a condensatorului este încărcată pozitiv, și definim direcția pozitivă a curentului prin săgeata din figura 8.1. Cu semnele alese astfel, relațiile care leagă sarcina  $Q$ , curentul  $I$  și tensiunea de-a lungul condensatorului sînt

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad Q = CU, \quad U = L\frac{dI}{dt} + RI. \quad (1)$$

Vrem să eliminăm două din cele trei variabile,  $Q$ ,  $I$  și  $U$ . Din primele două ecuații obținem  $I = -CdU/dt$  și a treia ecuație devine

$$U = -LC(d^2U/dt^2) - RC(dU/dt),$$

sau

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right)\frac{dU}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right)U = 0. \quad (2)$$

Aceasta este o ecuație diferențială de ordinul doi cu coeficienți constanți. Vom încerca o soluție de forma

$$U = A e^{-\alpha t} \cos \omega t \quad (3)$$

unde  $A$ ,  $\alpha$  și  $\omega$  sînt constante. Derivatele acestei funcții sînt

$$\frac{dU}{dt} = A e^{-\alpha t}(-\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t) \quad (4)$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} = A e^{-\alpha t}[(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \sin \omega t]. \quad (5)$$

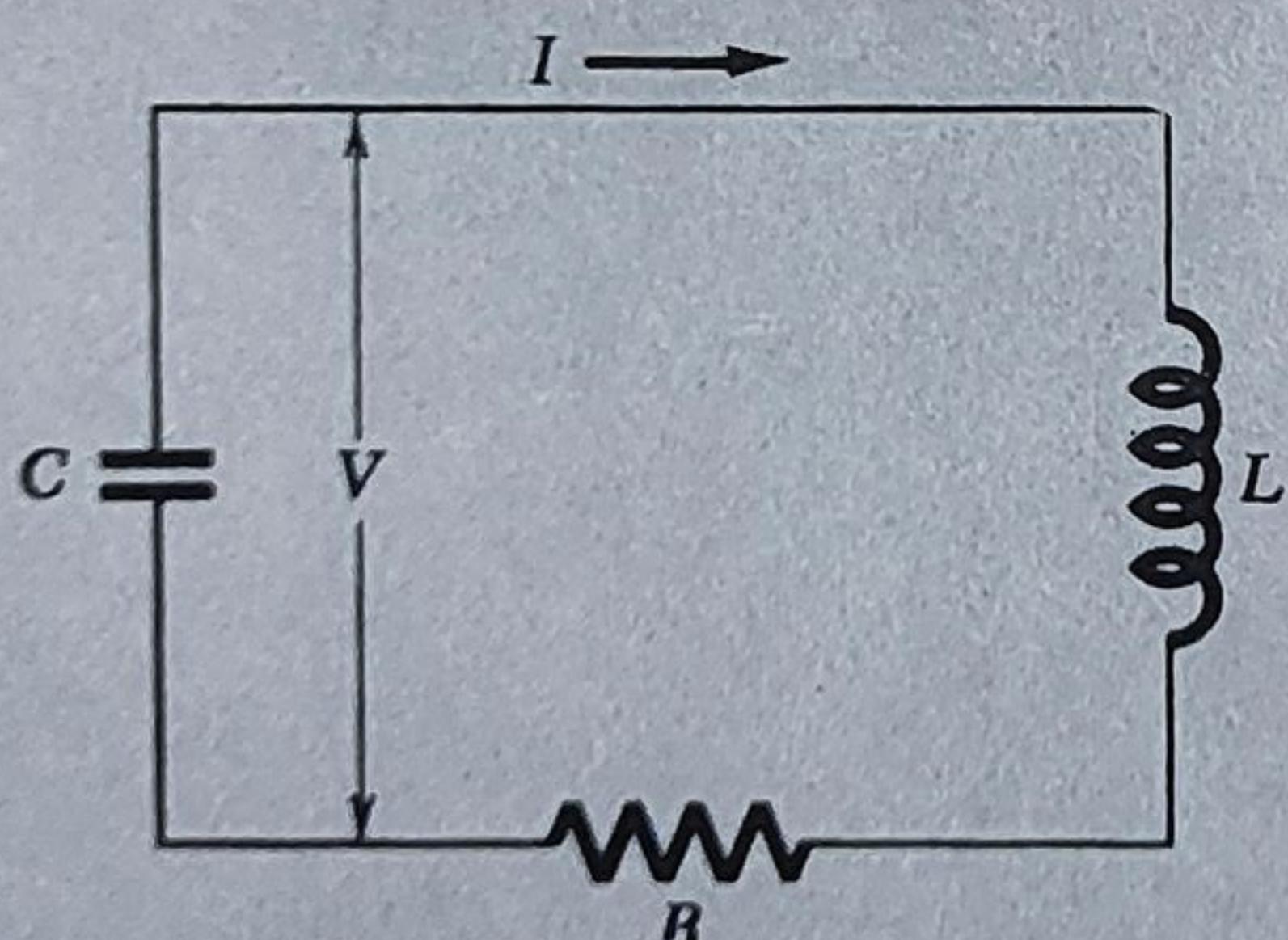


Fig. 8.1. Un circuit *RLC* serie.



Introducând în ecuația 2, simplificăm factorul comun  $Ae^{-\alpha t}$  și rămânem cu

$$(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \sin \omega t - \frac{R}{L} (\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + \frac{1}{LC} \cos \omega t = 0. \quad (6)$$

Aceasta va fi îndeplinită la toți  $t$  dacă, și numai dacă, coeficienții lui  $\sin \omega t$  și  $\cos \omega t$  sînt ambii zero. Adică, trebuie să cerem:

$$2\alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0 \quad (7)$$

și

$$\alpha^2 - \omega^2 - \alpha \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0. \quad (8)$$

Prima dintre aceste ecuații dă o condiție pentru  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (9)$$

în timp ce a doua ecuație cere ca

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \alpha \frac{R}{L} + \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}. \quad (10)$$

Deoarece constanta  $\omega$  este un număr real,  $\omega^2$  nu poate fi negativ. De aceea reușim să obținem o soluție de forma presupusă în ecuația 3 numai dacă  $R^2/4L^2 \leq 1/LC$ . De fapt tocmai cazul de „amortizare ușoară”, adică, de rezistență mică, este acela pe care vrem să îl discutăm, astfel încît vom presupune că valorile lui  $R$ ,  $L$  și  $C$  din circuit sînt astfel încît inegalitatea  $R < 2\sqrt{L/C}$  se observă.

Funcția  $Ae^{-\alpha t} \cos \omega t$  nu este singura soluție posibilă.  $Be^{-\alpha t} \sin \omega t$  merge la fel de bine, cu aceleași condiții, ecuația 9 și ecuația 10, pentru  $\alpha$  și  $\omega$  respectiv. Soluția generală este suma acestora:

$$U(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (11)$$

Constantele arbitrare  $A$  și  $B$  ar putea fi potrivite pentru a îndeplini condiții inițiale. Aceasta nu este foarte interesant. Faptul că soluția pentru un caz oarecare dat implică funcția sinus ori funcția cosinus, ori o superpoziție, este o chestiune banală de potrivire a ceasului. Fenomenul esențial este o oscilație sinusoidală amortizată.

Variația tensiunii cu timpul este arătată în figura 8.2, a. Desigur, aceasta nu se poate observa pentru tot timpul trecut. La un timp oarecare în trecut, circuitul trebuie să fi fost alimentat cumva cu energie, și apoi lăsat să meargă. De exemplu, condensatorul putea fi încărcat, cu circuitul deschis, și apoi conectat la bobină.



În figura 8.2, *b* scala timpului a fost mărită și a fost adăugată curba punctată arătând variația curentului  $I$ . Să luăm pentru  $U$  cosinusul amortizat, ecuația 3. Atunci curentul ca funcție de timp este dat de

$$I = -C \frac{dU}{dt} = AC \omega \left( \sin \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \cos \omega t \right) e^{-\alpha t}. \quad (12)$$

Raportul  $\alpha/\omega$  este o măsură a amortizării. Dacă  $\alpha/\omega$  este foarte mic, au loc multe oscilații în timp ce amplitudinea descrește numai puțin. Pentru figura 8.2 alegem un caz în care  $\alpha/\omega \simeq 0,04$ . Atunci termenul cosinus în ec. 12 nu contează prea mult. Tot ceea ce face, efectiv, este să deplaseze faza printr-un mic unghi,  $\text{tg}^{-1}(\alpha/\omega)$ . Astfel oscilația curentului este defazat cu aproape un sfert de ciclu față de oscilația tensiunii.

Oscilația implică un transfer de energie înainte și înapoi de la condensator la inductanță, sau de la câmpul electric la câmpul magnetic. La timpii notați 1 în figura 8.2, *b* toată energia este în câmpul electric. Un sfert de ciclu mai târziu, la 2, condensatorul este descărcat și aproape toată această energie se găsește în câmpul magnetic al bobinei. Între timp, rezistența  $R$  a circuitului își ia partea, și pe măsură ce oscilația continuă, energia care rămâne în câmp se micșorează treptat.

Amortizarea relativă într-un oscilator este adesea exprimată dînd un număr numit  $Q$ . Acesta a fost introdus în discuția generală a oscilatorilor armonici în volumul I, capitolul 7.  $Q$  (să nu fie confundat cu sarcina pe condensator!) este numit „factor de calitate”. Cu cît amortizarea este mai mică, cu atît este mai mare numărul  $Q$ . Pentru un oscilator de frecvență  $\omega$ ,  $Q$  este raportul adimensional format după cum urmează:

$$Q = \omega \frac{\text{energia înmagazinată}}{\text{puterea medie disipată}}. \quad (13)$$

Sau poate preferați să vă reamintiți că  $Q$  este numărul de radiani ai argumentului  $\omega t$  (adică, de  $2\pi$  ori numărul de cicluri) necesari pentru ca energia în oscilator să se micșoreze prin factorul  $1/e$ .

În circuitul nostru energia înmagazinată este proporțională cu  $U^2$  sau  $I^2$ , și de aceea, cu  $e^{-2\alpha t}$ . Energia scade prin  $1/e$  în timpul  $t = 1/2\alpha$ , care acoperă  $\omega/2\alpha$  radiani. Deci pentru circuitul nostru  $RLC$

$$Q = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\omega L}{R}. \quad (14)$$

Ca o estimare în mare, care este  $Q$  pentru oscilația reprezentată în figura 8.2?

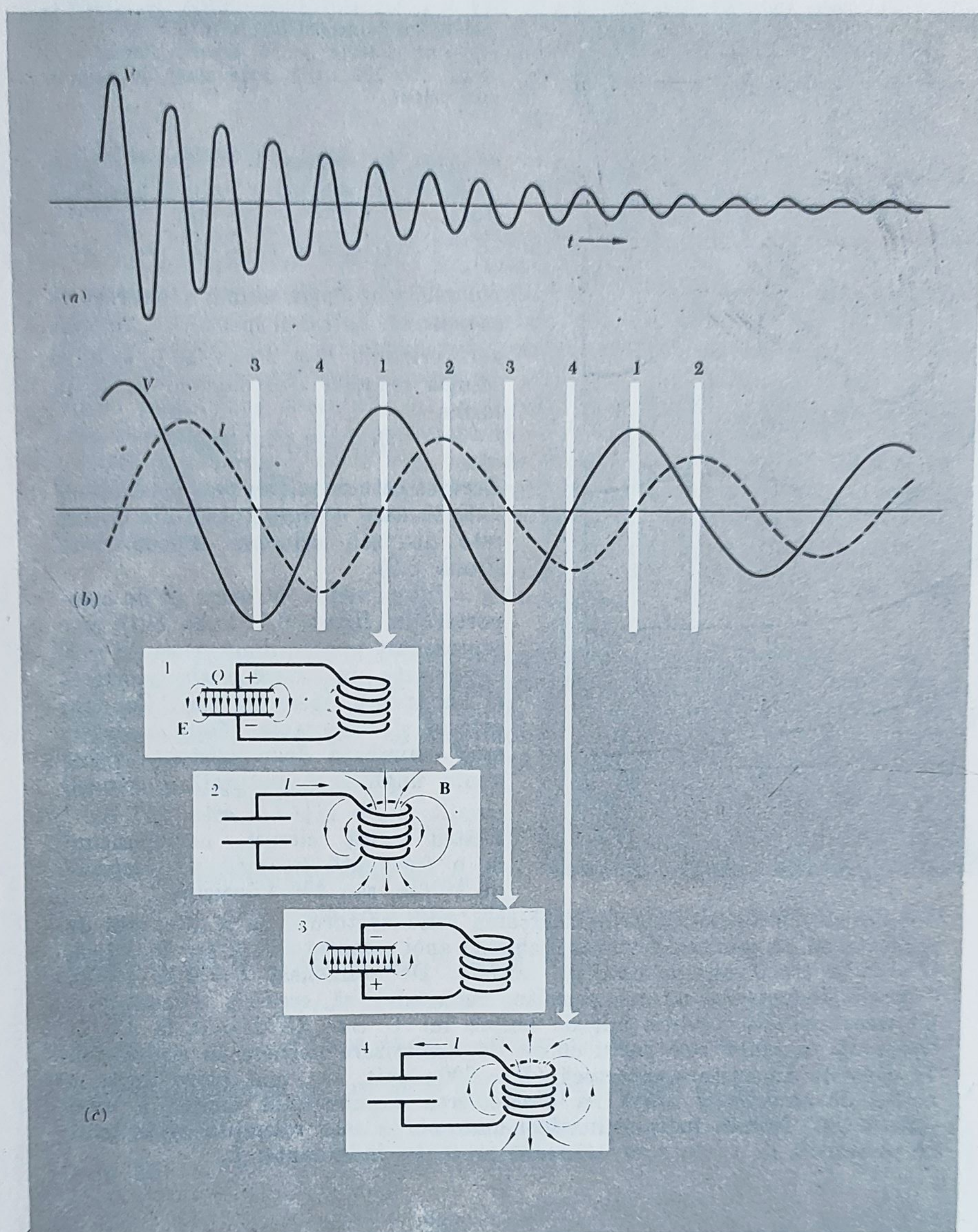
În mod limpede, cazul general pe care tocmai l-am studiat include cîteva cazuri speciale simple. Dacă  $R = 0$  avem oscilatorul complet neamortizat, a cărui frecvență este dată de

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (15)$$

În cea mai mare parte ne ocupăm de sisteme în care amortizarea este destul de mică pentru a fi neglijată în calcularea frecvenței. Așa cum va arăta problema 8.9, amortizarea are numai un efect de ordinul al doilea asupra lui  $\omega$ .

Pentru completitudine trecem în revistă pe scurt ce se petrece în circuitul hiper-amortizat, în care  $R > 2\sqrt{L/C}$ . Ecuația 2 are atunci o





**Fig. 8.2.** (a) Oscilația sinusoidală amortizată a tensiunii în circuitul RLC.

(b) O parte din (a) cu scara temporală lărgită și cuprinzând reprezentarea curentului  $I$ .

(c) Transferul periodic al energiei de la câmpul electric la câmpul magnetic și invers. Fiecare desen reprezintă situația la momente notate prin numărul corespunzător în (b).



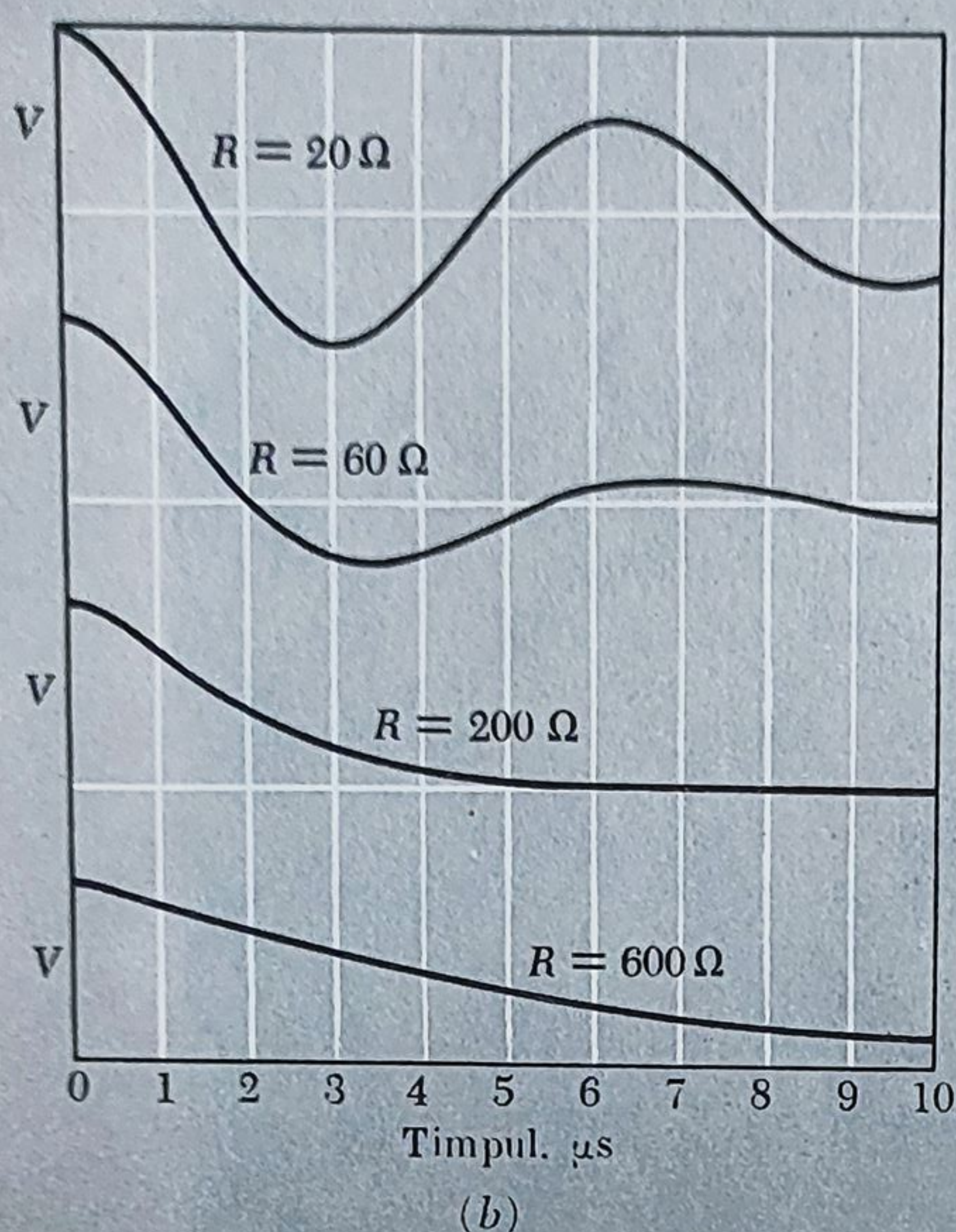
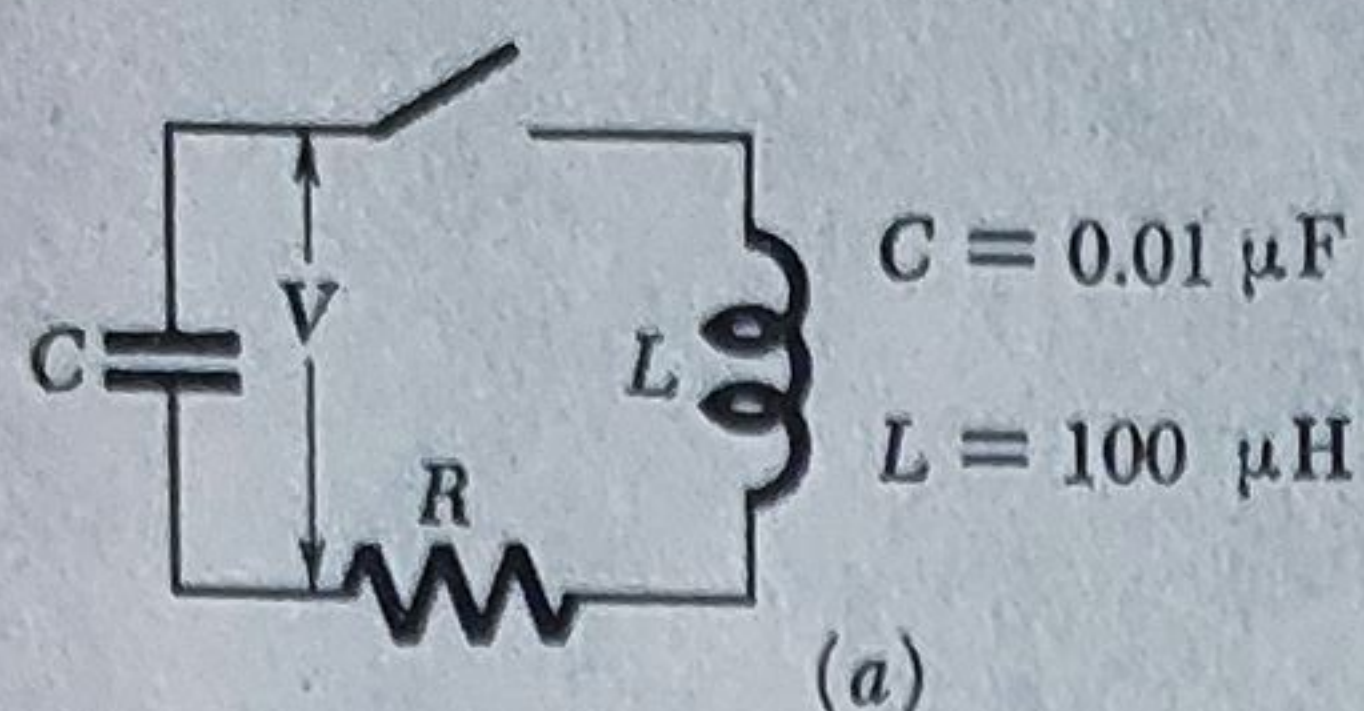


Fig. 8.3. (a) Cu condensatorul încărcat, se închide comutatorul la  $t = 0$ . (b) Sînt arătate patru cazuri, dintre care unul,  $E = 200$  ohmi, este cazul de amortizare critică.

soluție de forma  $V = A e^{-\beta t}$  pentru două valori ale lui  $\beta$ , soluția generală fiind

$$U(t) = A e^{-\beta_1 t} + B e^{-\beta_2 t}. \quad (16)$$

Nu există oscilații, numai o descreștere monotonă. În cazul special al „amortizării critice”,  $R = 2 \sqrt{L/C}$ ,  $\beta_1 = \beta_2$  și soluția ecuației diferențiale, ec. 2, ia forma

$$U(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}. \quad (17)$$

Aceasta este condiția, pentru  $L$  și  $C$  dați, în care energia totală din circuit este disipată cel mai repede (vezi Probl. 8.8).

Puteți vedea tot acest șir de comportări în figura 8.3, unde  $U(t)$  este reprezentat pentru două circuite pre-amortizate, un circuit critic-amortizat și un circuit hiperamortizat. Condensatorul și inductanța rămîn aceleași; este schimbată doar rezistența. Frecvența unghiulară naturală a acestui circuit  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  este  $10^6 \text{ sec}^{-1}$  pentru acest circuit, corespunzînd la o frecvență în cicli pe secundă de  $10^6/2\pi$ , sau 159 kilocicli/s.

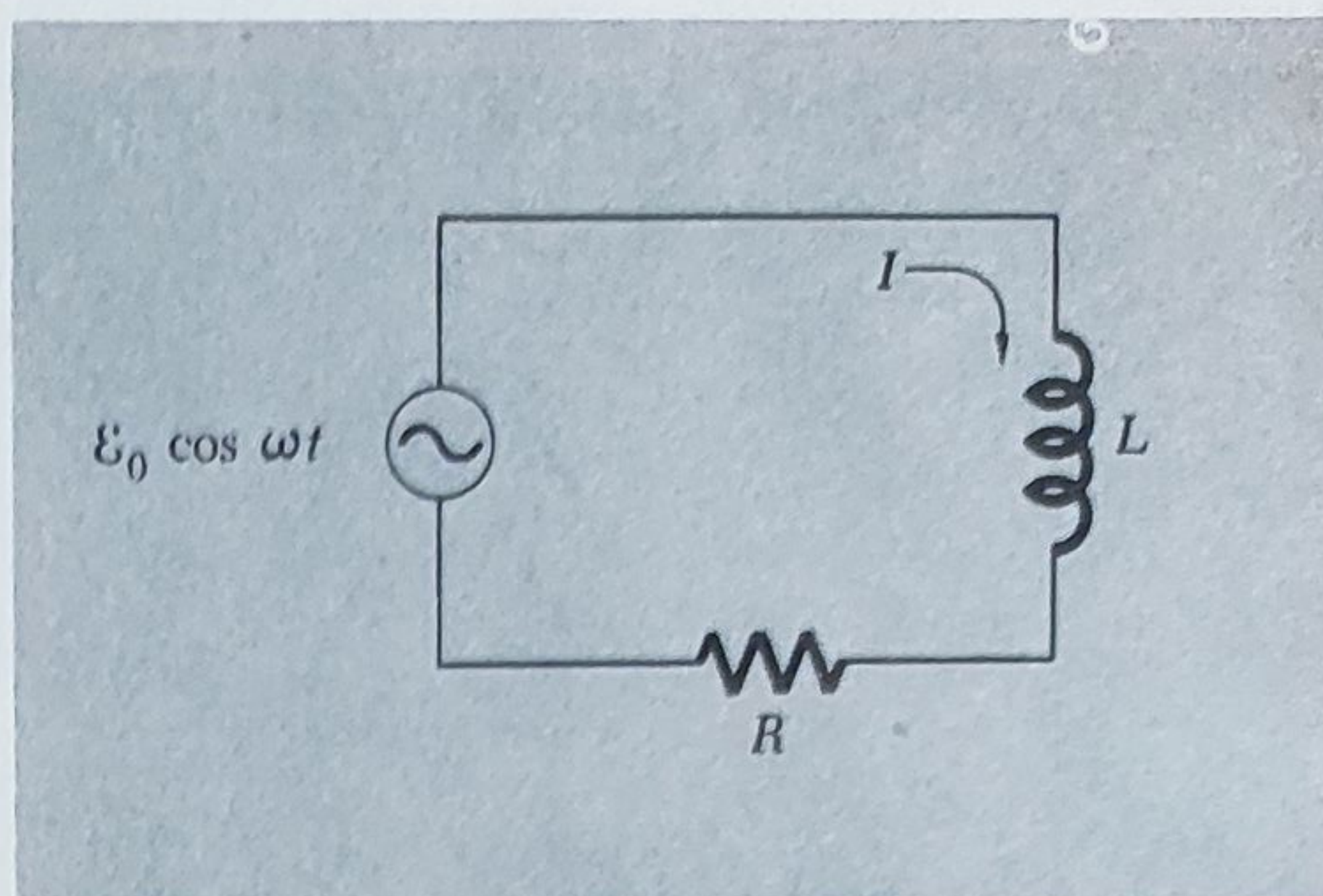
Circuitul este pornit prin încărcarea condensatorului la o diferență de potențial de, să spunem, 1 volt și închizînd apoi comutatorul la  $t = 0$ . Adică,  $U = 1$  la  $t = 0$  este o condiție inițială. De asemenea,  $I = 0$  la  $t = 0$ , deoarece inductanța nu va permite curentului să crească, discontinuu. De aceea, cealaltă condiție inițială asupra lui  $U$  este  $dU/dt = 0$ , la  $t = 0$ . Observați că toate cele patru curbe de amortizare pornesc în același fel. În cazul de amortizare puternică ( $R = 600$  ohmi), cea mai mare parte a curbei de amortizare arată ca descreșterea exponențială simplă a unui circuit  $RC$ . Numai începutul însuși unde curba este rotunjită astfel încît să pornească cu panta zero, trădează prezența inductanței  $L$ .

## 8.2. CURENTUL ALTERNATIV

Circuitul rezonant pe care tocmai l-am discutat nu conținea nici o sursă de energie și era de aceea destinat unei activități tranzitorii, o oscilație care trebuie mai devreme sau mai tîrziu să se stingă. Într-un circuit de curent alternativ ne ocupăm cu o stare staționară, un curent și o tensiune



Fig. 8.4. Un circuit cu inductanță sub o tensiune electromotoare alternativă.



oscilind sinusoidal fără schimbare de amplitudine. O forță electromotoare oarecare acționează sistemul.

Să aplicăm o forță electromotoare  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$  unui circuit conținând inductanță și rezistență. Am putea genera  $\mathcal{E}$  printr-o mașină, schematic ca cea din figura 7.13, înzestrind-o cu un motor care să rotească trunchiul la viteza unghiulară constantă  $\omega$ . În figura 8.4 această forță electromotoare este reprezentată ca fiind conectată în circuit. Vom neglija orice rezistență internă în generator, sau o vom include în  $R$ . Punem ca suma căderilor de potențial peste elementele acestui circuit să egaleze forța electromotoare  $\mathcal{E}$ , exact cum am făcut la deducerea ecuației 7.61. Ecuația care controlează curentul este atunci:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (18)$$

Acum poate exista o oarecare comportare tranzitorie, depinzând de condițiile inițiale, adică, de cum și când este conectat generatorul. Dar sîntem interesați numai în soluția staționară, cînd curentul este în oscilație la frecvența forței exterioare, cu amplitudine și faza necesare pentru a menține ecuația 18 satisfăcută. Pentru a arăta că aceasta este posibil, să considerăm un curent descris de

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (19)$$

Pentru a determina constantele  $I_0$  și  $\varphi$ , introducem aceasta în ecuația 18:

$$-LI_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) - RI_0 \cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (20)$$

Funcțiile  $\cos \omega t$  și  $\sin \omega t$  pot fi separate:

$$\begin{aligned} & -LI_0 \omega (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) + \\ & + RI_0 (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (21)$$

Punind coeficienții lui  $\cos \omega t$  și  $\sin \omega t$  separat egali cu zero,

$$-LI_0 \omega \cos \varphi - RI_0 \sin \varphi = 0 \quad (22)$$

care dă

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega L}{R}. \quad (23)$$

$$-LI_0 \omega \sin \varphi + RI_0 \cos \varphi - \mathcal{E}_0 = 0 \quad (24)$$

care dă

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R \cos \varphi - \omega L \sin \varphi} = \frac{\mathcal{E}_0}{R(\cos \varphi + \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi)} = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \varphi}{R} \quad (25)$$



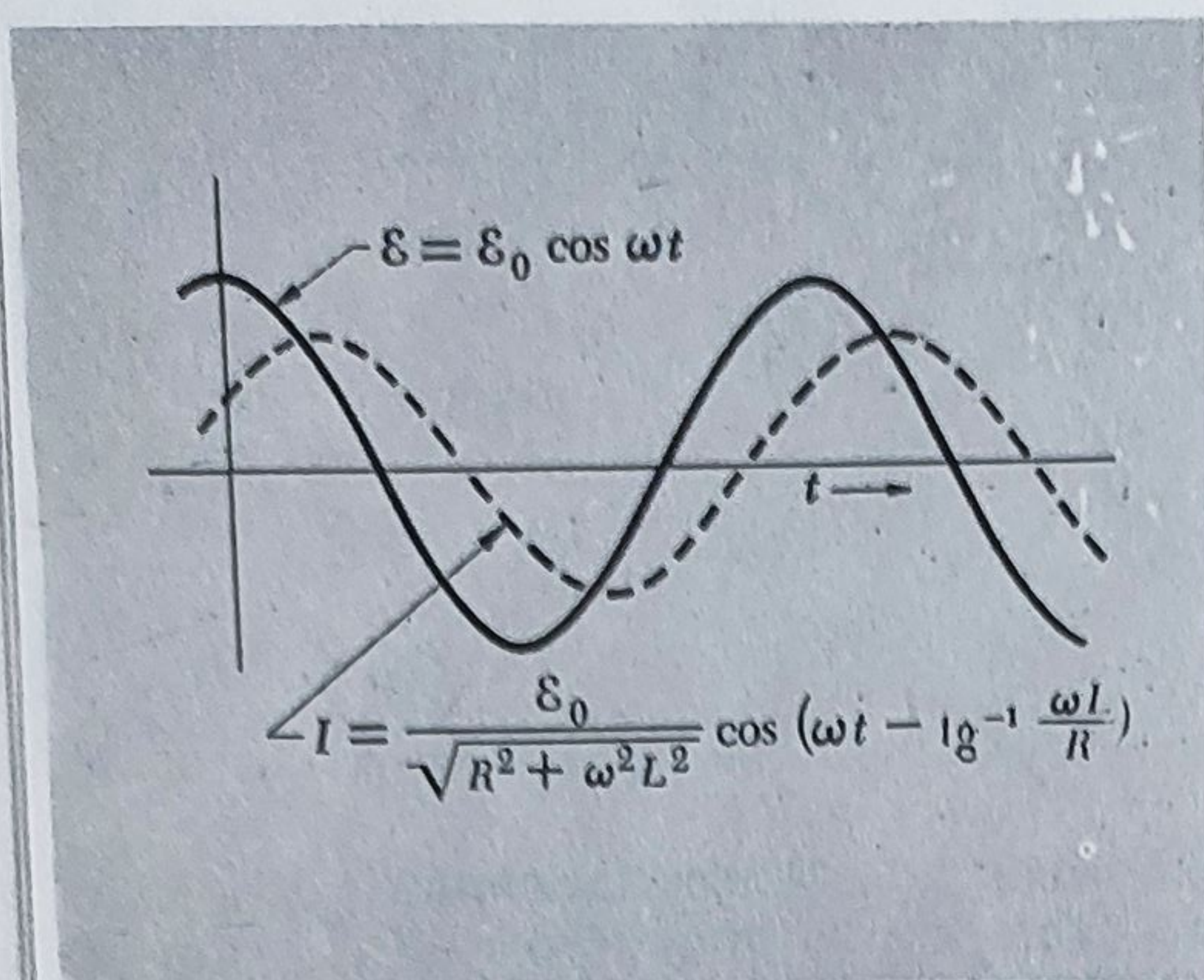


Fig. 8.5. Curentul  $I$ , în circuitul din fig. 8.4, reprezentat împreună cu tensiunea electromotoare  $\varepsilon$  în aceeași scară temporală. De notat diferența de fază.

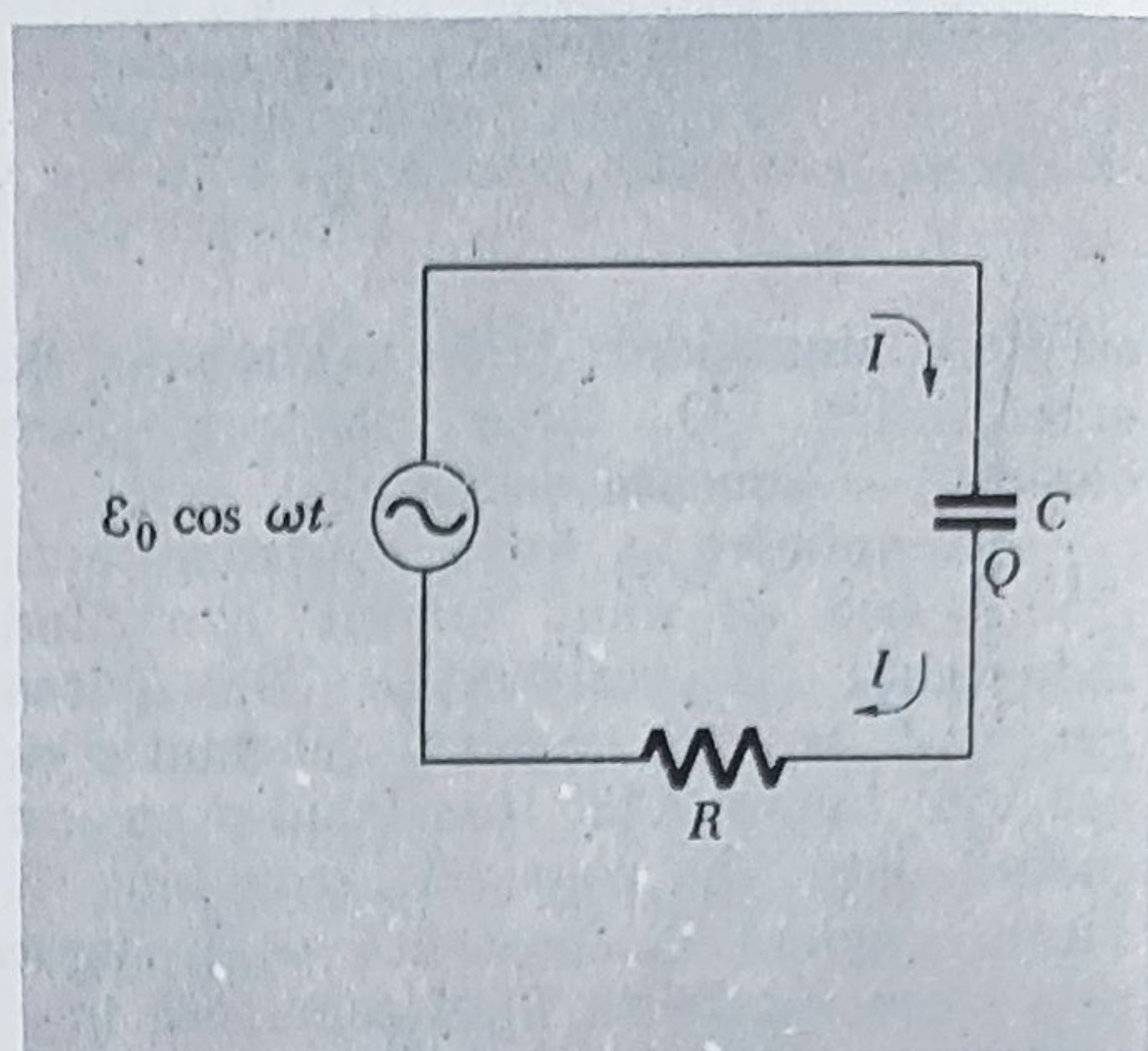


Fig. 8.6. O forță electromotoare alternativă într-un circuit conținând rezistență și capacitate.

sau deoarece

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (\text{din ecuația 23}). \quad (26)$$

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \quad (27)$$

În figura 8.5 oscilațiile lui  $\mathcal{E}$  și  $I$  sînt reprezentate pe același grafic. Deoarece  $\varphi$  este un unghi negativ, curentul își atinge maximumul ceva *mai tîrziu* decît forța electromotoare. Se spune „curentul rămîne în urma tensiunii într-un circuit inductiv”. Cantitatea  $\omega L$  care are dimensiunile de rezistență și poate fi exprimată în ohmi este numită *reactanță inductivă*.

Dacă înlocuim inductanța  $L$  printr-un condensator  $C$ , ca în figura 86, avem un circuit controlat de ecuația

$$-\frac{Q}{C} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (28)$$

Considerăm soluția staționară

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (29)$$

Deoarece  $I = -dQ/dt$ , avem

$$Q = -\int I dt = -\frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi). \quad (30)$$

De notat că trecînd de la  $I$  la  $Q$  prin integrare, nu se pune problema de a aduna o constantă de integrare, deoarece știm că  $Q$  trebuie să oscileze simetric în jurul lui zero în starea staționară.



Substituirea în ecuația 28 conduce la

$$\frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi) + RI_0 \cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (31)$$

Exact ca înainte, obținem condiții asupra lui  $\varphi$  și  $I_0$  cerind coeficienților lui  $\cos \omega t$  și  $\sin \omega t$  să se anuleze separat. În acest caz, rezultatele sînt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R\omega C} \quad (32)$$

și

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}. \quad (33)$$

Notăți că unghiul de fază este acum pozitiv. Cum se spune, curentul „e înaintea tensiunii” într-un circuit capacitiv. Ce înseamnă aceasta este vizibil în graficul din figura 8.7.

Matematic vorbind, funcția

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) \quad (34)$$

este o *integrală particulară* a ecuației diferențiale, ecuația 18. La aceasta se poate adăuga o *funcție complementară*, adică, orice soluție a ecuației diferențiale omogene

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0. \quad (35)$$

Acum aceasta este tocmai ecuația 7.65, a cărei soluție am găsit-o, în § 7.9, ca fiind o funcție exponențială descrescătoare

$$I \sim e^{-(R/L)t}.$$

Semnificația fizică este aceasta: O tranziție, determinată de niște condiții inițiale, este reprezentată de o componentă descrescătoare a lui  $I(t)$  de forma ec. 36. După un timp  $t \gg L/R$ , aceasta se va fi anulat lăsind numai oscilația sinusoidală staționară la frecvența de comandă, reprezentată de integrala particulară, ecuația 34.

Asemănarea rezultatelor pentru circuitul  $RL$  și circuitul  $RC$  sugerează o cale de a privi la inductanța și capacitatea în serie. Să presupunem că un curent alternativ  $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$  este făcut într-un mod oarecare să treacă printr-o astfel de combinație (arătată în fig. 8.8). Tensiunea de-a lungul bobinei,  $U_L$ , va fi

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -I_0 \omega L \sin(\omega t + \varphi). \quad (37)$$

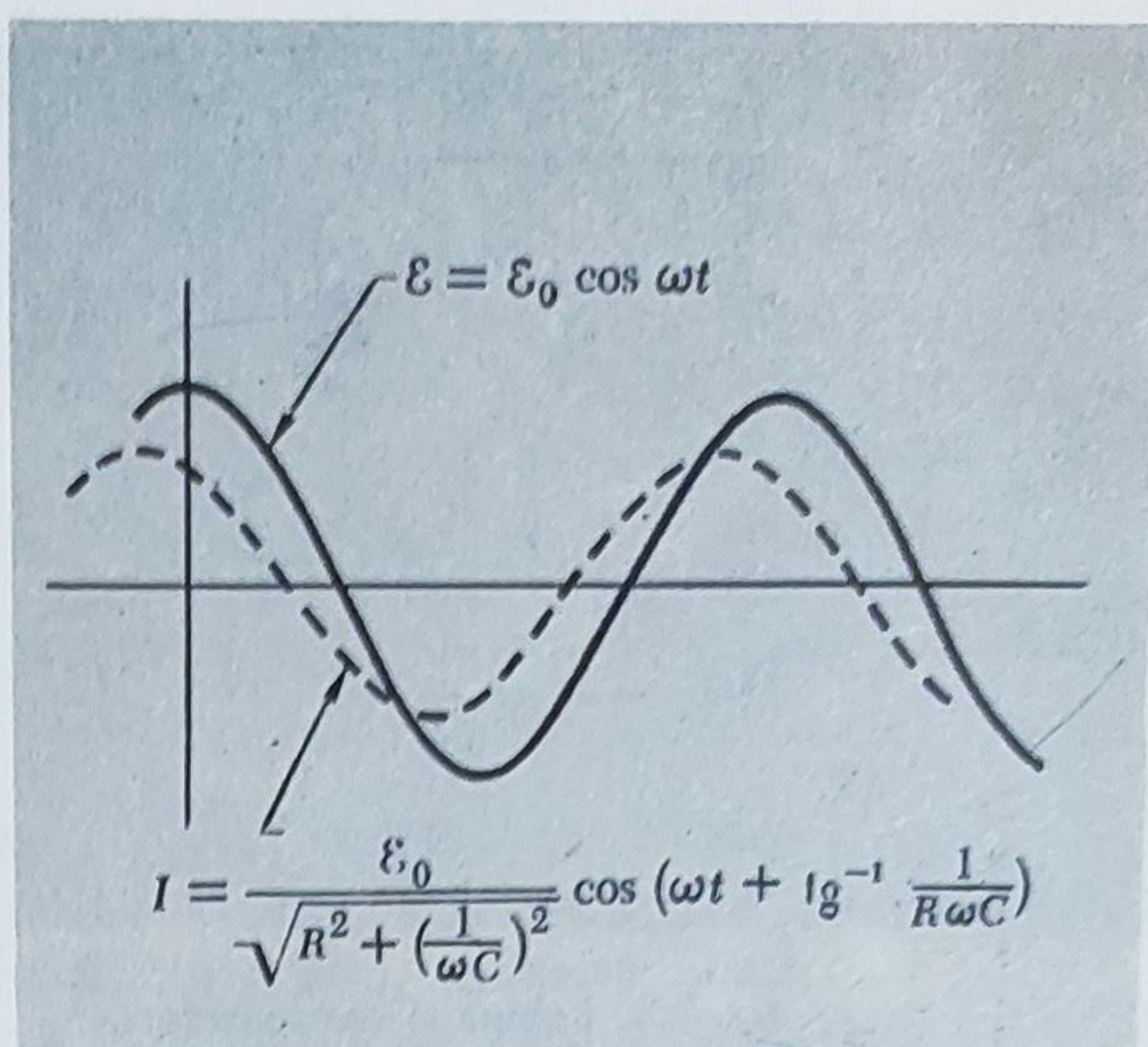


Fig. 8.7. Curentul în circuitul  $RC$ . De comparat defazajul aici cu defazajul în circuitul inductiv din fig. 8.5.



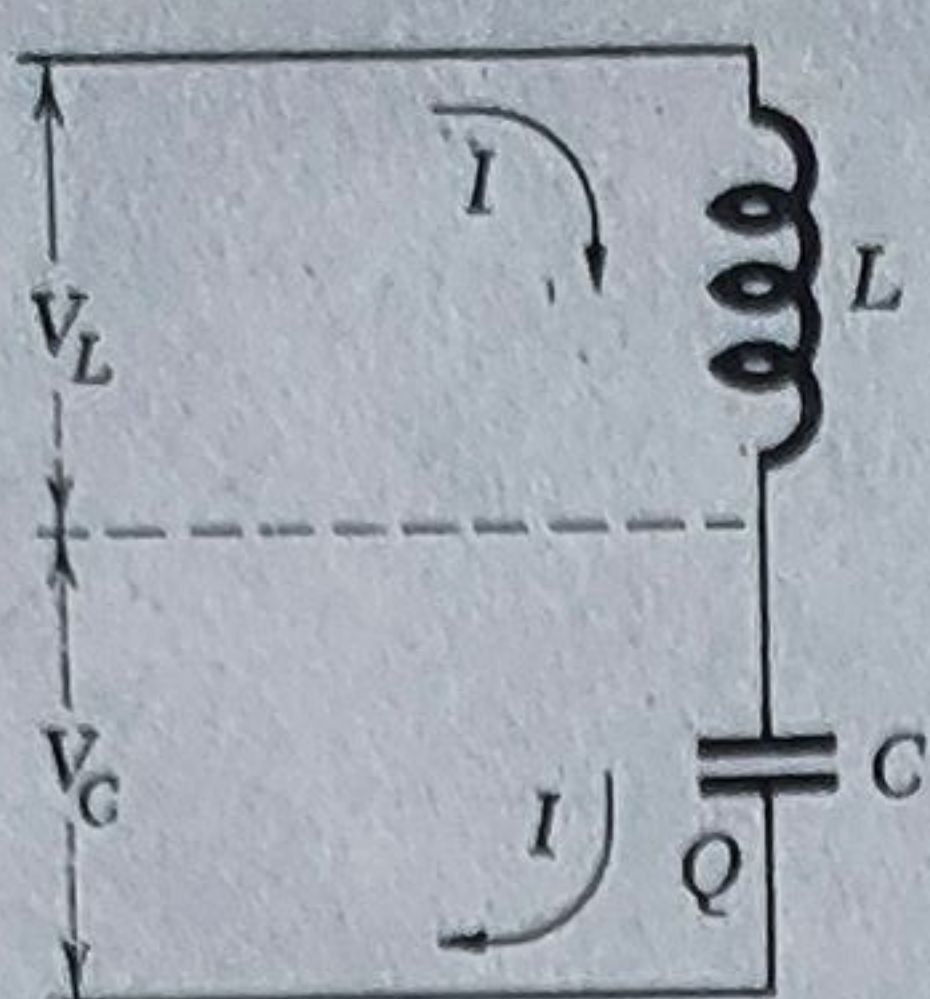


Fig. 8.8. Bobina și condensatorul în serie sînt echivalente cu un element reactiv care este fie o bobină, fie un condensator după cum  $\omega^2 LC$  este mai mare sau mai mic decît 1.

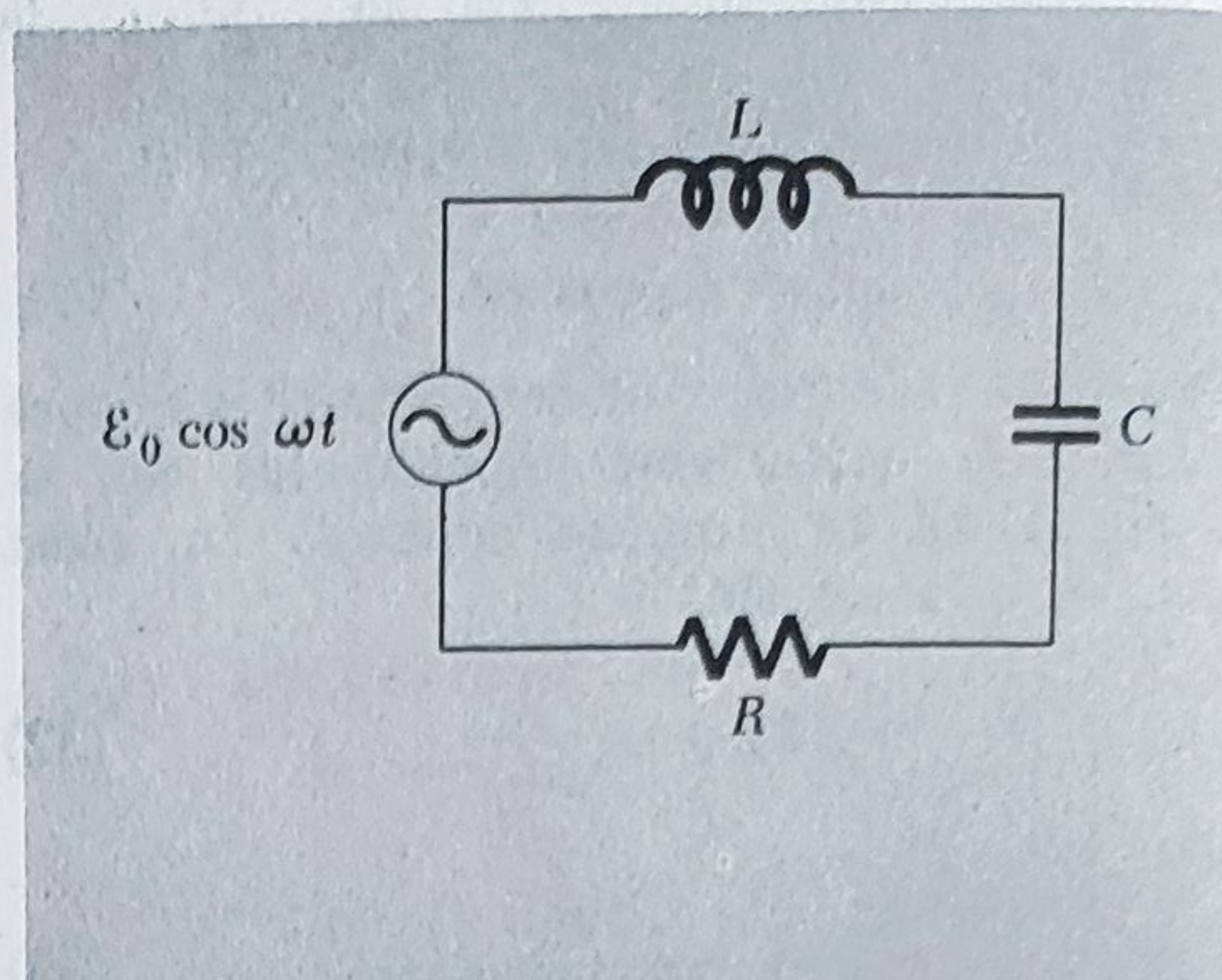


Fig. 8.9. Circuitul RLC acționat de o forță electromotoare sinusoidală.

Tensiunea  $U_C$  la bornele condensatorului, cu semnul compatibil cu semnul lui  $U_L$ , este

$$U_C = -\frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi). \quad (38)$$

Tensiunea pe combinație este atunci

$$U = U_L + U_C = -\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (39)$$

Pentru un  $\omega$  dat, combinația este evident echivalentă cu un singur element, fie inductanță fie capacitate, depinzînd de faptul dacă expresia  $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$  este pozitivă sau negativă. Să presupunem, de exemplu, că  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ . Atunci combinația este echivalentă unei inductanțe  $L'$  astfel încît

$$\omega L' = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \quad (40)$$

Echivalența înseamnă numai că relația între curent și tensiune, pentru oscilații staționare la frecvența particulară  $\omega$ , este aceeași. Aceasta ne permite că înlocuim  $L$  și  $C$  prin  $L'$  în orice circuit acționat la acea frecvență.

Aceasta se poate aplica la circuitul simplu RLC din figura 8.9. Avem numai nevoie să reluăm ecuațiile 23 și 27, soluția pentru circuitul RL acționat de o forță electromotoare  $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$ , și să înlocuim  $\omega L$  prin  $\omega L - 1/\omega C$ :

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (41)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R\omega C} - \frac{\omega L}{R}. \quad (42)$$



Pentru o amplitudine fixă  $\mathcal{E}_0$  a tensiunii electromotoare, și elemente de circuit  $L$ ,  $C$  și  $R$  date, obținem cel mai mare curent când frecvența purtătoare  $\omega$  este astfel încît

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad (43)$$

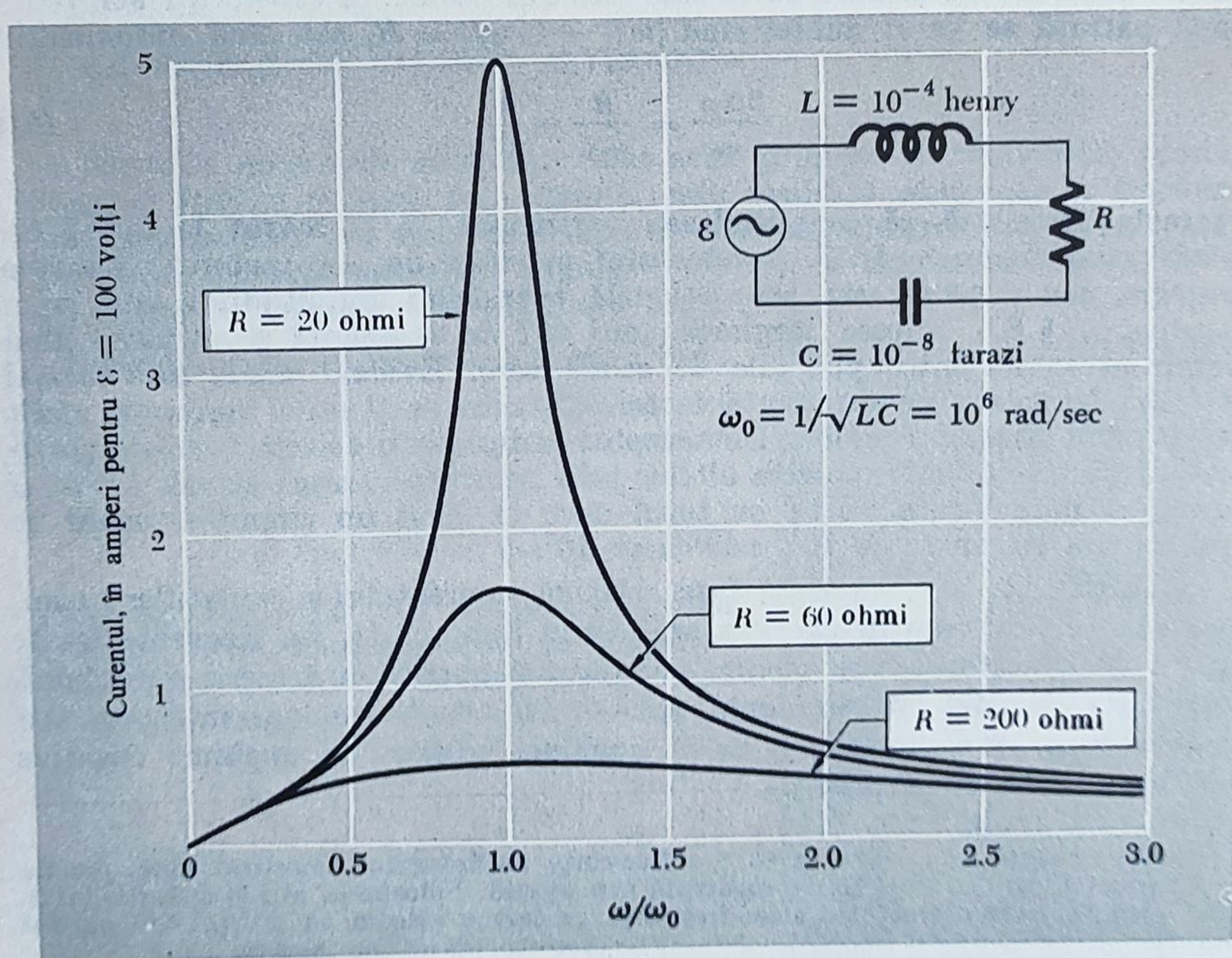
care este același lucru cu a spune că  $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$ , frecvența rezonantă a circuitului  $LC$  neamortizat. În acest caz ecuația 39 se reduce la

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \omega t}{R}. \quad (44)$$

Acesta este exact curentul care ar trece dacă circuitul conținea o singură rezistență.

Ca exemplu, să considerăm circuitul din figura 8.3, *a*, conectat acum la o sursă sau generator de t.e.m. alternativă,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ . Frecvența de comandă  $\omega$  poate fi diferită de frecvența de rezonanță  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , care, pentru capacitatea (0,01 microfarazi) și inductanța (100 microhenry) date

Fig. 8.10. O t.e.m. de amplitudine 100 volți este aplicată unui circuit serie  $RLC$ . Elementele de circuit sînt aceleași ca în exemplul circuitului amortizat din fig. 8.3. Amplitudinea curentului este calculată prin ecuația 41 și este reprezentată, ca funcție de  $\omega/\omega_0$ , pentru trei valori diferite ale rezistenței.





este  $10^6$  radiani/s. (sau  $10^6/2\pi$  cicli/s). Figura 8.10 arată amplitudinea curentului oscilant, ca funcții de frecvențe purtătoare, pentru trei valori diferite ale rezistenței  $R$  a circuitului. Se presupune că amplitudinea  $\mathcal{E}_0$  a t.e.m. este 100 volți în fiecare caz. Observați vârful de rezonanță la  $\omega = \omega_0$ , care este cel mai reliefat și ascuțit pentru valoarea cea mai scăzută a lui  $R$  pentru care, funcționând ca oscilator amortizat fără nici o t.e.m. de comandă, circuitul se comportă ca în primul grafic din figura 8.3, b.

$Q$ -ul circuitului, definit prin ec. 14 ca  $\omega_0 L/R^*$  este  $\frac{(10^6 \times 10^{-4})}{20}$  sau 5, în acest caz. General vorbind, cu cât  $Q$  al unui circuit este mai mare, cu atât vârful răspunsului său ca funcție de frecvența de comandă  $\omega$  este mai îngust și mai înalt. Pentru a fi mai preciși, să considerăm frecvența în vecinătatea lui  $\omega_0$ , scriind  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ . Atunci în primul ordin în  $\omega/\omega_0$ , expresia  $\omega L - 1/\omega C$  care intervine în numitorul din ecuația 41 se poate aproxima astfel:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) - \frac{1}{\omega_0 C (1 + \Delta\omega/\omega_0)} \quad (45)$$

și deoarece  $\omega_0$  este  $1/\sqrt{LC}$ , aceasta devine

$$\omega_0 L \left[ 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} - \frac{1}{1 + \Delta\omega/\omega_0} \right] \approx \omega_0 L \left( 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right). \quad (46)$$

Exact la rezonanță, cantitatea în interiorul rădăcinii pătrate în ecuația 41 este tocmai  $R^2$ . Pe măsură ce  $\omega$  este scos din rezonanță cantitatea sub rădăcina pătrată se va fi dublat când  $|\omega L - 1/\omega C| = R$ , sau când, aproximativ

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q}. \quad (47)$$

Aceasta înseamnă că amplitudinea curentului va fi scăzut la  $1/\sqrt{2}$  ori vârful când  $\Delta\omega/\omega_0 = 1/2Q$ . Acestea sînt punctele de „semiputere“, deoarece energia, sau puterea este proporțională pătratului amplitudinii, cum vom explica în § 8.5. Adesea lărgimea unui vîrf de rezonanță se exprimă dînd lărgimea totală între punctele de semiputere. Evident aceea este tocmai  $1/Q$  ori frecvența de rezonanță însăși. Circuite cu  $Q$  mult mai mare decît acesta sînt absolut comune. Un receptor radio poate selecta o stație particulară și discrimina împotriva altelor prin intermediul unui circuit cu un  $Q$  de mai multe sute. Este cu totul ușor de făcut un circuit rezonant de microunde cu un  $Q$  de  $10^4$ , sau chiar  $10^5$ .

Unghiul  $\varphi$ , care exprimă faza relativă a curentului și oscilațiilor t.e.m., variază cu frecvența în maniera arătată în figura 8.11. La frecvențe foarte joase condensatorul este piedica dominantă împotriva trecerii curentului, și  $\varphi$  este pozitiv. La rezonanță,  $\varphi = 0$ . Cu cât  $Q$  este mai mare, cu atât mai abrupt se deplasează  $\varphi$  de la unghiuri pozitive la unghiuri negative cînd frecvența trece prin  $\omega_0$ .

\* Frecvența  $\omega$  în ecuația 14 era frecvența oscilatorului amortizat liber, practic același ca  $\omega_0$  pentru amortizare moderată sau ușoară. Folosim  $\omega_0$  aici în definiția lui  $Q$ . În discuția prezentă  $\omega$  este orice frecvență pe care o alegem să o aplicăm acestui circuit.



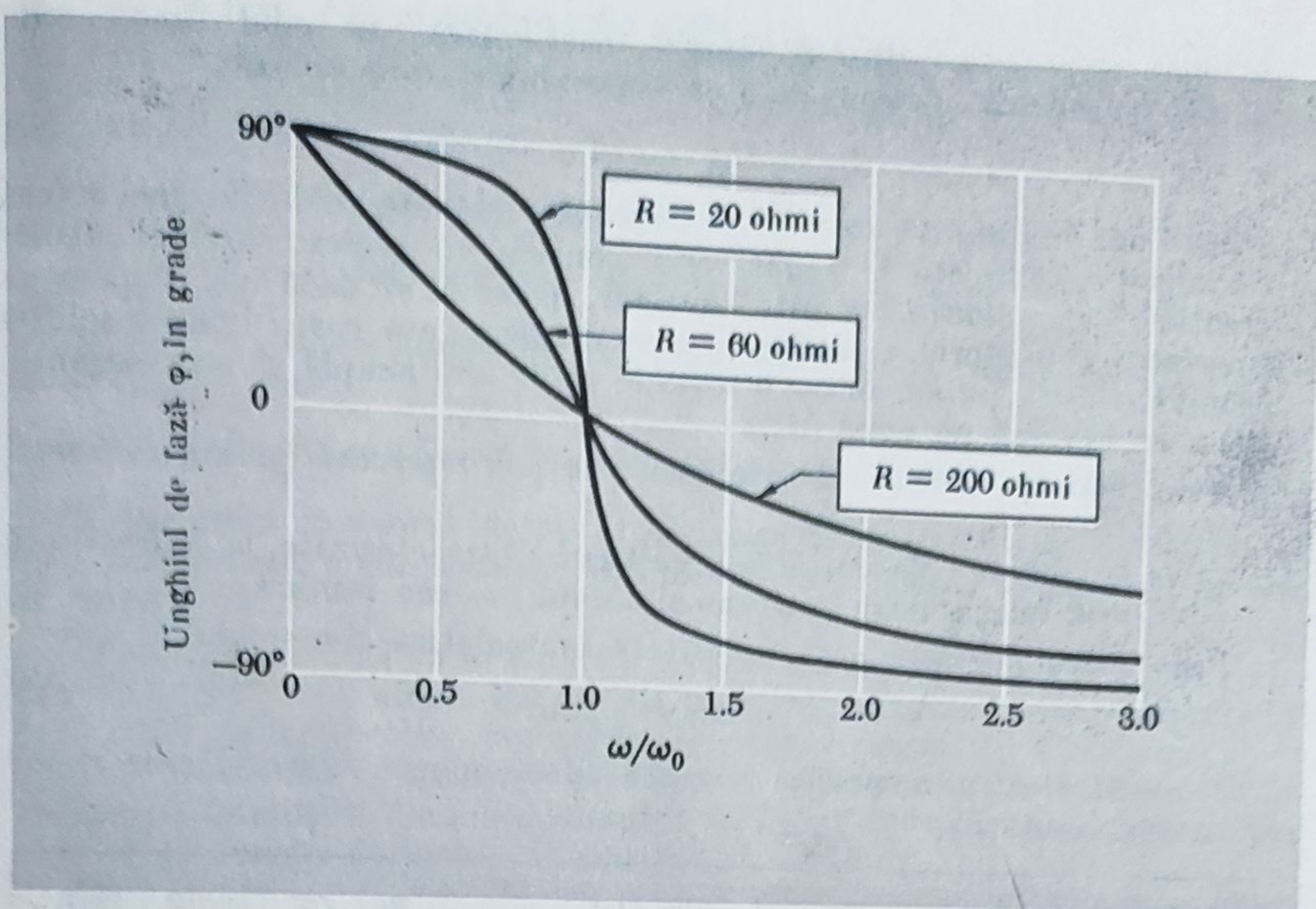


Fig. 8.11. Variația unghiului de fază cu frecvența, în circuitul din fig. 8.10.

### 8.3. REȚELE DE CURENT ALTERNATIV

O rețea de curent alternativ este orice grupare de rezistențe, condensatori și bobine în care trec curenți care oscilează staționar la frecvența constantă  $\omega$ . Una sau mai multe surse de tensiune electromotoare, la această frecvență, întrețin oscilația. Figura 8.12 este o schemă a unei astfel de rețele. Sursa tensiunii electromotoare alternative este reprezentată prin simbolul  $\sim$ .

Într-o ramură a rețelei, de exemplu ramura care include inductanța  $L_2$ , curentul în funcție de timp este

$$I_2 = I_{02} \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (48)$$

Deoarece frecvența este constantă pentru întreaga rețea, două numere, ca amplitudinea  $I_{02}$  și constanta de fază  $\varphi_2$  de mai sus, sînt suficiente pentru a determina la

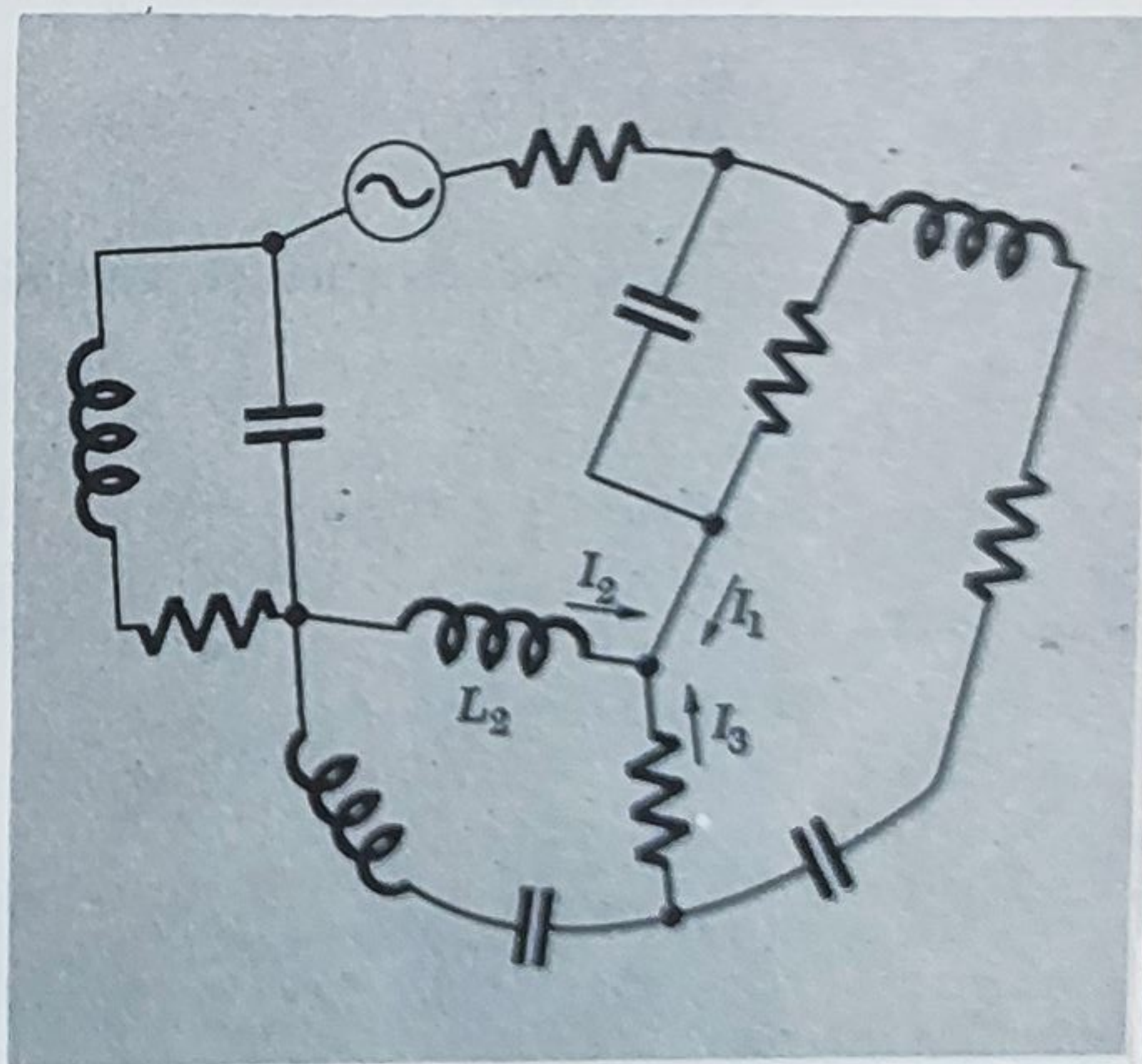


Fig. 8.12. O schemă de curent alternativ.

87,83,73  
285,257, 246,1



orice moment curentul într-o ramură particulară. În mod asemănător, tensiunea pe ramură oscilează cu o oarecare amplitudine și fază:

$$U_2 = U_{02} \cos(\omega t + \theta_2). \quad (49)$$

Dacă am determinat curenții și tensiunile în toate ramurile unei rețele, am analizat-o complet. A le găsi prin construirea și rezolvarea ecuațiilor diferențiale corespunzătoare este, desigur, posibil, și dacă ne ocupăm cu comportarea tranzitorie a rețelei, aveam de făcut așa ceva. Pentru soluția staționară, totuși, putem folosi o metodă mult mai simplă și mai elegantă. Aceasta se bazează pe două idei:

- (I) Un curent sau o tensiune alternativă se pot *reprezenta* printr-un număr complex.
- (II) Orice ramură sau element din circuit pot fi caracterizate, la o frecvență dată, prin relația între tensiune și curent în acea ramură.

Prima idee folosește acea identitate matematică remarcabilă

$$e^{i\psi} = \cos \psi + i \sin \psi \quad (50)$$

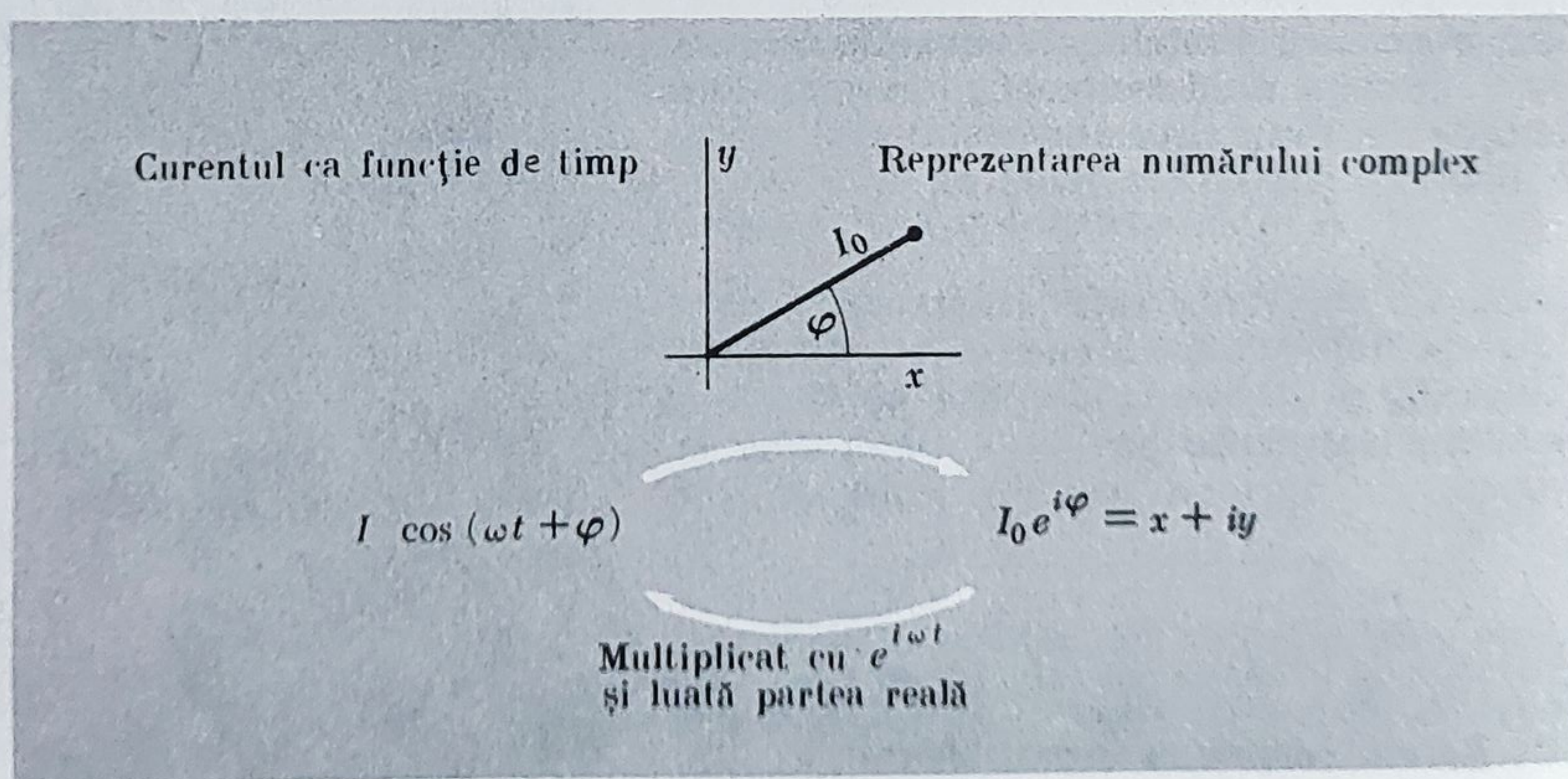
cu  $i^2 = -1$ . Pentru a preciza această idee, adoptăm următoarea *regulă* pentru reprezentare:

Un curent alternativ  $I_0 \cos(\omega t + \varphi)$  se va *reprezenta* prin numărul complex  $I_0 e^{i\varphi}$ , adică, numărul a cărui parte reală este  $I_0 \cos \varphi$  și a cărui parte imaginară este  $I_0 \sin \varphi$ .

De altă parte, dacă numărul complex  $x + iy$  *reprezintă* un curent  $I$ , atunci curentul ca funcție de timp este dat de partea reală a produsului  $(x + iy)e^{i\omega t}$ .

Figura 8.13 ilustrează această dublă corespondență. Deoarece un număr complex  $z = x + iy$  poate fi reprezentat grafic în planul bi-dimensional, este ușor de vizualizat constanta de fază drept unghiul  $\tan^{-1} y/x$ , și amplitudinea  $I_0$  ca modulul  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

Fig. 8.13. Reguli pentru reprezentarea unui curent alternativ printr-un număr complex.





Ceea ce face toate acestea să fie utile este următorul fapt: *Reprezentarea sumei a doi curenți este suma reprezentărilor lor.* Să considerăm suma a doi curenți  $I_1$  și  $I_2$  care se întâlnesc la un nod de fire în figura 8.12. La orice moment  $t$  suma curenților este:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_{01} \cos(\omega t + \varphi_1) + I_{02} \cos(\omega t + \varphi_2) = \\ &= (I_{01} \cos \varphi_1 + I_{02} \cos \varphi_2) \cos \omega t - (I_{01} \sin \varphi_1 + I_{02} \sin \varphi_2) \sin \omega t. \end{aligned} \quad (51)$$

De altă parte, suma numerelor complexe care, după regula noastră, reprezintă  $I_1$  și  $I_2$  este:

$$I_{01} e^{i\varphi_1} + I_{02} e^{i\varphi_2} = (I_{01} \cos \varphi_1 + I_{02} \cos \varphi_2) + i(I_{01} \sin \varphi_1 + I_{02} \sin \varphi_2). \quad (52)$$

Dacă înmulțiți membrul drept al ecuației 52 prin  $(\cos \omega t + i \sin \omega t)$  și luați partea reală a rezultatului, veți obține tocmai ceea ce apare la dreapta în ecuația 51.

Aceasta înseamnă că în loc de a aduna sau scădea însăși funcțiile periodice de timp, putem aduna sau scădea numerele complexe care le reprezintă. Sau altfel spus, algebra curenților alternativi apare ca fiind aceeași ca algebra numerelor complexe, privitor la adunare. Corespondența *nu* se extinde la înmulțire. Numărul complex  $I_{01} I_{02} e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$  *nu* reprezintă produsul celor două funcții de curent în ecuația 51.

Totuși, doar de adunarea de curenți și tensiuni avem nevoie pentru a analiza rețeaua. De exemplu, la nodul unde  $I_1$  întâlnește  $I_2$  în figura 8.12, apare cerința ca în fiecare moment curgerea netă de curent în joncțiune să fie zero. De aici, condiția

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (53)$$

trebuie să fie îndeplinită, unde  $I_1, I_2$  și  $I_3$  sînt funcțiile periodice de timp reale. Mulțumită corespondenței noastre, aceasta se poate exprima în forma algebrică simplă că suma de trei numere complexe este zero. Tensiunile pot fi minuite în același fel. În mod instantaneu, suma căderilor de tensiune în jurul oricărei bucle în rețea trebuie să fie egală cu forța electromotoare în buclă la acel moment. Această condiție care leagă funcții de tensiune periodice se pot înlocui de asemenea prin afirmații despre suma unor numere complexe, reprezentările diverselor funcții oscilante,  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$  etc.

#### 8.4. ADMITANȚA ȘI IMPEDANȚA

Relația între curgerea de curent printr-un element de circuit și tensiunea pe element poate fi exprimată ca o relație între numerele complexe care reprezintă tensiunea și curentul. Să privim la combinația de inductanță rezistentă din figura 8.4. Oscilația tensiunii este reprezentată prin  $\mathcal{E}_0$  și curentul prin  $I_0 e^{i\varphi}$ , unde  $I_0 = \mathcal{E}_0 / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$  și  $\text{tg } \varphi = -\omega L / R$ . Diferența de fază  $\varphi$  și raportul amplitudinii curentului la amplitudinea tensiunii sînt proprietăți ale circuitului la această frecvență. Definim un număr complex  $y$  astfel:

$$Y = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{cu } \varphi = \text{tg}^{-1} \left( -\frac{\omega L}{R} \right). \quad (54)$$

87.83.43  
285.257.24



Atunci relația

$$I = YU \quad (55)$$

are loc, unde  $U$  este numărul complex care reprezintă tensiunea pe combinația serie de  $R$  și  $L$ , și  $Y$  este numărul complex care reprezintă curentul.  $Y$  este numit *admitanță*. Aceeași relație se poate exprima cu inversul lui  $Y$ , notat prin  $Z$  și numit *impedanță*:

$$U = \left(\frac{1}{Y}\right) I = ZI. \quad (56)$$

Aici ne folosim de produsul a două numere complexe, dar numai unul dintre numere este reprezentarea unui curent alternativ sau a unei tensiuni. Celălalt este impedanța sau admitanța.\*

Impedanța se măsoară în ohmi. Într-adevăr, dacă elementul de circuit era alcătuit doar din rezistența  $R$ , impedanța ar fi fost reală și egală cu  $R$ , astfel încât ecuația 56 ar avea aceeași formă cu legea lui Ohm pentru un circuit de curent continuu:  $U = RI$ .

Admitanța unei inductanțe fără rezistență este cantitatea imaginară  $Y = -i/\omega L$ . Aceasta se poate vedea făcând  $R$  să se apropie de zero în ecuația 54. Factorul  $-i$  arată că oscilația curentului rămâne în urma oscilației tensiunii prin  $\frac{\pi}{2}$  în fază.

În diagrama numerelor complexe, dacă tensiunea este reprezentată prin  $U$  (fig. 8.14, b) curentul ar putea fi reprezentat prin  $I$ , situat cum se arată acolo. Pentru capacitate,  $Y = i\omega C$ , după cum se poate vedea din expresia pentru curent în figura 8.7. În acest caz  $U$  și  $I$  sînt legate după cum se indică în figura 8.14, c. În fiecare figură se arată de asemenea cum trebuie ales semnul relativ al lui  $U$  și  $I$ . Dacă aceasta nu se face în mod corespunzător, „înainte“

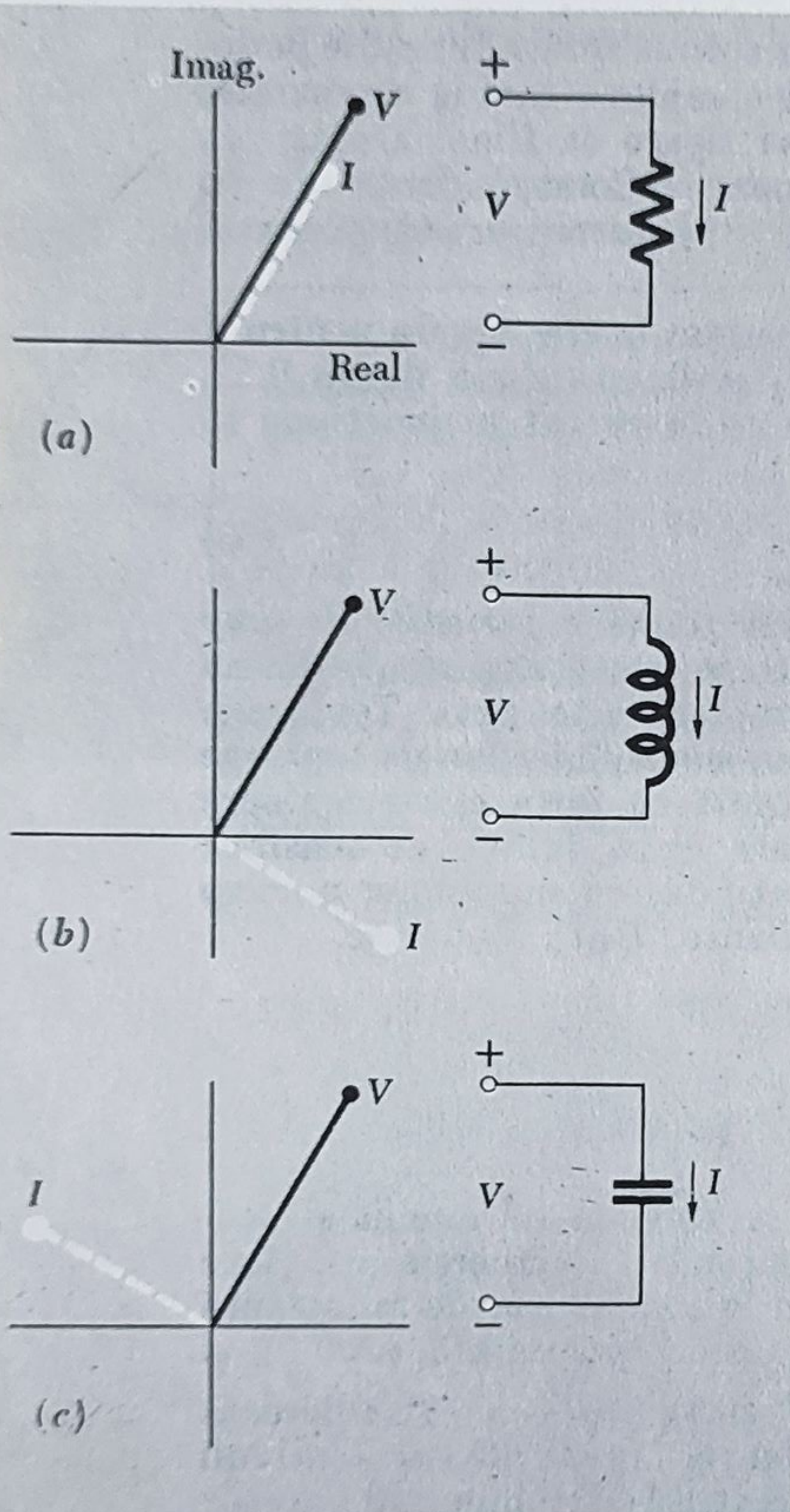





Fig. 8.14.  $V$  și  $I$  sînt numere complexe care reprezintă tensiunea de-a lungul unui element de circuit și curentul prin el. Faza relativă a oscilației curentului și tensiunii apare aici în unghiul dintre „vectori”. (a) În rezistență, curentul și tensiunea sînt în fază. (b) În inductanță, curentul rămîne în urma tensiunii. (c) În capacitate, curentul este înaintea tensiunii.

\* Algebra noastră conține astfel două categorii de numere complexe, acelea care reprezintă impedanțe, de exemplu, și acelea care reprezintă curenți. Produsul a două „numere de impedanță”, ca și produsul a două „numere de curent” nu reprezintă nimic.



și „în urmă” sînt expresii fără sens. Observați că definim totdeauna sensul pozitiv al curentului astfel încît o tensiune pozitivă aplicată unei rezistențe să genereze curent pozitiv (fig. 8.14, a).

Proprietățile celor trei elemente de circuit de bază sînt rezumate mai jos:

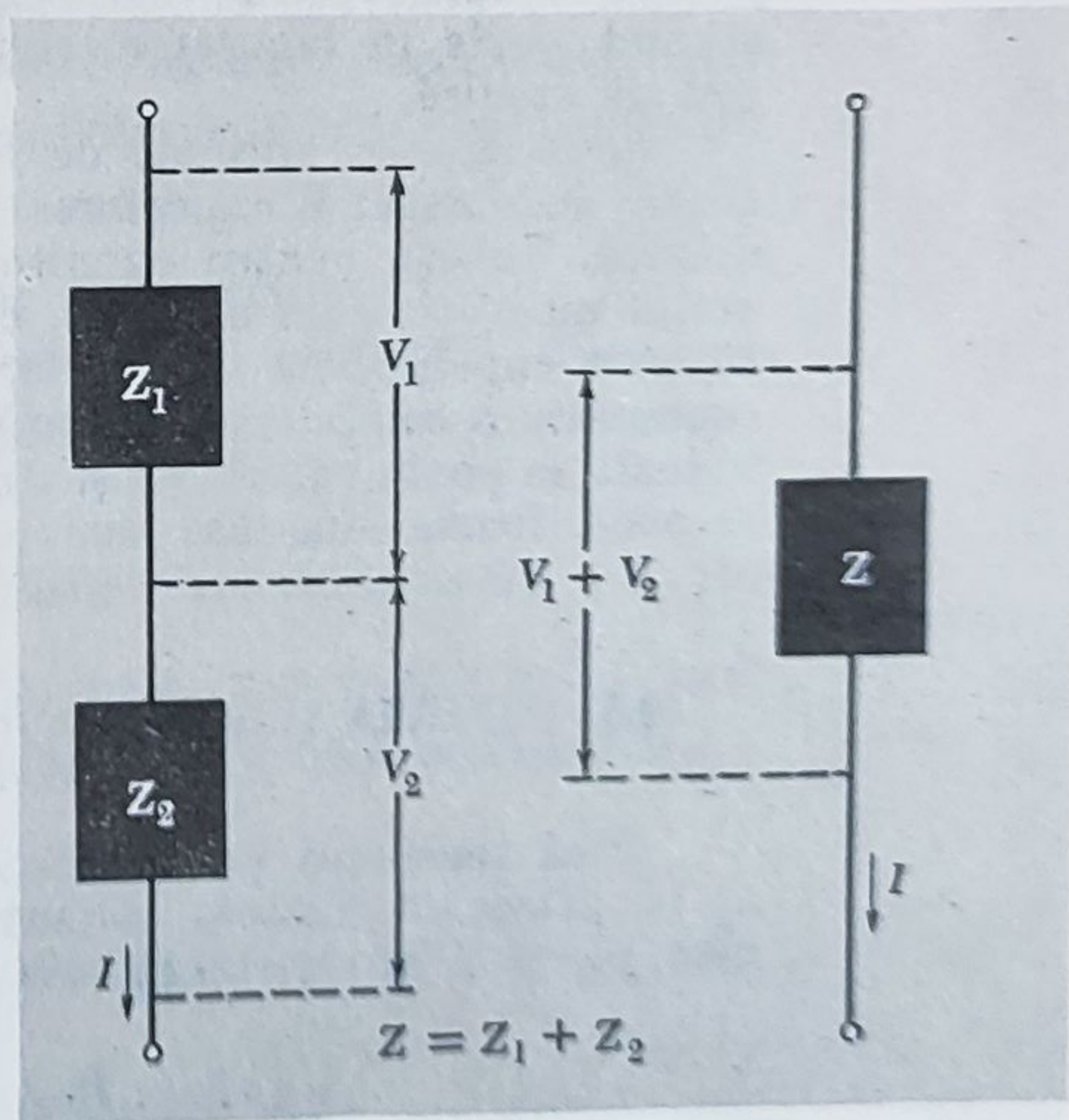
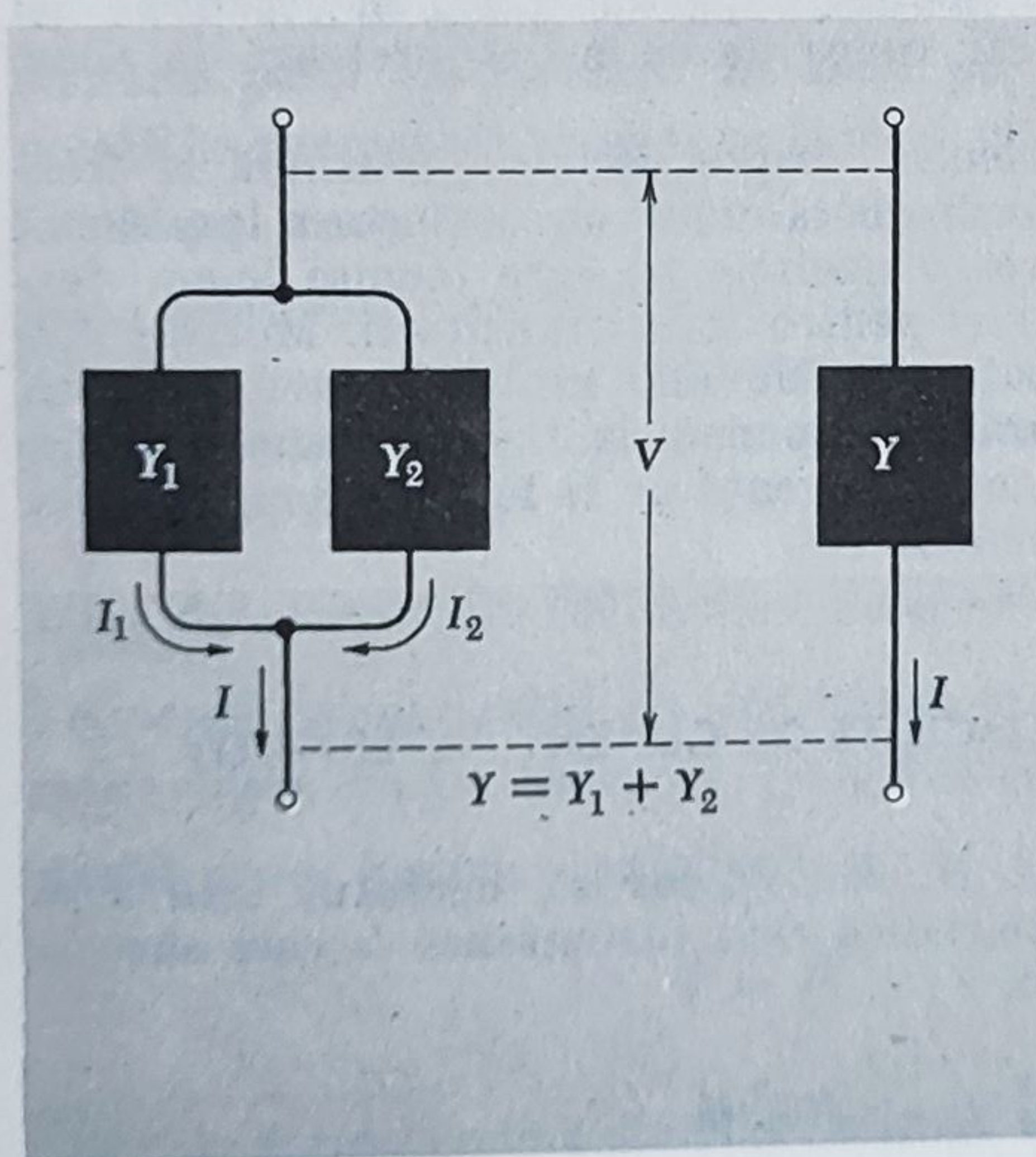
Simbol	Admitanța, $Y$	Impedanța, $Z = \frac{1}{Y}$
 $R$	$\frac{1}{R}$	$R$
 $L$	$\frac{-i}{\omega L}$	$i\omega L$
 $C$	$i\omega C$	$\frac{-i}{\omega C}$
	$I = YU$	$U = ZI$

Putem alcătui orice circuit din aceste elemente. Cînd elementele sau combinațiile elementelor sînt legate în paralel, este convenabil de folosit admitanțele, deoarece în acest caz admitanțele se însumează. În figura 8.15 două „cutii negre” cu admitanțe  $Y_1$  și  $Y_2$  sînt legate în paralel. Avem atunci

$$I = I_1 + I_2 = Y_1 U + Y_2 U = (Y_1 + Y_2) U \quad (57)$$

care implică faptul că o singură cutie neagră echivalentă are admitanța  $Y_1 + Y_2$ . Din figura 8.16 va fi limpede că *impedanțele* se adună pentru

Fig. 8.15. Legarea în paralel a admitanțelor. Fig. 8.16. Legarea în serie a impedanțelor.



48,83,73  
285,257,2



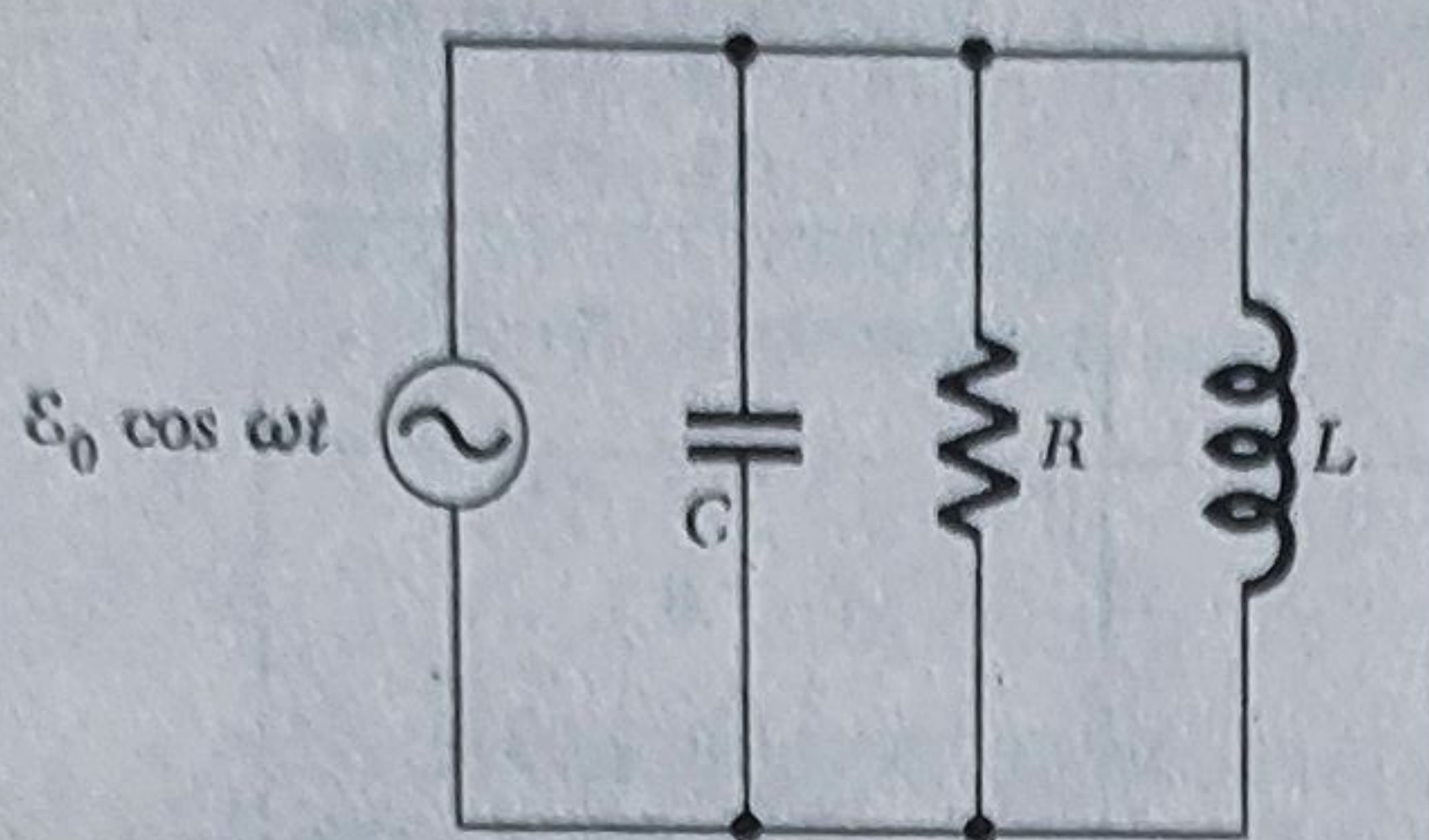


Fig. 8.17. Un circuit rezonant paralel. Însumați admitanțele complexe ale celor trei elemente, ca în ec. 58.

elemente legate *în serie*. Este ca și cum am vorbi de rețele de curent continuu! De fapt, am redus acum problema rețelei de curent alternativ la problema rețelei de curent continuu, cu această diferență: numerele cu care operăm sînt numere complexe.

Ca exemplu, să privim la circuitul „RLC paralel” în figura 8.17. Admitanța combinată a celor trei ramuri paralele este

$$Y = \frac{1}{R} + i\omega C - \frac{i}{\omega L}. \quad (58)$$

Tensiunea este simplu  $\mathcal{E}_0$ , astfel curentul complex este

$$I = YU = \mathcal{E}_0 \left[ \frac{1}{R} + i \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]. \quad (59)$$

Amplitudinea oscilației de curent este modulul numărului complex  $I$ , care este  $\mathcal{E}_0 [(1/R^2) + (\omega C - 1/\omega L)^2]^{1/2}$ , și unghiul de fază este  $\tan^{-1}(R\omega C - R/\omega L)$ .

Putem trata în acest fel numai elemente de circuit *lineare*, elemente în care curentul este proporțional tensiunii. Cu alte cuvinte, circuitul nostru trebuie să fie descris de o ecuație diferențială lineară. Nici măcar nu puteți defini o impedanță pentru un element nelinear. Elementele de circuit nelineare sînt componente foarte importante și interesante. Ați studiat unele în laborator, și puteți vedea de ce nu se pretează la acest gen de analiză.

Aceasta este afirmat, de asemenea, despre oscilația continuă la frecvență constantă. Comportarea tranzitorie a unui circuit este o problemă diferită. Totuși, pentru circuite lineare uneltele pe care tocmai le-am dezvoltat au o oarecare utilitate, chiar și pentru stări tranzitorii. Motivul este că prin superpoziția oscilațiilor staționare de mai multe frecvențe putem reprezenta o comportare nestaționară, și răspunsul la fiecare frecvență individuală se poate calcula ca și cînd acea frecvență ar fi fost singura. Aceasta se poate foarte bine lăsa pentru volumul III.

## 8.5. PUTEREA ȘI ENERGIA ÎN CIRCUITE DE CURENT ALTERNATIV

Dacă tensiunea pe o rezistență  $R$  este  $U_0 \cos \omega t$ , curentul este  $I = (U_0/R) \cos \omega t$ . Puterea instantanee, adică rata instantanee la care energia este disipată în rezistență este

$$P = RI^2 = \frac{U_0^2}{R} \cos^2 \omega t. \quad (60)$$



Deoarece media lui  $\cos^2 \omega t$  pe multe cicluri este  $\frac{1}{2}$ , puterea medie disipată în circuit este

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R}. \quad (61)$$

Se obișnuiește a exprima tensiunea și curentul în circuite de curent alternativ dând nu amplitudinea ci  $1/\sqrt{2}$  ori amplitudinea. Aceasta este adesea numit valoarea efectivă sau eficace (ef). Aceasta ține seama de factorul  $\frac{1}{2}$  în ecuația 61, astfel încît

$$\bar{P} = \frac{U_{ef}^2}{R}. \quad (62)$$

De exemplu, tensiunea uzuală în rețele publice, 120 volți, corespunde la o amplitudine  $120 \cdot \sqrt{2}$  volți. Diferența de potențial între bornele prizei electrice din camera dumneavoastră (dacă tensiunea este normală) este\*

$$U(t) = 170 \cos 377 t \quad (63)$$

cu  $U$  în volți și  $t$  în secunde. Un ampermetru de curent alternativ este calibrat să arate 1 amper cînd amplitudinea curentului este 1,414 amperi.

În general, rata instantanee la care energia este debitată unui element de circuit este  $UI$ , produsul tensiunii și curentului instantaneu, cu semnul potrivit. Să considerăm acest aspect al curgerii de curent în circuitul simplu  $LR$  din figura 8.4. În figura 8.18 am redesenat graficele curentului și tensiunii și am adăugat o curbă proporțională cu produsul  $UI$ . Valori  $UI$  pozitive înseamnă că energia este transferată în combinația  $LR$  de la sursa de forță electromotoare, sau generator. Observați că  $UI$  este negativ în anumite părți ale ciclului. În acele perioade o oarecare energie este înapoiată în generator. Aceasta se explică prin oscilația în energie înmagazinată în cîmpul magnetic al inductanței. Această energie înmagazinată,  $\frac{1}{2} LI^2$ , trece printr-un maxim de două ori în fiecare ciclu complet.

Puterea medie,  $\bar{P}$ , corespunde liniei punctate orizontale. Pentru a calcula valoarea ei, să privim la produsul  $UI$ , cu  $U = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$  și  $I = I_0 \cos (\omega t + \varphi)$ :

$$UI = \mathcal{E}_0 I_0 \cos \omega t \cos (\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 I_0 (\cos^2 \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \omega t \sin \varphi) \quad (64)$$

Termenul proporțional cu  $\cos \omega t \sin \omega t$  are media temporală zero, cum este evident dacă îl scrieți ca  $\frac{1}{2} \sin 2\omega t$ , în timp ce media lui  $\cos^2 \omega t$  este  $\frac{1}{2}$ .

Astfel avem pentru media temporală

$$\bar{P} = \overline{UI} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 \cos \varphi. \quad (65)$$

\* În rețelele electrice din SUA frecvența este 60 Hz (N. Trad.).

48,83,43  
285,257



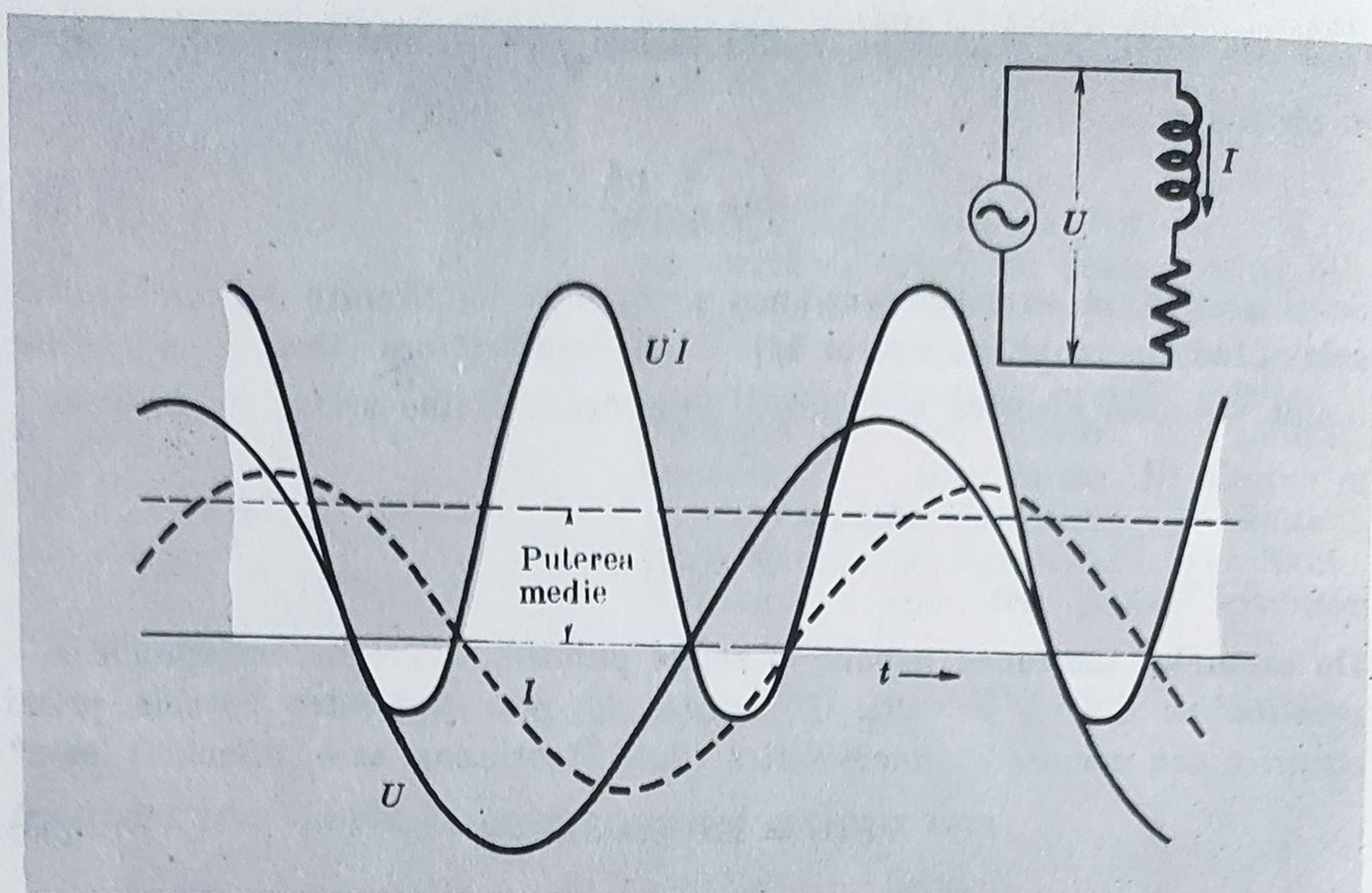


Fig. 8.18. Puterea instantanee  $UI$  este energia transferată în unitatea de timp de la sursa de tensiune electromotoare din stînga la elementele de circuit din dreapta. Media temporală a acesteia este indicată prin linia punctată orizontală.

Dacă atât curentul cît și tensiunea sînt exprimate ca valori eficace în volt și amper respectiv,

$$\bar{P} = \frac{U_{ef}}{(\text{volți})} \frac{I_{ef}}{(\text{amperi})} \cos \varphi. \quad (66)$$

În acest circuit toată energia este disipată în rezistorul  $R$ . Natural, orice bobină reală are o oarecare rezistență. În scopul de a analiza circuitul, am inclus-o pe aceea în rezistența  $R$ . Desigur căldura se dezvoltă la poziția reală a rezistenței.

Pentru a exersa metodele pe care le-am dezvoltat în § 8.4, vom analiza circuitul din figura 8.19, *a*. O rezistență de 10 000 ohmi și 1 watt a fost legată cu doi condensatori de capacitate 0,2 și 0,5 microfarazi ( $\mu\text{F}$ ). Propunem să conectăm aceasta la o priză de 120 volți, 60 cicluri.

*Întrebare:* va deveni rezistorul de 1 watt prea fierbinte? În cursul analizei dacă puterea medie disipată în  $R$  depășește 1 watt, vom calcula unii dintre curenții și tensiunile pe care le-am putea măsura în circuit. Un mod de a discuta circuitul este schițat mai jos.

(I) Admitanța lui  $C_2 = i\omega C_2 = (377)(2 \times 10^{-7})i = 0,754 \times 10^{-4} i \text{ ohm}^{-1}$ .

(II) Admitanța rezistenței  $= \frac{1}{R} = 10^{-4} \text{ ohm}^{-1}$ .

(III) Admitanța lui  $\begin{array}{c} \text{---} \cdot \\ | \\ \text{---} \cdot \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \cdot \\ | \\ \text{---} \cdot \end{array} = 10^{-4}(1 + 0,754 i) \text{ ohm}^{-1}$



Fig. 8.19. O rețea reală (a) gata spre a fi conectată la o sursă de tensiune electromotoare, și (b) diagrama circuitului.

$$\begin{aligned} \text{(IV) Impedanța lui } &= \frac{1}{10^{-4}(1 + 0,754 i)} \\ &= \frac{10^4(1 - 0,754 i)}{1^2 + 0,754^2} \\ &= (6\,360 - 4800 i) \text{ ohmi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(V) Impedanța lui } C_1 &= -\frac{i}{\omega C_1} = \\ &= -\frac{i}{(377)(5 \times 10^{-7})} \\ &= -5\,300 i \text{ ohmi} \end{aligned}$$

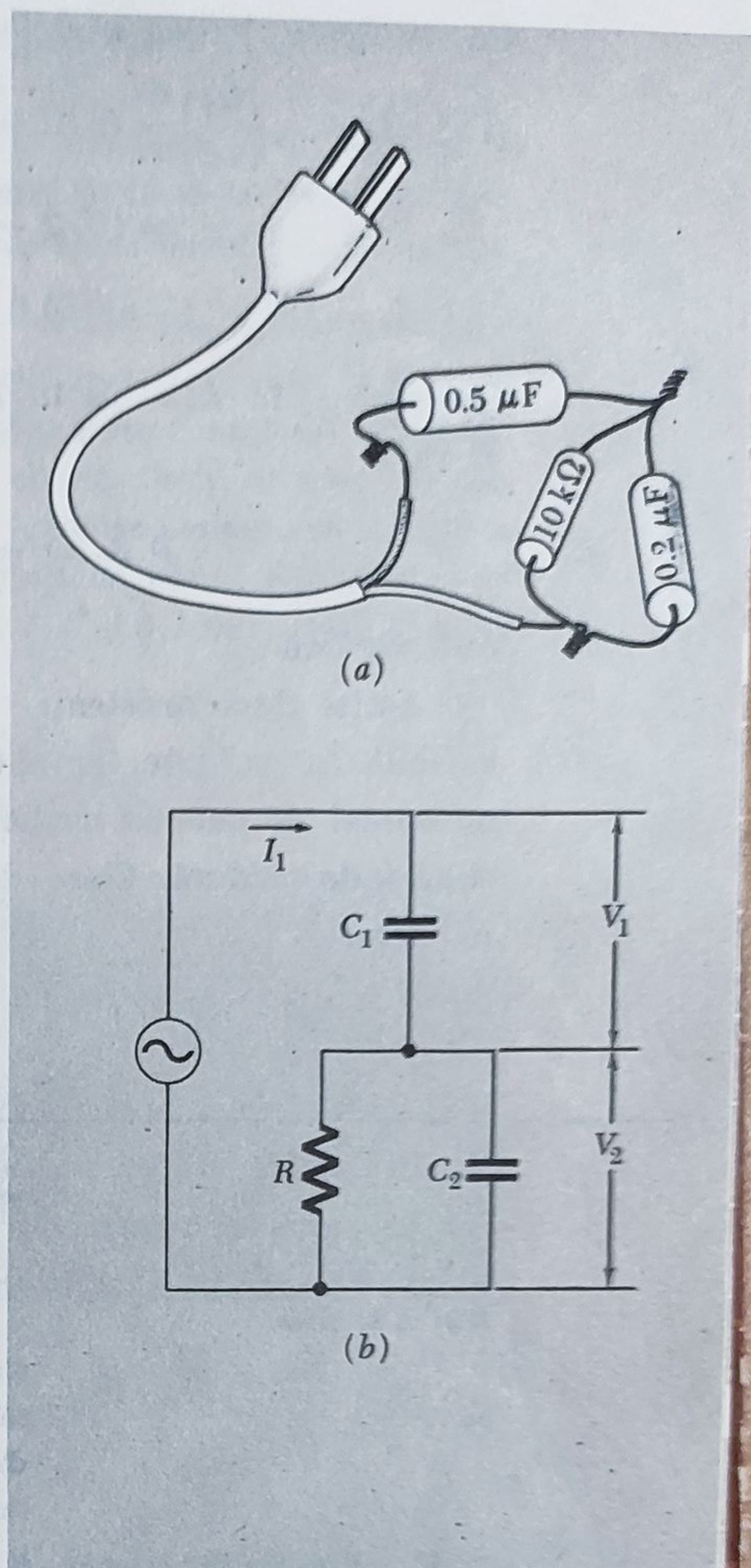
$$\begin{aligned} \text{(VI) Impedanța întregului circuit} &= \\ &= (6\,360 - 10\,100 i) \text{ ohmi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(VII) } I_1 &= \frac{120}{6\,360 - 10\,100 i} = \\ &= \frac{120(6\,360 + 10\,100 i)}{(6\,360)^2 + (10\,100)^2} \\ &= (5,37 + 8,53 i) \times 10^{-3} \text{ amperi.} \end{aligned}$$

Deoarece am folosit 120 volți, care este tensiunea eficace, obținem curentul eficace. Aceasta înseamnă că modulul numărului complex  $I_1$ , care este  $[(5,37)^2 + (8,53)^2]^{1/2} \times 10^{-3}$  amperi sau 10,0 miliamperi (mA), este curentul eficace în amperi. Un miliampermetru de curent alternativ introdus în serie ar arăta 10 mA. Acest curent are un unghi de fază  $\varphi = \text{tg}^{-1}(0,853/0,537)$  sau 1,01 radiani față de linia de tensiune. Puterea medie debitată întregului circuit este atunci:

$$\text{(VIII) } P = (120 \text{ volt})(0,010 \text{ amp})\cos 1,01 = 0,64 \text{ watt}$$

În acest circuit rezistența este singurul element disipativ, astfel încât aceasta trebuie să fie puterea medie disipată în ea.



87,83,73  
285,257



Ca verificare, putem găsi tensiunea  $U_2$  pe rezistență:

$$\begin{aligned} \text{(IX)} \quad U_1 &= I_1 \left( \frac{-i}{\omega C} \right) = (5,37 + 8,53 i) (-5300 i) 10^{-3} \\ &= (45,2 - 28,4 i) \text{ volt} \end{aligned}$$

$$\text{(X)} \quad U_2 = 120 - U_1 = (74,8 + 28,4 i) \text{ volt}$$

Curentul  $I_2$  în  $R$  va fi în fază cu  $U_2$ , desigur, astfel puterea medie în  $R$  va fi

$$\bar{P} = \frac{U_2^2}{R} = \frac{(74,8)^2 + (28,4)^2}{10^4} = 0,64 \text{ watt},$$

care verifică.

Astfel clasa rezistenței nu este depășită, deoarece acea asigurare este valabilă. În realitate, faptul dacă rezistența va deveni prea fierbinte depinde nu numai de puterea medie disipată în ea dar și de cât de ușor se poate elibera de căldură. Clasa de putere a unei rezistențe este doar o ghidare în mare.

## PROBLEME

### *R și L în serie*

8.1. Ce inductanță, în henry, trebuie legată în serie cu un bec de 120 volți, 60 wați, dacă acesta trebuie să lucreze normal când combinația este legată la o rețea de 240 volți, 60 cicli pe secundă? (Determinați mai întâi reactanța inductivă necesară. Puteți neglija rezistența inductorului și inductanța becului.)

### *R și C în serie*

8.2. O rezistență de 2000 ohm și un condensator de 1 microfarad sînt legate în serie la o rețea de 120 volți (rpm) și 60 cicli.

- Care este impedanța?
- Care este valoarea eficace a curentului?
- Care este puterea disipată în circuit?
- Care va fi citirea unui voltmetru de curent alternativ legat pe rezistență? legat pe capacitate?
- Plăcile orizontale ale unui tub de raze catodice sînt legate pe rezistență și plăcile verticale pe capacitate. Schițați figura pe care vă așteptați să o vedeți pe ecran.



$R$ ,  $L$  și  $C$  în paralel

8.3. O rezistență de 1000 ohm, o capacitate de 500 pF și o inductanță de 2 mH sînt legate în paralel. Care este impedanța acestei combinații la o frecvență de 10 kc/sec? La o frecvență de 10 Mc/sec? Care este frecvența la care valoarea absolută a impedanței este maximă?

8.4. În circuitul rezonant din figură elementul disipativ este o rezistență  $R'$  legată în paralel, și nu în serie, cu combinația  $LC$ . Dezvoltați ecuația, analoagă ecuației 2, care se aplică acestui circuit. Găsiți de asemenea condițiile asupra soluției analoage acelor care au loc în circuitul  $RLC$  serie. Dacă un circuit  $RLC$  serie și un circuit  $R'LC$  au același  $L$ ,  $C$  și  $Q$ , cum se leagă  $R'$  de  $R$ ?

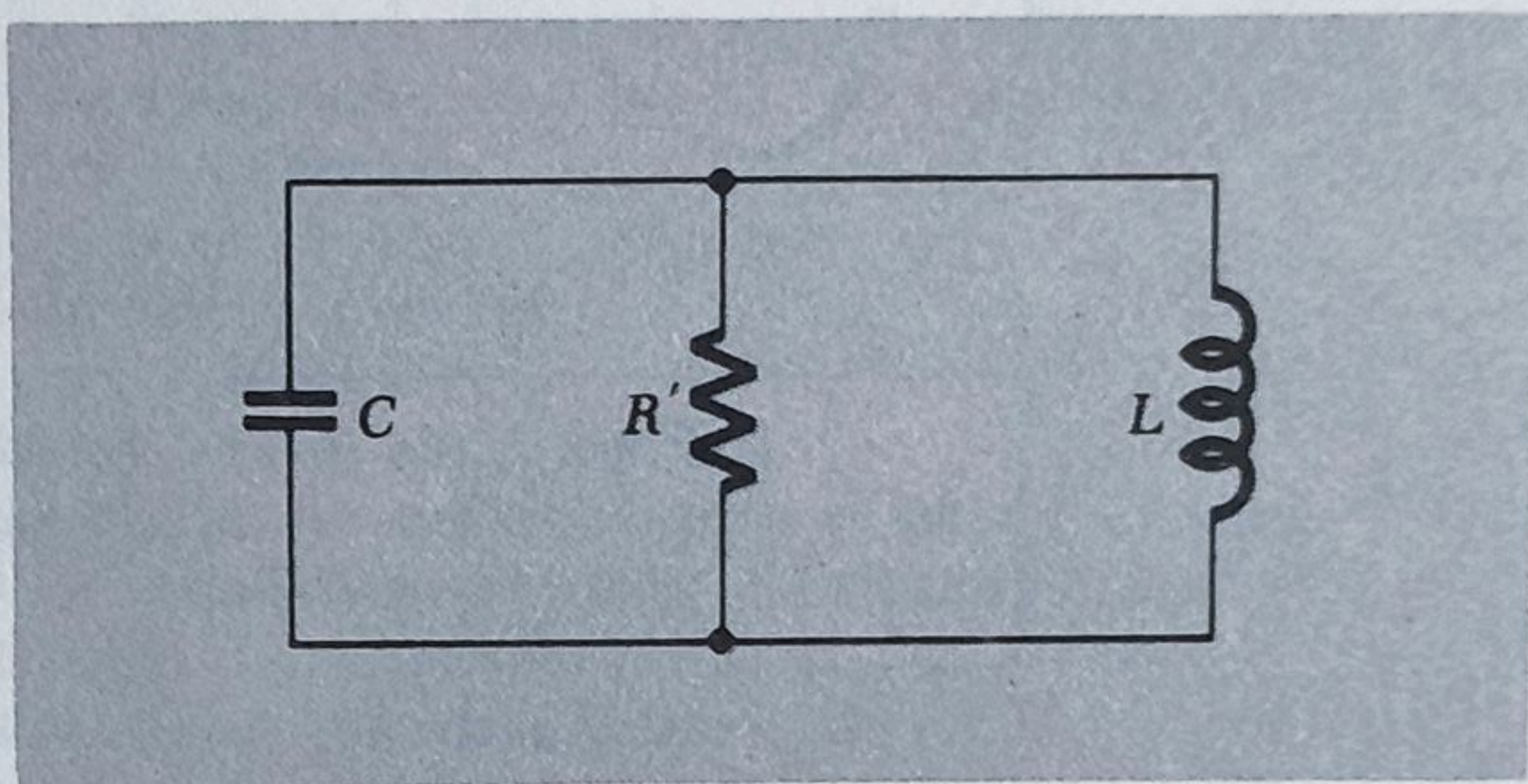


Fig. 1a problema 8.4

8.5. Să presupunem că curentul din circuitul în figura 8.1 este dat de ecuația 12. Calculați energia înmagazinată în circuit la  $t = 0$ . Apoi calculați energia înmagazinată în circuit un sfert de ciclu mai târziu, la  $t = \pi/2\omega$ . Verificați că diferența este egală cu energia disipată în rezistența  $R$  pe durata acestui interval. Pentru această problemă, presupuneți că amortizarea este mică, adică  $\alpha/\omega \ll 1$ , și neglijați termenii proporționali cu  $\alpha^2$ .

8.6. Pentru circuitul din figura 8.3 a, determinați valorile lui  $\beta_1$  și  $\beta_2$  în cazul hiper-amortizat, cu  $R = 600$  ohmi. Determinați de asemenea raportul lui  $B$  la  $A$ , constantele din ecuația 16.



8.7. O cavitate rezonantă de forma ilustrată în figură este o parte esențială a multor oscilatori de microunde. Ea poate fi privită ca un circuit „ $LC$ ” simplu. Inductanța este aceea a unui toroid cu o spirală; această inductanță este legată direct la condensatori cu plăci paralele. Găsiți o expresie pentru frecvența de rezonanță a acestui circuit, și arătați printr-o schiță configurația cîmpurilor magnetic și electric.

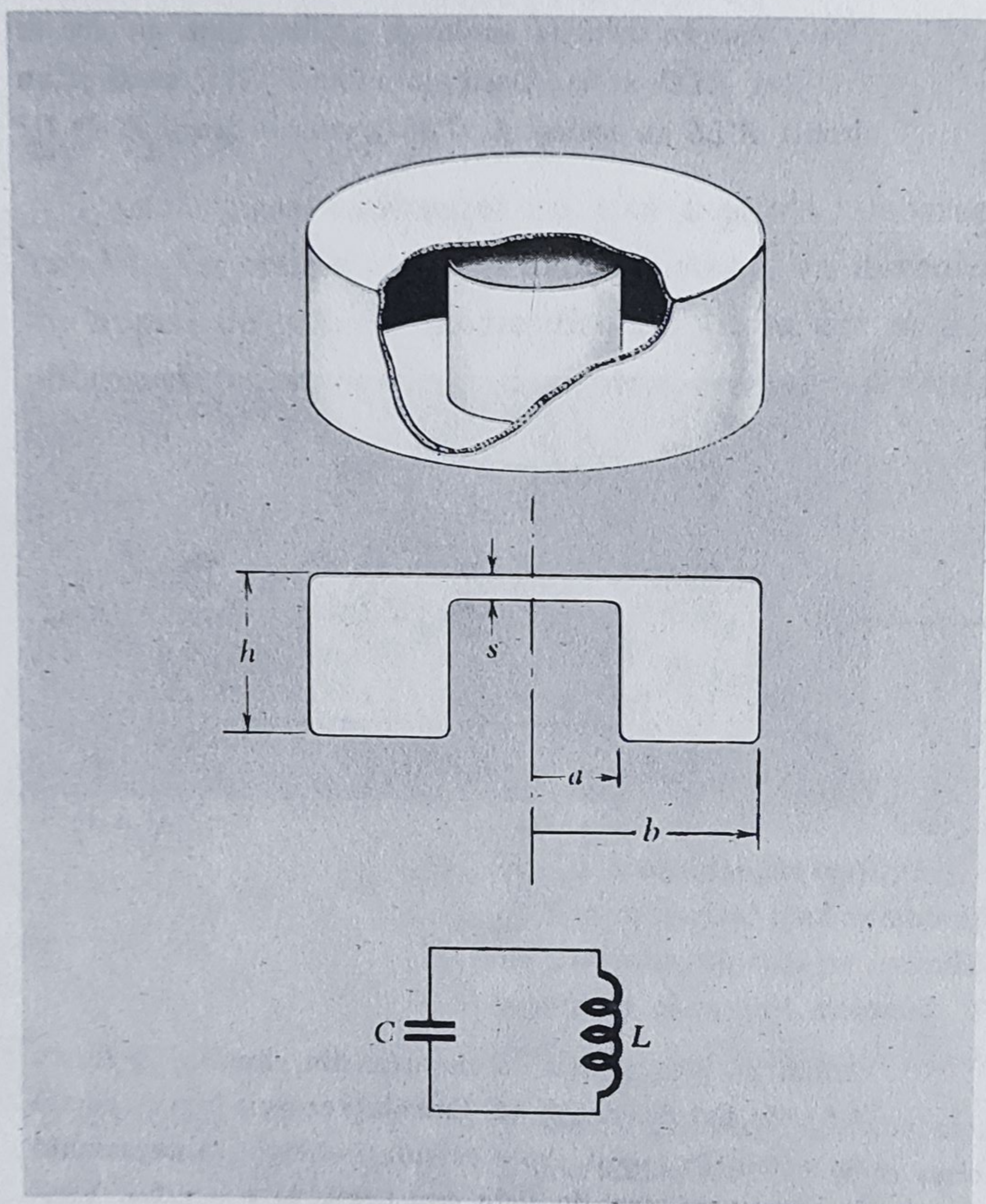


Fig. 1a problema 8.7



## Capitolul 9

# Cîmpuri electrice în substanță

9.1. Dielectricei	314
9.2. Momentele unei distribuții de sarcină	317
9.3. Potențialul și cîmpul unui dipol	320
9.4. Cuplul și forța asupra unui dipol într-un cîmp exterior	323
9.5. Dipoli atomici și moleculari. Momente dipolare induse	325
9.6. Tensorul de polarizabilitate	329
9.7. Momente dipolare permanente	331
9.8. Cîmpul electric produs de materia polarizată	334
9.9. Condensatorul umplut cu dielectric	340
9.10. Cîmpul unei sfere polarizate	342
9.11. O sferă dielectrică într-un cîmp uniform	346
9.12. Cîmpul unei sarcini într-un mediu dielectric și legea lui Gauss	348
9.13. Legătura între susceptibilitatea electrică și polarizabilitatea atomică	351
9.14. Variații de energie la polarizare	355
9.15. Dielectrice alcătuiți din molecule polare	357
9.16. Polarizarea în cîmpuri variabile	358
9.17. Curentul de sarcină legată	359
Probleme	363



## 9.1. DIELECTRICI

Condensatorul pe care l-am studiat în capitolul 3 era alcătuit din doi conductori, izolați unul de altul, neavînd nimic între ei. Sistemul de doi conductori a fost caracterizat printr-o anumită capacitate  $C$ , o constantă care corelează mărimea sarcinii  $Q$  pe condensator (sarcina pozitivă  $Q$  pe o placă, sarcină negativă egală pe cealaltă) cu  $U_{12}$ , diferența de potențial electric între cei doi conductori:

$$C = \frac{Q}{U_{12}}. \quad (1)$$

Pentru condensatorul cu plăci paralele, două plăci plane de arie  $A$  și separate printr-o distanță  $t$ , am găsit capacitatea

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{t}. \quad (2)$$

Condensatori ca acesta se pot găsi în unele aparate electrice. Ei sînt numiți *condensatori cu vid* și sînt alcătuiți din plăci introduse într-un tub vidat. Ei sînt folosiți în principal cînd sînt implicate potențiale extrem de înalte

și rapid variabile. De departe mult mai uzuali, totuși, sînt condensatorii în care spațiul dintre plăci este umplut cu o oarecare substanță neconductoare solidă sau lichidă. Cei mai mulți dintre condensatorii cu care ați lucrat în laborator sînt de felul acesta; există duzine de asemenea condensatori în orice receptor de televiziune. Pentru conductori implantați într-un mediu material, ecuația 2 nu se potrivește cu experiența. Să presupunem că umplem spațiul dintre cele două plăci arătate în figura 9.1, *a* cu un strat de plastic, ca în figura 9.1, *b*. Experimentînd acest nou tip de condensator,

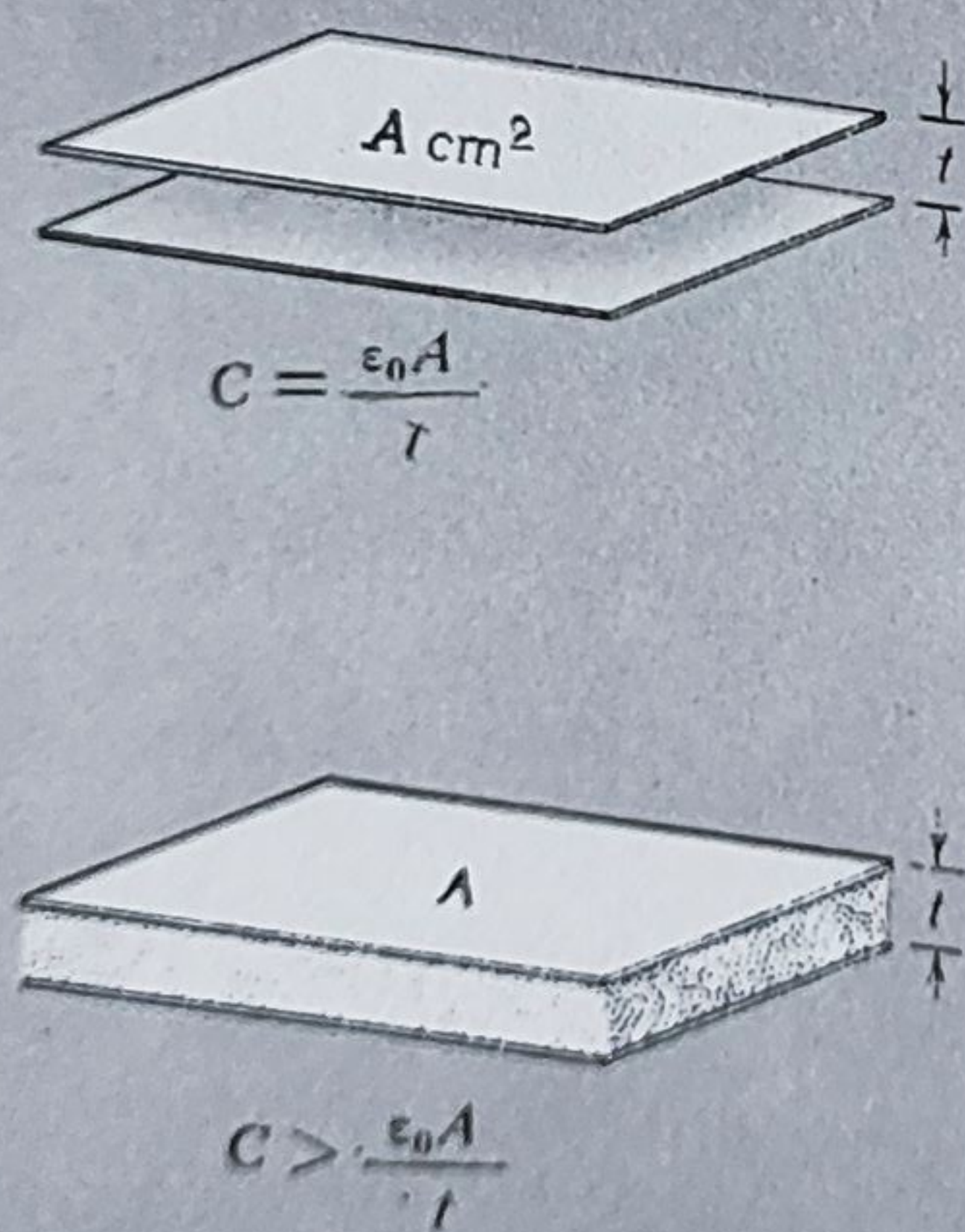


Fig. 9.1. (a) Un condensator format din plăci conductoare plane. (b) Aceleași plăci cu un strat izolator între ele.



încă găsim o proporționalitate între sarcină și diferența de potențial, astfel putem încă *defini* o capacitate prin ecuația 1. Dar găsim că  $C$  este considerabil *mai mare* decât ar prezice ecuația 2.

Nu numai în dispozitivele speciale numite condensatori, dar aproape oriunde în lumea din jurul nostru, cîmpurile electric și magnetic există în prezența materiei și nu în vid — dacă nu în materia densă, atunci cel puțin într-un gaz, anume aerul. Toate acestea ne reamintesc că, exceptînd digresiunea din capitolul 4 în domeniul conductivității electrice, am studiat de fapt cîmpul electromagnetic în spațiul vid, populat doar prin anumite sarcini punctuale sau distribuții de sarcină continue. Trebuie să căutăm acum să înțelegem interacțiunile cîmpurilor electrice și magnetice cu materia.

Ne sînt deschise două moduri de abordare diferite. Menținînd un punct de vedere la scară largă, sau *macroscopic*, am putea vedea în ce fel prezența unui bloc de material omogen ca stratul de plastic din figura 9.1, *b* modifică cîmpul electric din spațiul din afară, unde putem măsura cîmpul. Am putea încerca să descoperim legi simple care ar descrie în mod adecvat astfel de efecte în orice sistem de conductori sau izolatori. Am găsi că, comportarea electrică macroscopică a substanțelor omogene poate fi într-adevăr caracterizată foarte simplu și complet. Ecuația 2, de exemplu, are nevoie doar de înlocuirea constantei  $\epsilon_0$  printr-o constantă  $\epsilon$ , caracteristică substanței particulare, pentru a da corect capacitatea oricărui condensator umplut cu acel material.  $\epsilon$  este numit *constanta dielectrică* sau *permitivitate* a acelei substanțe, și materialul însuși este în general numit drept *dielectric* cînd considerăm comportarea sa într-un cîmp electric. Constantele dielectrice ale cîtorva substanțe uzuale sînt înscrise în tabelul 9.1 (v. mai jos) Odată constanta dielectrică a unui material particular determinată, poate prin măsurarea capacității unui condensator umplut cu el, sîntem în măsură să prezicem comportarea, nu numai a condensatorilor cu două plăci, dar a *oricărui* sistem electrostatic alcătuit din conductori și bucăți din acel dielectric de orice formă. Adică, putem prezice toate cîmpurile electrice care vor exista în vid în afara dielectricilor pentru sarcini sau potențiale date pe conductorii din sistem.

Tabel 9.1

Constantele dielectrice ale diverselor substanțe

Substanța	Condiții	Constanta dielectrică
Aer	Gaz, 0°C, 1 atm	1,00059
Acid clorhidric, HCl	Gaz, 0°C, 1 atm	1,0046
Apă, H <sub>2</sub> O	Gaz, 110°C, 1 atm	1,0126
	Lichid, 20°C	80
Benzen, C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	Lichid, 20°C	2,28
Amoniac, NH <sub>3</sub>	Lichid, -34°C	22
Ulei de transformator	Lichid, 20°C	2,24
Clorură de sodiu, NaCl	Cristal, 20°C	6,12
Sulf, S	Solid, 20°C	4,0
Cuarț, SiO <sub>2</sub>	Cristal, 20°C ( $\perp$ pe axa optică)	4,34
	Cristal, 20°C ( $\parallel$ axa optică)	4,27
Polietilenă	Solid, 20°C	2,25—2,3
Neopren	Solid, 20°C	4,1
Porțelan	Solid, 20°C	6,0—8,0
Parafină transparentă	Solid, 20°C	2,1—2,5
Sticlă Pyrex 7070	Solid, 20°C	4,00

81,83, 43  
285, 257, 2



Teoria care ne îngăduie să facem aceasta a fost dezvoltată de către fizicienii secolului al nouăsprezecelea. Neavînd o imagine completă a structurii atomice a materiei, ei au fost mai mult sau mai puțin obligați să adopte o descriere macroscopică. Din acest punct de vedere, interiorul unui dielectric este un domeniu fără particularități al unei „gelatine matematice” perfect omogene, a cărui singură proprietate electrică care îl distinge de vid este o constantă dielectrică diferită de  $\epsilon_0$ .

Dacă dezvoltăm doar o descriere macroscopică a materiei într-un câmp electric, ne va fi greu să răspundem la unele întrebări care se impun destul de firese — sau mai degrabă, greu să punem aceste întrebări încît să li se poată răspunde cu înțeles. De exemplu, care este intensitatea câmpului electric în interiorul stratului de plastic din figura 9.1, *b* cînd pe armături se află niște sarcini? Intensitatea câmpului electric este definită prin forța asupra unei sarcini de încercare. Cum putem pune o sarcină de încercare în interiorul unui solid dens perfect, fără a deranja nimic și să măsurăm forța asupra ei? Ce ar însemna acea forță, dacă am fi măsurat-o? Ați putea gândi să faceți o gaură și să puneți sarcina de încercare în gaură cu oarecare spațiu în care să se miște, astfel încît să puteți măsura forța asupra ei ca asupra unei particule libere. Dar atunci ați măsura, nu câmpul electric în interiorul dielectricului, ci câmpul electric într-o cavitate în dielectric, ceea ce este un lucru cu totul diferit.

În mod fericit avem la dispoziție o altă linie de atac, care pleacă de la nivelul microscopic sau *atomic*. Știm că materia este alcătuită din atomi și molecule; la rîndul lor, acestea sînt compuse din particule elementare încărcate. Cunoaștem ceva despre mărimea și structura acestor atomi și cunoaștem ceva despre aranjarea lor în cristale, fluide și gaze. În loc să descriem stratul nostru dielectric ca un volum fără structură de gelatină, care nu e totuși vid, îl vom descrie ca o mulțime de molecule care populează vidul.

Dacă putem afla ce fac sarcinile electrice într-o *singură* moleculă cînd acea moleculă este doar ea într-un câmp electric, am fi în măsură să înțelegem comportarea a două astfel de molecule separate printr-o distanță în vid. Doar va fi necesar să includem influența, asupra fiecărei molecule, a oricărui câmp electric provenind de la cealaltă. Aceasta este o problemă de vid. Acum tot ceea ce avem de făcut este să extindem aceasta la o populație de, să spunem,  $10^{20}$  molecule ocupînd un centimetru cub de vid, și avem dielectricul nostru real. Sperăm să facem aceasta fără a crea  $10^{20}$  probleme separate. Dacă îl ducem la bun sfîrșit, acest program ne va recompensa în două moduri. Vom fi în măsură să spunem la sfîrșit ceva despre câmpurile electrice și magnetice în materie, răspunzînd la întrebări ca aceea ridicată mai înainte. Ceea ce este mai important, vom înțelege cum fenomenele macroscopice electrice și magnetice din materie apar, și prin aceasta dezvăluie, natura structurii atomice de bază. Urmează să studiem efectele electrice și magnetice separat. Începem cu dielectricii. Deoarece primul nostru obiectiv este să descriem câmpul electric produs de un atom sau o moleculă, va fi de folos să facem cîteva observații generale despre câmpul electrostatic în exteriorul oricărui sistem de sarcini.



## 9.2. MOMENTELE UNEI DISTRIBUȚII DE SARCINĂ

Un atom sau moleculă constă din sarcini electrice ocupând un mic volum, poate câțiva angstromi cubici ( $10^{-24} \text{ cm}^3$ ) de spațiu. Sîntem interesați în câmpul electric în exteriorul aceluia volum, care provine de la această distribuție de sarcină destul de complicată. Ne vom ocupa în particular cu câmpul departe de sursa prin care înțelegem la depărtare în comparație cu mărimea sursei însăși. Ce trăsături ale structurii de sarcină determină în principal câmpul în puncte îndepărtate? Pentru a răspunde, să privim la o distribuție arbitrară de sarcini și să vedem cum am putea face să calculăm câmpul într-un punct în afara ei. Figura 9.2 arată o oarecare distribuție de sarcină localizată în vecinătatea originii coordonatelor. Ar putea fi o moleculă alcătuită din mai multe nuclee pozitive și un număr mare de electroni. În orice caz o vom presupune descrisă de o funcție de densitate de sarcină  $\rho(x, y, z)$  dată.  $\rho$  este negativ unde se află electroni și pozitiv unde se află nuclee. Pentru a găsi câmpul electric în puncte depărtate, putem începe prin calcularea potențialului distribuției de sarcină. Pentru a ilustra, să luăm un oarecare punct  $A$  pe axa  $z$ . (Deoarece nu presupunem vreo simetrie specială în distribuția de sarcină, nu există nimic particular în axa  $z$ .) Fie  $r$  distanța lui  $A$  de la origine. Potențialul electric în  $A$ , notat  $\varphi_A$ , se obține, ca de obicei, prin însumarea contribuțiilor de la toate elementele distribuției de sarcină:

$$\varphi_A = \int \frac{\rho(x', y', z') dv'}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (3)$$

În integrală,  $dv'$  este un element de volum în interiorul distribuției de sarcină,  $\rho(x', y', z')$  este densitatea de sarcină acolo, și  $R$  la numitor este distanța de la  $A$  la acest element de sarcină particular. Integrarea este efectuată în coordonatele  $x', y', z'$ , desigur, și este extinsă la toată regiunea care conține sarcină. Putem exprima  $R$  prin  $r$  și distanța  $r'$  de la origine la elementul de sarcină. Folosind legea cosinusului cu  $\theta$  unghiul între  $r'$  și axa pe care se află  $A$ :

$$R = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{1/2}. \quad (4)$$

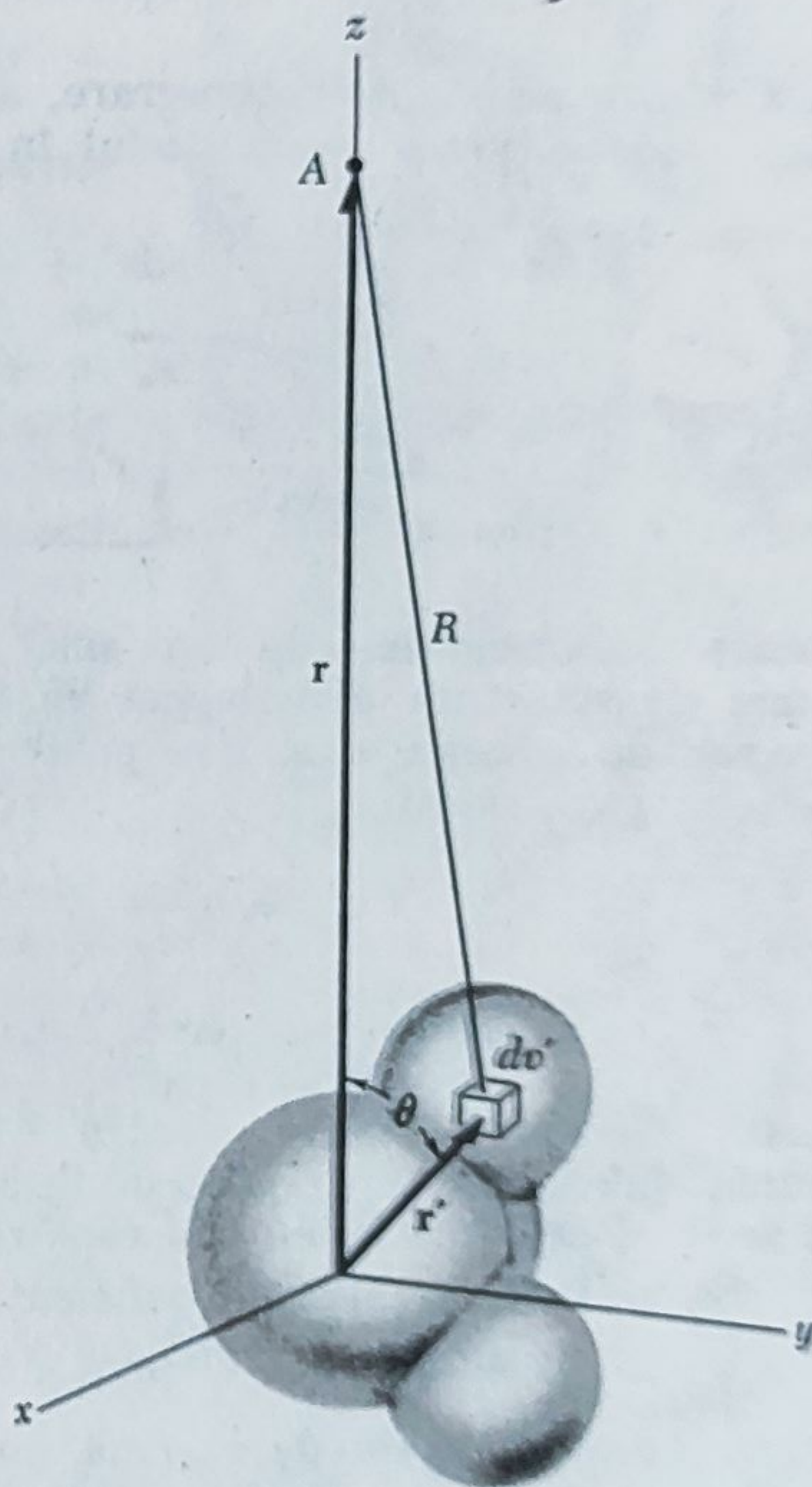


Fig. 9.2. Calcularea potențialului, în punctul  $A$ , a unei distribuții de sarcină moleculare.



Cu această expresie pentru  $R$ , integrala devine:

$$\varphi_A = \int \frac{\rho dv'}{4\pi\epsilon_0} [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{-1/2}. \quad (4a)$$

Vrem acum să ne folosim de faptul că pentru un punct depărtat ca  $A$ ,  $r'$  este mult mai mic decât  $r$  pentru toate regiunile distribuției de sarcină. Aceasta sugerează să dezvoltăm rădăcina pătrată din ecuația 4 în puteri ale lui  $r'/r$ . Scriind

$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \theta \right) \right]^{-1/2} \quad (5)$$

și folosind dezvoltarea  $(1 + \delta)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \delta + \frac{3}{8} \delta^2 \dots$ , obținem, după gruparea termenilor de aceeași putere în  $r'/r$ :

$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2} + \right. \\ \left. + \left( \begin{array}{c} \text{termeni de} \\ \text{puteri mai mari} \end{array} \right) \right]. \quad (6)$$

Acum  $r$  este constant în integrare, astfel încât îl putem scoate în afară și scriem ecuația pentru potențialul în  $A$  cum urmează:

$$\varphi_A = \frac{1}{r} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int \rho dv'}_{K_0} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int r' \cos \theta \rho dv'}_{K_1} + \\ + \frac{1}{r^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int r'^2 \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2} \rho dv'}_{K_2} + \dots \quad (7)$$

Fiecare din integralele de mai sus,  $K_0, K_1, K_2$  are o valoare care depinde numai de structura distribuției de sarcină. Deci potențialul pentru toate punctele de-a lungul axei  $z$  se poate scrie ca o serie de puteri în  $1/r$  cu coeficienți constanți:

$$\varphi_A = \frac{K_0}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{K_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{K_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots \quad (8)$$

Pentru a termina problema, am avea de obținut câmpul electric în toate celelalte puncte, pentru a calcula câmpul electric ca — grad  $\varphi$ . Am mers destul de departe, totuși, pentru a înfățișa punctul esențial: comportarea potențialului la distanțe mari de la sursă va fi dominată de primul termen în serie al cărui coeficient nu este zero.

Să privim la acești coeficienți mai îndeaproape. Coeficientul  $K_0$  este  $\int \rho dv'$ , care nu este altceva decât sarcina totală în distribuție. Dacă avem cantități egale de sarcină pozitivă și negativă, ca într-o moleculă neutră,  $K_0$  va fi zero. Pentru o moleculă odată ionizată,  $K_0$  va avea valoarea  $e$ . Dacă  $K_0$  nu este zero, atunci oricât de mari ar fi  $K_1, K_2$  etc., dacă ne îndepărtăm la o distanță suficient de mare, termenul  $K_0/r$  se va impune. Mai departe, potențialul se va apropia de acela al unei sarcini punctuale



în origine și tot așa va face și câmpul. Aceasta nu este deloc surprinzător.

Să presupunem că avem o moleculă neutră, astfel încât  $K_0$  este zero. Interesul nostru se deplasează acum la cel de-al doilea termen, cu coeficientul  $K_1 = \int r' \cos \theta \rho dv'$ .

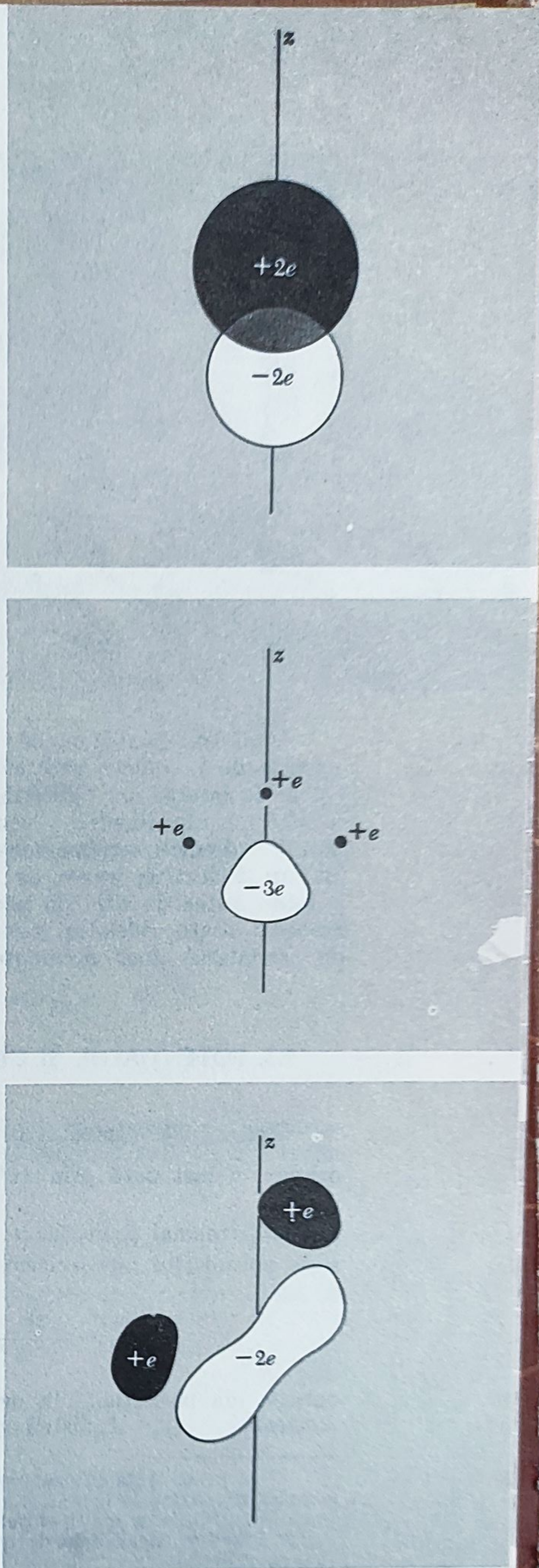
Deoarece  $r' \cos \theta$  este simplu  $z'$ , acest termen măsoară deplasarea relativă, pe direcția către  $A$ , a sarcinii pozitive și negative. El are o valoare nenulă pentru distribuțiile schițate în figura 9.3, unde densitățile de sarcină pozitivă și negativă au fost indicate separat. De fapt, toate distribuțiile arătate acolo au aproximativ aceeași valoare a lui  $K_1$ .

Merită să notăm că dacă distribuția este neutră, valoarea lui  $K_1$  este independentă de poziția originii. Adică, dacă înlocuim  $z'$  prin  $(z' + z_0)$ , astfel deplasând de fapt originea, valoarea integralei nu este schimbată:  $\int (z' + z_0) \rho dv' = \int z' \rho dv' + z_0 \int \rho dv'$  și ultima integrală este totdeauna zero pentru o distribuție neutră.

Evident, dacă  $K_0 = 0$  și  $K_1 \neq 0$ , potențialul de-a lungul axei  $z$  va varia asimptotic (adică, în aproximația de distanțe mari) ca  $1/r^2$ . Ne așteptăm atunci ca intensitatea câmpului electric să se compare asimptotic ca  $1/r^3$ , în contrast cu dependența  $1/r^2$  a câmpului unei sarcini punctuale. Desigur am discutat potențialul numai pe axa  $z$ . Ne vom întoarce la problema formei exacte a câmpului după ce vom da o vedere generală a situației.

Dacă  $K_0$  și  $K_1$  sînt ambele zero, și  $K_2$  nu este, potențialul se va comporta ca  $1/r^3$  la distanțe mari, și intensitatea câmpului electric va descrește cu inversul puterii a patra a distanței. Figura 9.4 arată o distribuție de sarcină pentru care  $K_0$  și  $K_1$  sînt zero (și ar fi zero oricare direcție am fi ales-o drept axă  $z$ ) în timp ce  $K_2$  nu este zero.

Fig. 9.3. Cîteva distribuții de sarcină cu  $K_0 = 0$ ,  $K_1 \neq 0$ . Aceasta înseamnă că fiecare are sarcina totală zero, dar moment dipolar nenul.



81.83.43  
285.257.246



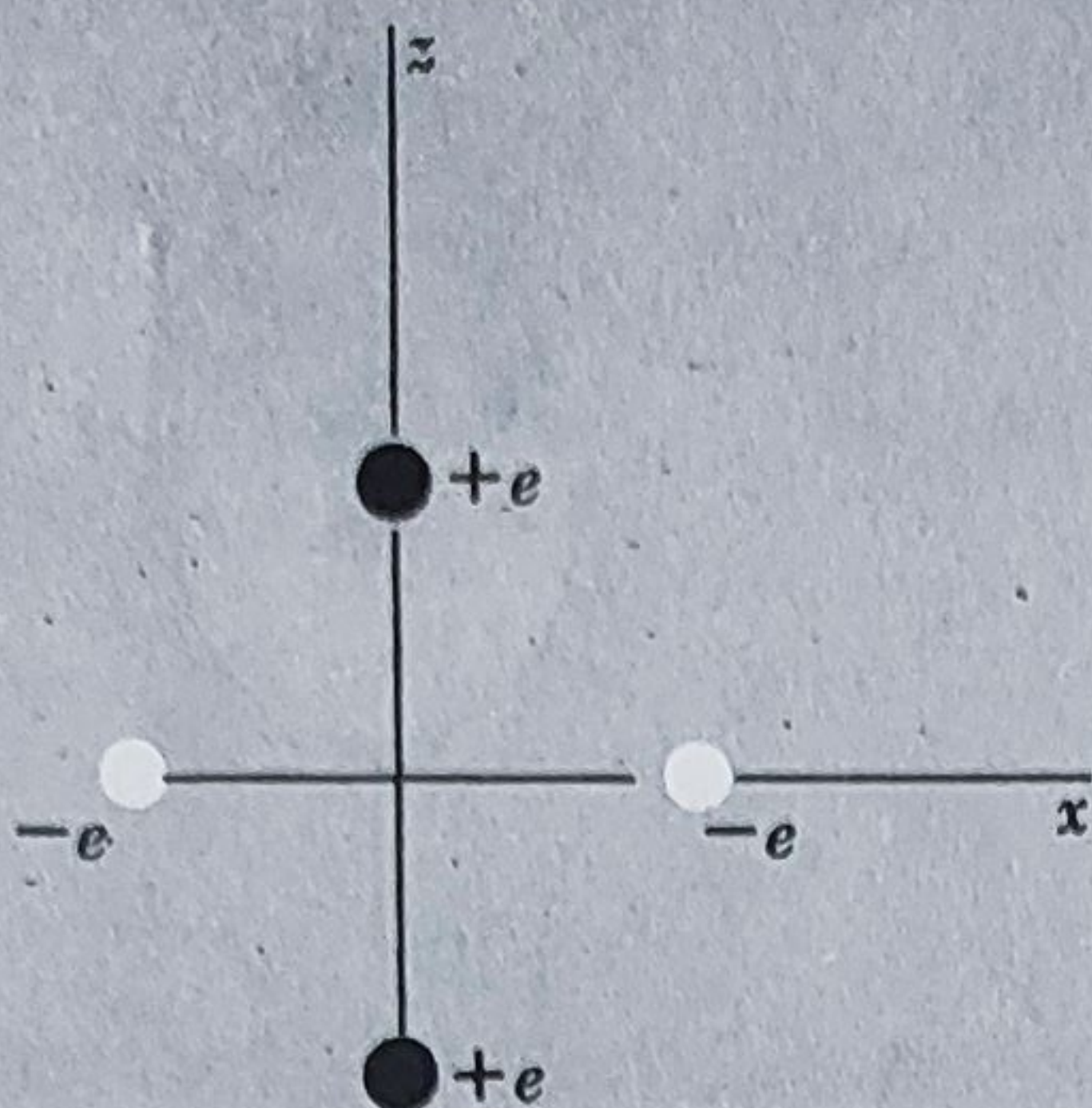


Fig. 9.4. Pentru această distribuție de sarcină,  $K_0 = K_1 = 0$ , dar  $K_2 \neq 0$ . Este o distribuție cu moment quadripolar nenul.

Cantitățile  $K_0, K_1, K_2 \dots$  sînt corelate cu ceea ce se numesc *momentele distribuției de sarcină*.

Folosind această terminologie, numim  $K_0$ , care este simplu sarcina totală, *momentul de monopol*, sau *intensitatea de monopol*.  $K_1$  este o componentă a *momentului de dipol* al distribuției. Momentul de dipol are dimensiunile *sarcină ori deplasare*; el este un *vector* și  $K_1$  al nostru este componenta sa  $z$ . A treia constantă  $K_2$  este legată de *momentul de quadripol* al distribuției, următoarea de *momentul de octopol*, și așa mai departe.\*

Avantajul pentru noi de a descrie o distribuție de sarcină prin această ierarhie de momente este că ea distinge tocmai acele trăsături ale distribuției de sarcină care determină câmpul la distanțe mari. Dacă ne ocupăm cu câmpul din imediata vecinătate a distribuției, ar fi fost un exercițiu fără rod. Pentru sarcina noastră principală, înțelegerea a ceea ce se petrece într-un dielectric, apare că *numai* intensitatea de monopol (sarcina netă) și intensitatea de dipol a părților constitutive moleculare contează. Putem nesocoti toate celelalte momente. Iar dacă moleculele sînt neutre, avem de considerat doar momentele lor dipolare.

### 9.3. POTENȚIALUL ȘI CÂMPUL UNUI DIPOL

Contribuția dipolară la potențialul în punctul  $A$ , distanță  $r$  de la origine, a fost dată prin  $(1/4\pi\epsilon_0 r^2) \int r' \cos \theta \rho dv'$ . Putem scrie  $r' \cos \theta$ , care este tocmai proiecția lui  $\mathbf{r}'$  pe direcția către  $A$ , ca  $\hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}'$ . Astfel putem scrie potențialul fără referință la vreo axă ca

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}' \rho dv' = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \mathbf{r}' \rho dv' \quad (9)$$

care va da potențialul în orice punct. Integrala din dreapta ecuației 9 este *momentul dipolar* al distribuției de sarcină. El este un vector, evident, cu

\* Se poate arăta că descompunerea sursei în diverși *multipoli*, dacă este efectuată complet, precizează în mod unic distribuția de sarcină. Cu alte cuvinte, dacă cunoaștem toate intensitățile de multipol putem „în principiu” deduce  $\rho(x', y', z')$ . Aceasta nu este foarte folositor. Momentele de quadripol sau mai înalte nu sînt vectori, dar entități mai complicate.



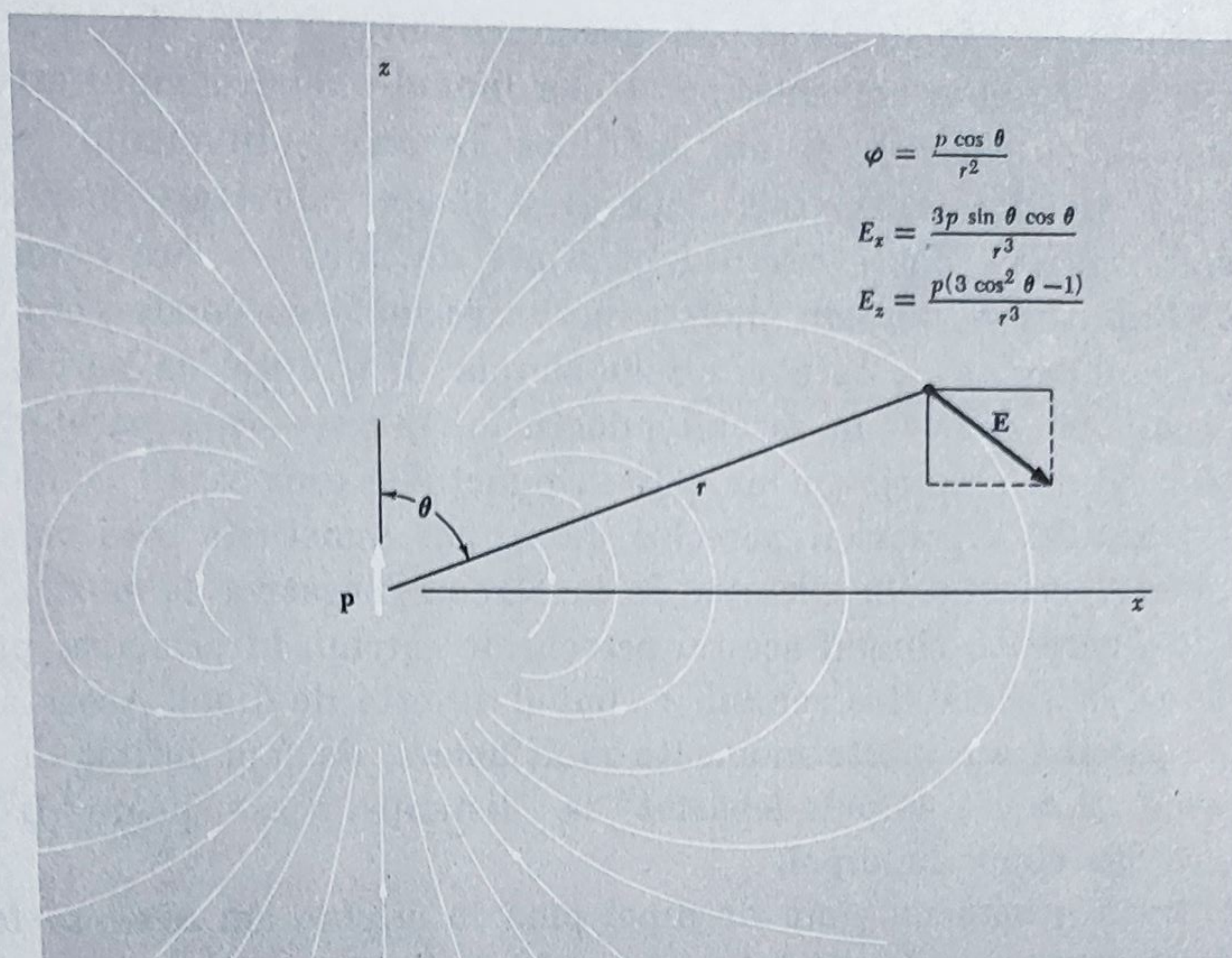


Fig. 9.5. Câmpul electric al unui dipol, schițat prin câteva linii de câmp.

dimensiunile sarcină ori distanță. Vom nota vectorul moment dipolar prin  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho dv' \quad (10)$$

Folosind momentul de dipol  $\mathbf{p}$ , putem rescrie ecuația 9 ca

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (11)$$

Câmpul electric este gradientul negativ al acestui potențial. Pentru a vedea cum este câmpul dipol, fixați un dipol  $\mathbf{p}$  în origine, orientat în direcția  $z$  (fig. 9.5). Cu acest aranjament,

$$\varphi = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (12)$$

Potențialul și câmpul sînt, desigur, simetrice în jurul axei  $z$ . Să lucrăm în planul  $xz$ , unde  $\cos \theta = z/(x^2 + z^2)^{1/2}$ . În acest plan, atunci

$$\varphi = \frac{pz}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (13)$$

Componentele intensității câmpului electric sînt obținute imediat:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3pxz}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3p \sin \theta \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3z^2}{(x^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \right] = \frac{p(3 \cos^2 \theta - 1)}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \end{aligned} \quad (14)$$

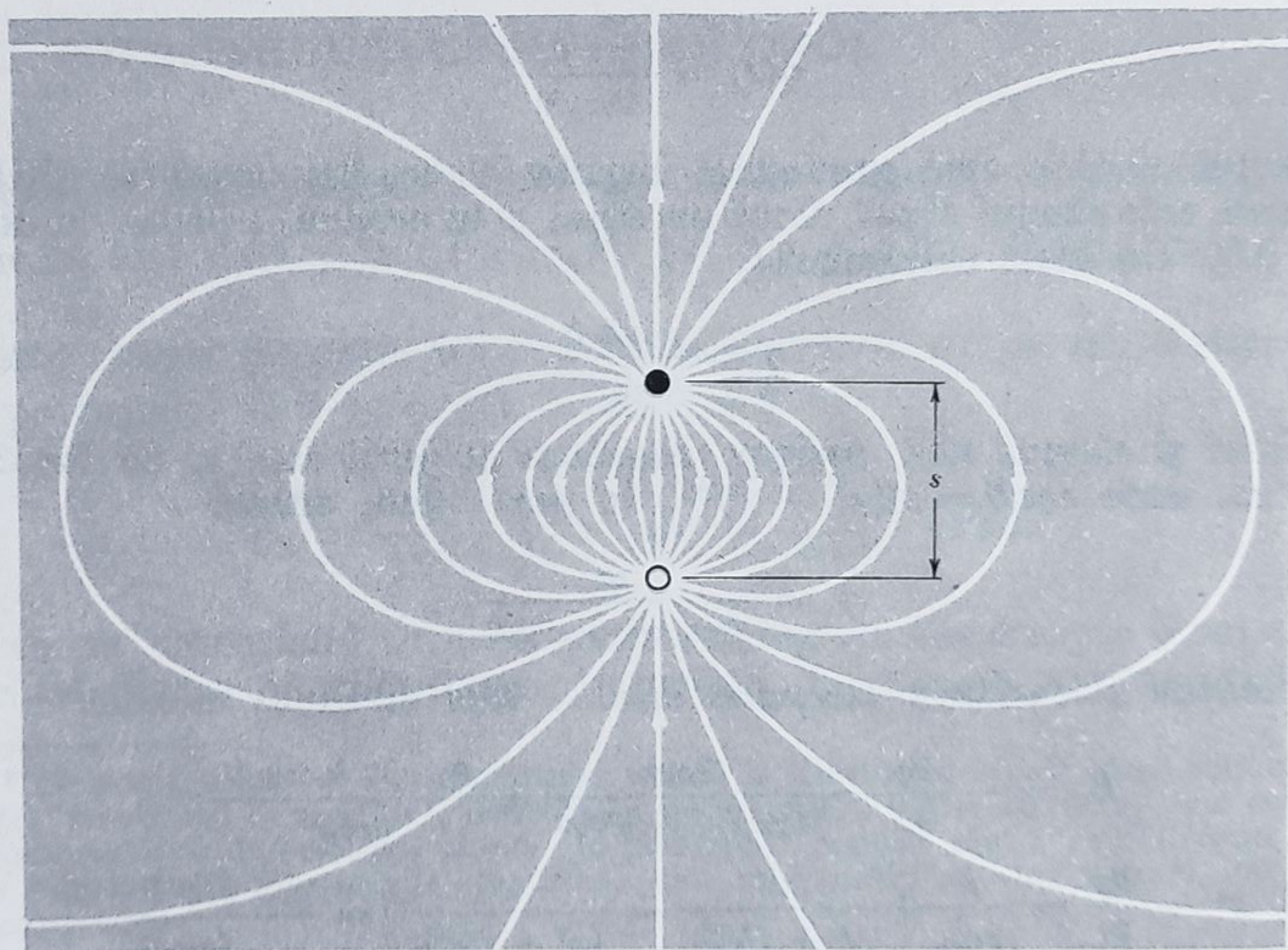


În orice direcție de la dipol, găsim că intensitatea câmpului electric descrește ca  $1/r^3$ , cum am anticipat. De-a lungul axei  $z$ , câmpul este paralel cu momentul dipolar  $p$ , și are mărimea  $2p/4\pi\epsilon_0 r^3$ . În planul ecuatorial câmpul este orientat antiparalel față de  $p$  și are valoarea  $-p/4\pi\epsilon_0 r^3$ .

Acest câmp vă poate readuce în minte de unul pe care l-am întâlnit înainte. Amintiți-vă sarcina punctuală în vecinătatea conductorului plan, cu „sarcina imagine”. Poate cea mai simplă distribuție de sarcină cu un moment dipolar este două sarcini punctuale,  $+q$  și  $-q$ , separate printr-o distanță  $s$ . Pentru un sistem de sarcini punctuale ecuația 10 ia formă unei sume. Momentul dipolar al perechi de sarcini punctuale este chiar  $qs$ , și vectorul este orientat în direcția de la sarcina negativă la pozitivă. Am schițat în figura 9.6 câmpul acestei perechi de sarcini, în principal pentru a accentua că în vecinătatea sarcinilor câmpul *nu* este de dipol. Această distribuție de sarcină are multe momente multipolare, de fapt infinit de multe, astfel încât numai „câmpul depărtat” la distanțe  $r \gg s$  poate fi reprezentat ca un câmp de dipol.

Pentru a genera un câmp de dipol pînă în origine am avea să facem  $s$  să tindă la zero mărind  $q$  fără limită, astfel încât să menținem  $p = qs$  finit. Această abstracție singulară nu este foarte interesantă. Știm că distribuția de sarcină moleculară va avea câmpuri apropiate complicate, astfel încât nu am putea reprezenta regiunea apropiată în nici un caz. Din fericire nu vom avea nevoie să o facem.

Fig. 9.6. Câmpul electric al unei perechi de sarcini punctiforme egale și de semn contrar aproximează câmpul unui dipol la distanțe mari în comparație cu distanța  $s$  dintre sarcini.





#### 9.4. CUPLUL ȘI FORȚA ASUPRA UNUI DIPOL ÎNTR-UN CÎMP EXTERN

Să presupunem că două sarcini  $q$  și  $-q$  sînt legate mecanic astfel încît  $s$ , distanța dintre ele, este fixată. Puteți gîndi despre sarcini ca fiind prinse la capătul unei scurte vergele neconductoare, de lungime  $s$ . Vom numi acest obiect un dipol. Momentul său dipolar  $p$  este simplu  $qs$ . Să punem dipolul într-un cîmp electric exterior, adică un cîmp de la o oarecare altă sursă. Cîmpul dipolului însuși nu ne interesează acum. Să considerăm mai întîi un cîmp electric uniform, ca în figura 9.7, *a*. Capătul pozitiv al dipolului este atras spre dreapta, capătul negativ spre stînga, printr-o forță de modul  $Eq$ . Forța totală asupra obiectului este zero și tot așa este cuplul, în această poziție. Un dipol care face un oarecare unghi  $\theta$  cu direcția cîmpului ca în figura 9.7, *b* evident este supus unui cuplu. În general, cuplul  $N$  este  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , unde  $\mathbf{F}$  este forța aplicată la distanța  $r$  de la origine (vol. I, cap. 6). Luînd originea în centrul dipolului, astfel încît  $r = s/2$ , avem

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_+ + (-\mathbf{r}) \times \mathbf{F}_- \quad (15)$$

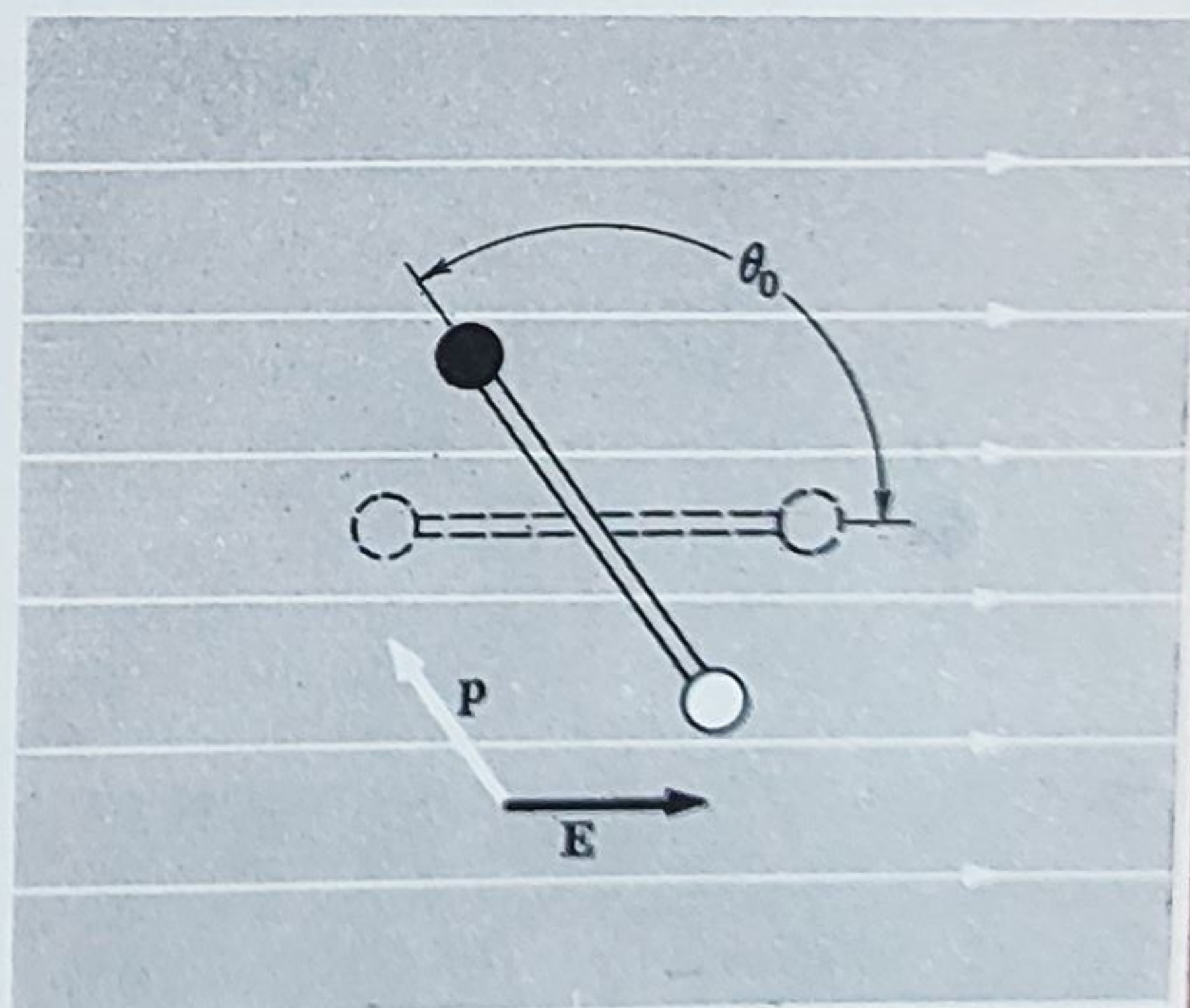
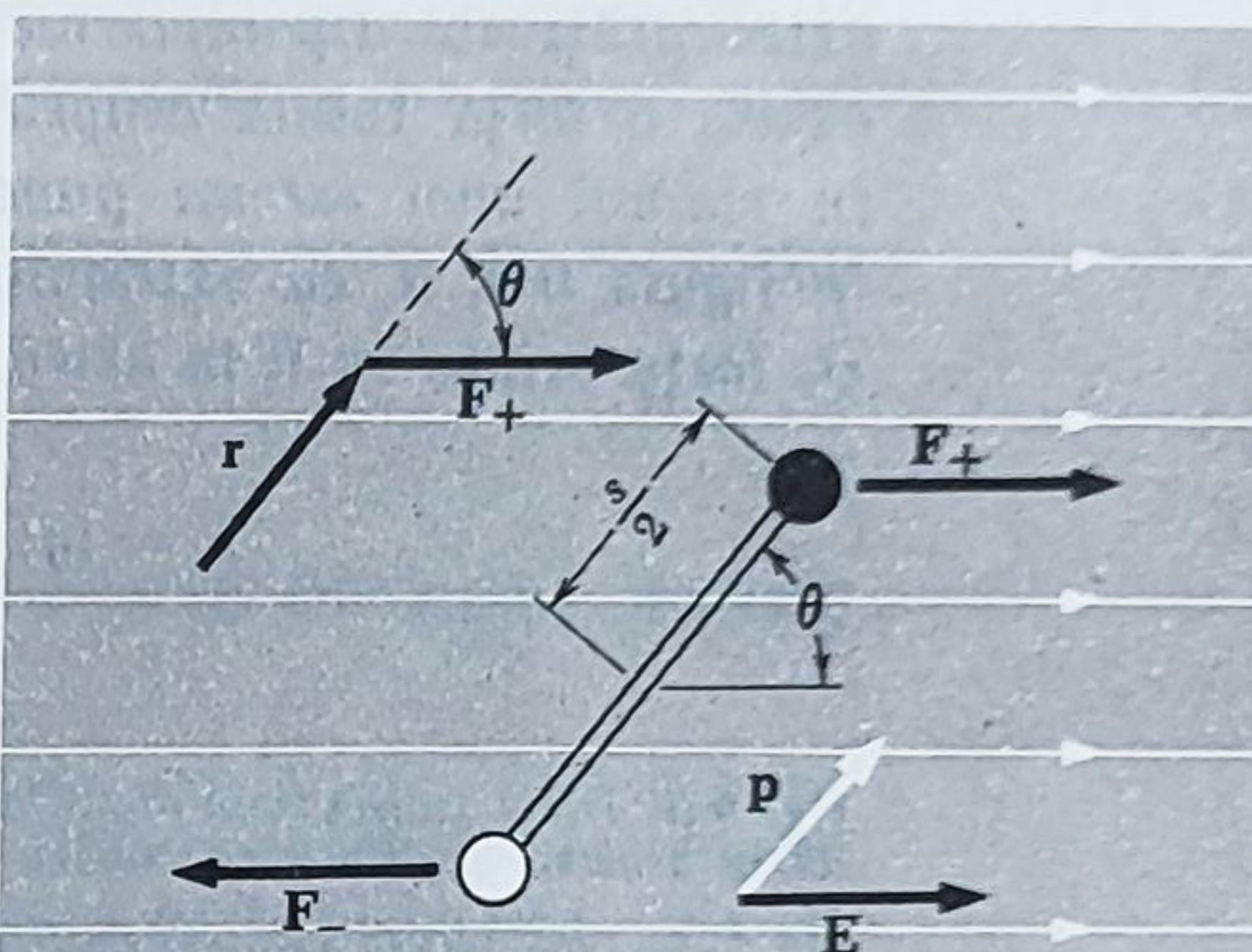
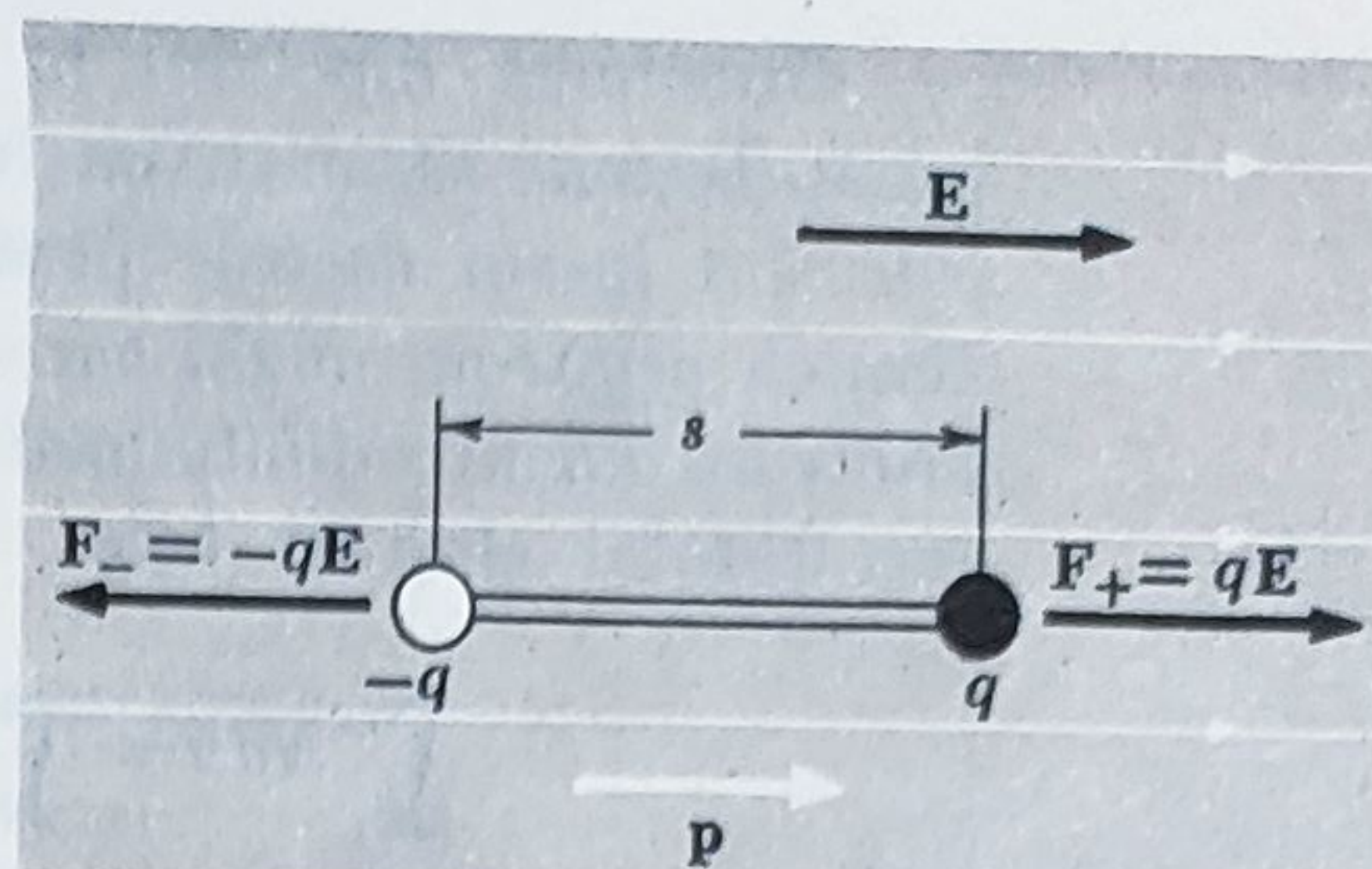
$\mathbf{N}$  este un vector perpendicular pe planul figurii, și mărimea sa este

$$\begin{aligned} N &= \frac{s}{2} Eq \sin \theta + \frac{s}{2} Eq \sin \theta = \\ &= sqE \sin \theta = pE \sin \theta \end{aligned} \quad (16)$$

Aceasta se poate scrie simplu

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (17)$$

Fig. 9.7. (a) Un dipol într-un cîmp uniform. (b) Cuplul asupra dipolului este  $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{N}$  este un vector orientat perpendicular pe pagină în jos. (c) Lucrul mecanic efectuat pentru a roti dipolul de la o orientare paralelă cîmpului la orientarea arătată este  $pE(1 - \cos \theta_0)$ .



87,83,73  
285,257, 246



Orientarea dipolului în figura 9.7, *a* corespunde la energia cea mai joasă. Trebuie să efectuăm lucru pentru a-l roti în oricare altă poziție. Să calculăm lucrul necesar pentru a roti dipolul dintr-o poziție paralelă cu câmpul, printr-un unghi oarecare  $\theta_0$ , cum se arată în figura 9.7, *c*. Rotirea printr-un unghi infinitesimal  $d\theta$  cere o cantitate de lucru  $Nd\theta$ . Astfel lucrul total efectuat este

$$\int_0^{\theta_0} Nd\theta = \int_0^{\theta_0} pE \sin \theta d\theta = pE (1 - \cos \theta_0) \quad (18)$$

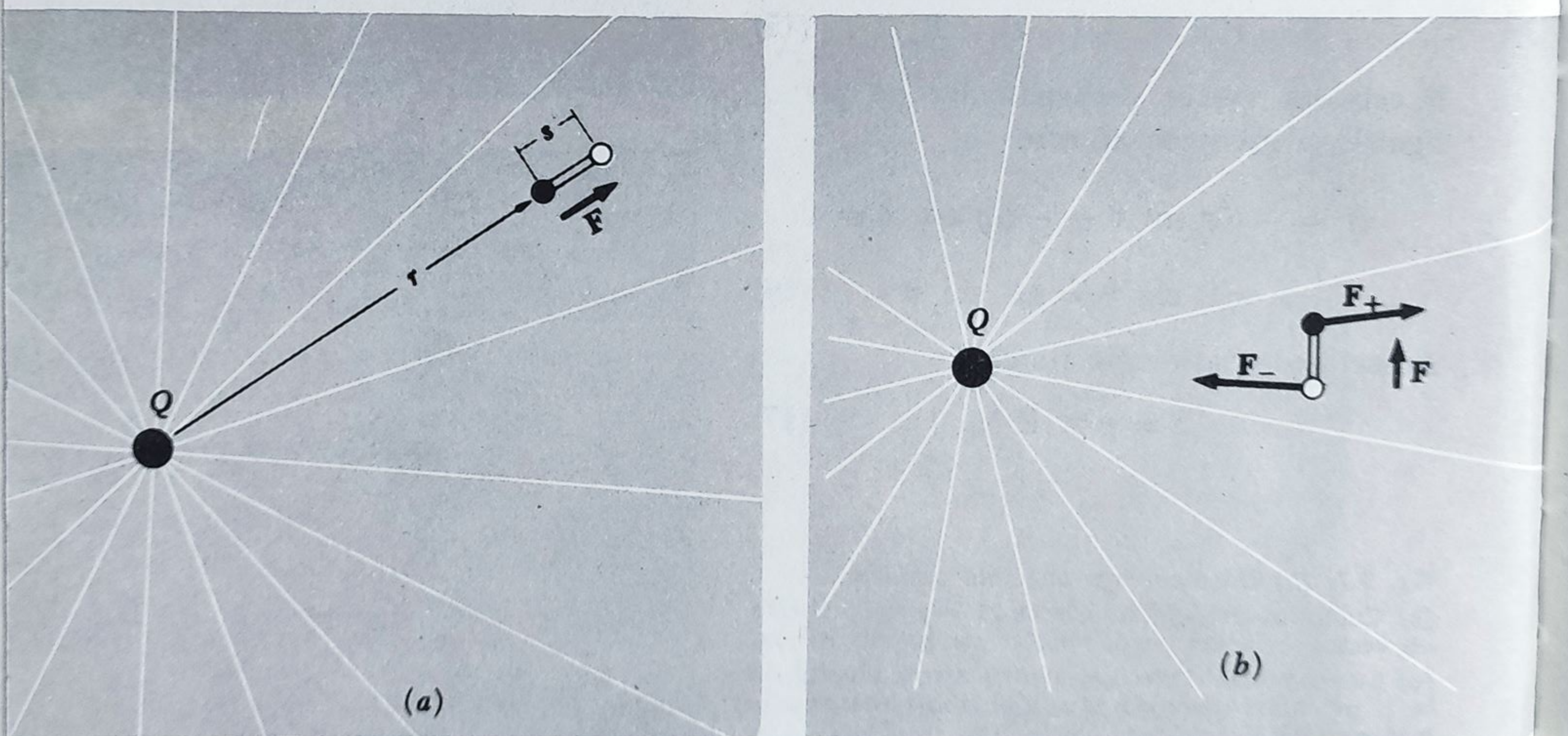
Întoarcerea dipolului, rotind capetele unul în locul celuilalt, corespunde la  $\theta_0 = \pi$  și cere o cantitate de lucru egală cu  $2pE$ .

Forța totală asupra dipolului în orice câmp *uniform* este zero, evident, indiferent de orientare. Într-un câmp neuniform forțele asupra celor două extremități ale dipolului nu vor fi în general exact egale și opuse, și va exista o forță totală asupra obiectului. Un exemplu simplu este un dipol în câmpul unei sarcini punctuale  $Q$ . Dacă dipolul este orientat radial ca în figura 9.8, *a*, cu extremitatea pozitivă mai aproape de sarcina pozitivă  $Q$ , forța totală va fi în afară, și mărimea sa va fi

$$F = (q) \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + (-q) \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (r+s)^2}. \quad (19)$$

Fig. 9.8. Forța asupra unui dipol într-un câmp neuniform. (a) Forța rezultantă asupra dipolului în această poziție este radială înspre exterior.

(b) Forța rezultantă asupra dipolului în această poziție este înspre interior.





Pentru  $s \ll r$ , avem nevoie doar să evaluăm aceasta pînă la termeni de ordinul întâi în  $s/r$ , ceea ce facem după cum urmează:

$$F = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{r}\right)^2} \right] \approx \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ 1 - \frac{1}{1 + \frac{2s}{r}} \right] \approx \frac{2sqQ}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (20)$$

În funcție de momentul de dipol  $p$ , aceasta este simplu

$$F = \frac{2pQ}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (21)$$

Cu dipolul la unghi drept față de cîmp, ca în figura 9.8, *b*, există de asemenea o forță. Acum forțele asupra celor două extremități, deși egale, nu sînt exact opuse în direcție.

Nu e greu să dezvoltăm o formulă generală pentru forța asupra unui dipol într-un cîmp electric neuniform. Forța depinde în esență de *gradientii* diverselor componente ale cîmpului. În general, componenta  $x$  a forței asupra unui dipol de moment  $\mathbf{p}$  este

$$F_x = \mathbf{p} \cdot \text{grad } E_x \quad (22)$$

cu formule corespunzătoare pentru  $F_y$  și  $F_z$ .

## 9.5. DIPOLI ATOMICI ȘI MOLECULARI. MOMENTE DIPOLARE INDUSE

Descriind distribuția de sarcină dintr-un atom sau moleculă vom avea de folosit termeni clasici pentru a zugrăvi un sistem cuantic. De asemenea, vom avea de tratat ca statică o structură în care particulele sînt, într-un sens, în mișcare în mod continuu. Mai tîrziu în curs, în volumul IV, veți vedea cum mecanica cuantică, departe de a discredita imaginea pe care tocmai am schițat-o, o sprijină.

Să considerăm cel mai simplu atom, atomul de hidrogen, care constă dintr-un nucleu și un electron. Dacă vă imaginați electronul încărcat negativ rotindu-se în jurul nucleului pozitiv ca o planetă în jurul Soarelui — ca în modelul atomic al lui Niels Bohr — veți trage concluzia că atomul are, la un moment dat, un moment dipolar electric. Vectorul moment dipolar  $\mathbf{p}$  este orientat paralel la raza vectoare electron-proton, și mărimea sa este e ori distanța electron-proton. Direcția acestui vector se schimbă rapid și în mod continuu pe măsură ce electronul se rotește pe orbita sa. Mai precis, *media temporală* a lui  $\mathbf{p}$  va fi zero pentru o orbită circulară, dar ne-am aștepta ca componentele momentului dipolar variind periodic să genereze cîmpuri electrice rapid oscilante și radiație electromagnetică. Absența unei astfel de radiații în atomul de hidrogen normal a fost unul dintre paradoxurile fizicii cuantice timpurii. Mecanica cuantică modernă ne spune că este mai bine să gîndim despre atomul de hidrogen în starea de energie cea mai joasă (condiția uzuală a celor mai mulți dintre atomii de hidrogen din univers) ca o structură simetrică cu sarcina electronică distribuită, în media temporală, într-un nor în jurul nucleului. Nimic nu se rotește sau oscilează. Dacă am putea lua un instantaneu cu un timp de expunere mai scurt de  $10^{-16}$  secunde, am putea distinge un electron localizat la o oarecare distanță de la nucleu. Dar pentru procese care implică timpi mult mai lungi decît acela avem, de fapt, o distribuție continuă de sarcină negativă în



jurul nucleului care se extinde în toate direcțiile cu densitate descrescătoare. Sarcina totală în această distribuție este chiar  $-e$ , sarcina unui electron. Aproximativ jumătate din ea se află în interiorul unei sfere de rază 0,5 angstrom ( $0,5 \times 10^{-8}$  cm). Densitatea descrește exponențial spre exterior, o sferă de numai 2,2 angstromi în rază conține 99 de procente din sarcină.

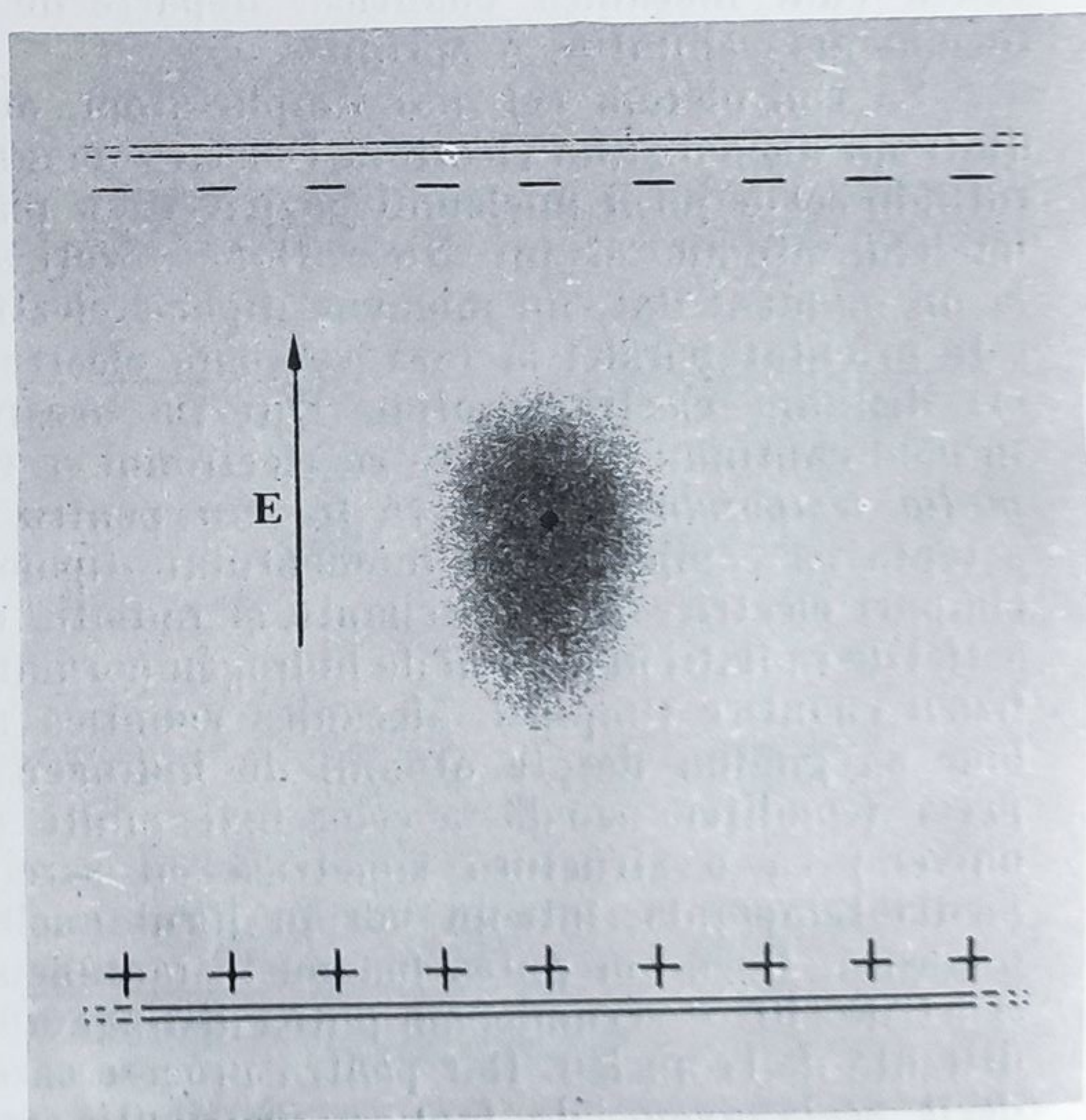
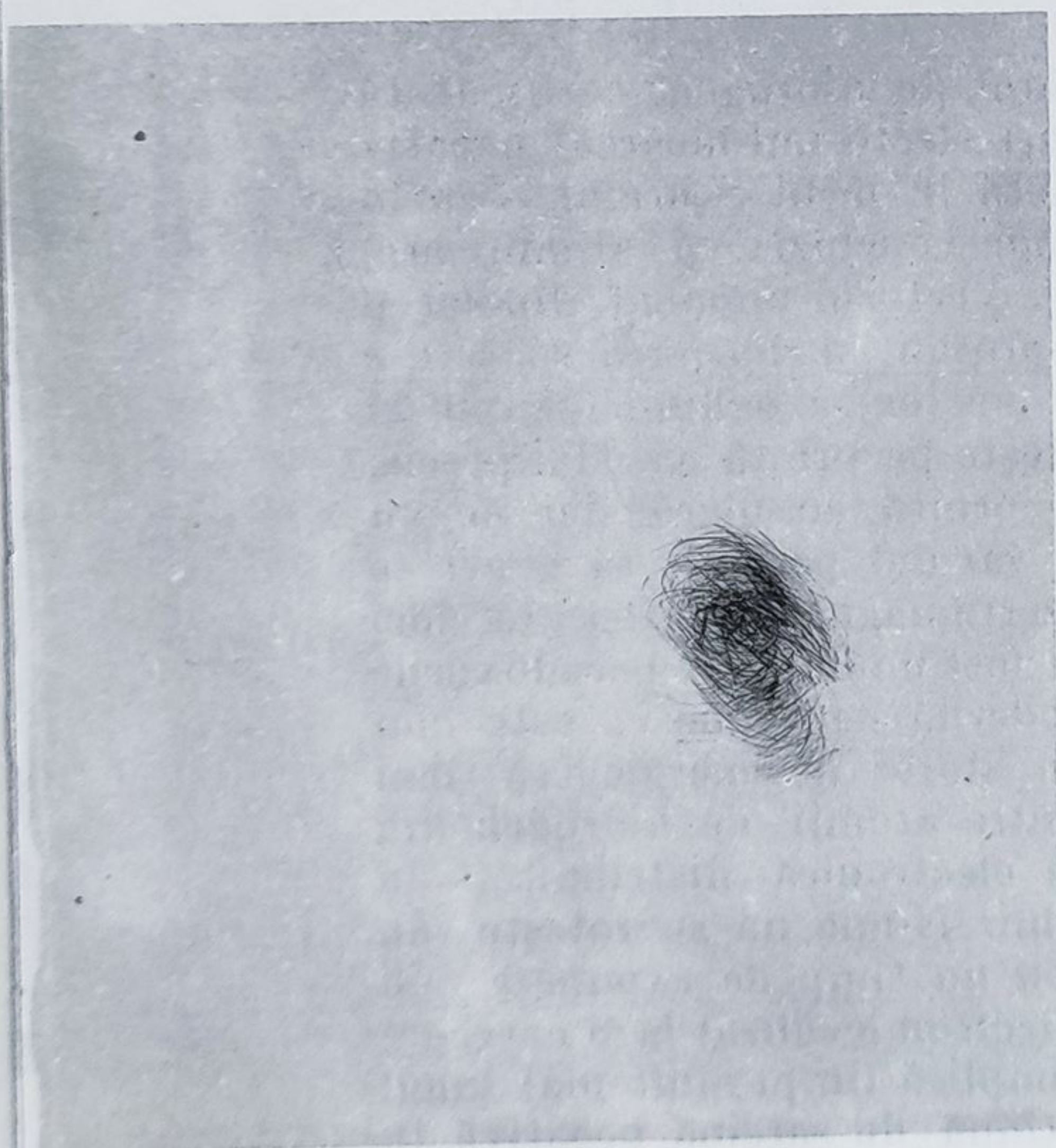
O imagine asemănătoare este cea mai bună de luat pentru alți atomi și molecule. Putem trata nucleele din molecule ca sarcini punctuale; pentru scopurile noastre prezente mărimea lor este prea mică încât să conteze. Întreagă structura electronică a moleculei este de imaginat ca un singur nor de sarcină negativă de densitate variind în mod continuu. Forma acestui nor și variația densității de sarcină în nod vor fi desigur diferite pentru diferite molecule. Dar la marginile norului densitatea va scădea totdeauna exponențial, astfel încât are un oarecare sens să vorbim despre mărimea și forma distribuției de sarcină moleculară.

Figura 9.9 reprezintă distribuția de sarcină în atomul normal de hidrogen. Figura reprezintă o secțiune transversală prin norul de simetrie sferică, cu densitatea sugerată prin înnegrire. Evident momentul dipolar al unei astfel de distribuții este zero. Aceeași afirmație este corectă despre orice atom în starea de energie cea mai joasă, indiferent câți electroni conține, deoarece în toate aceste stări distribuția de electroni are simetrie sferică. Este de asemenea adevărată despre orice atom ionizat, deși un ion, desigur, are un „moment monopolar“, adică, o sarcină netă.

Până aici nu avem nimic foarte interesant. Dar să punem acum atomul de hidrogen într-un câmp electric furnizat de o oarecare sursă exterioară, ca în figura 9.10. Câmpul electric deformează atomul, trăgând sarcina negativă

Fig. 9.9. Distribuția de sarcină mediată în timp în atomul normal de hidrogen. Umbrirea reprezintă densitatea sarcinii (negative) electronice.

Fig. 9.10. Într-un câmp electric sarcina negativă este trasă într-un fel, nucleul pozitiv într-alt fel. Când se atinge echilibrul, atomul este ușor deformat.





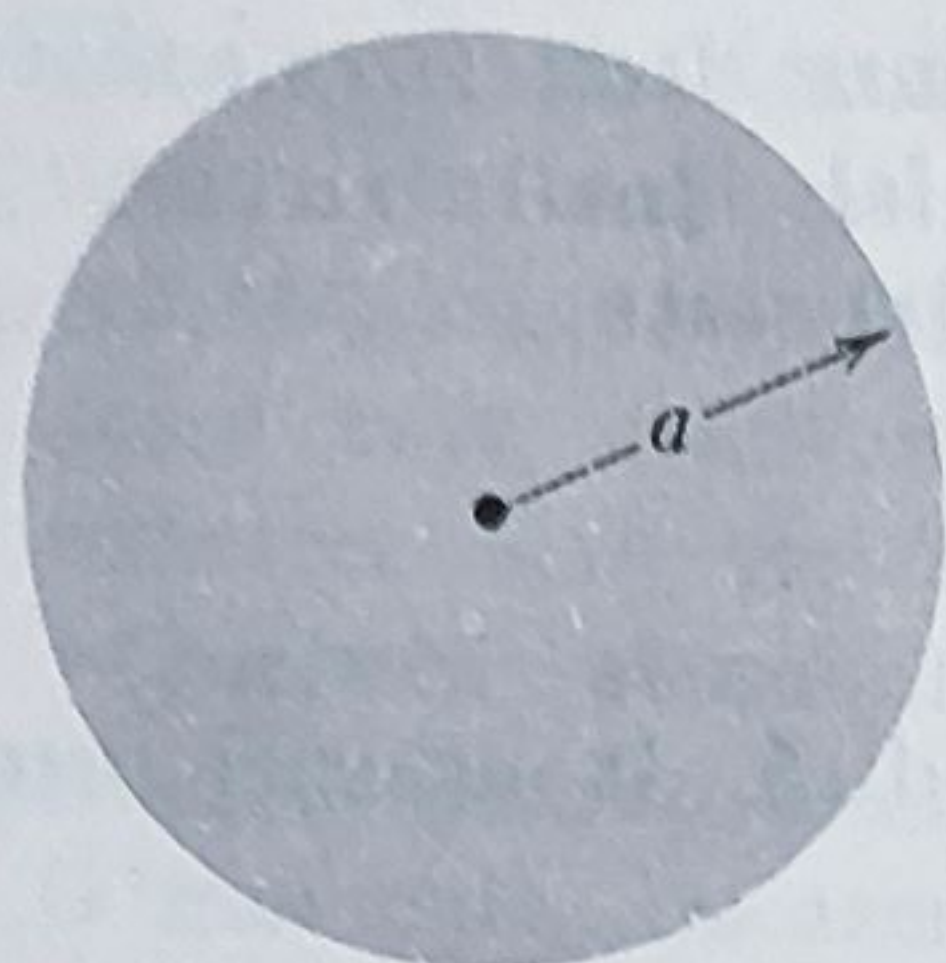


Fig. 9.11. Un model atomic primitiv. Sarcina negativă umple, cu densitate uniformă, o sferă de rază  $a$ , centrată pe nucleu.

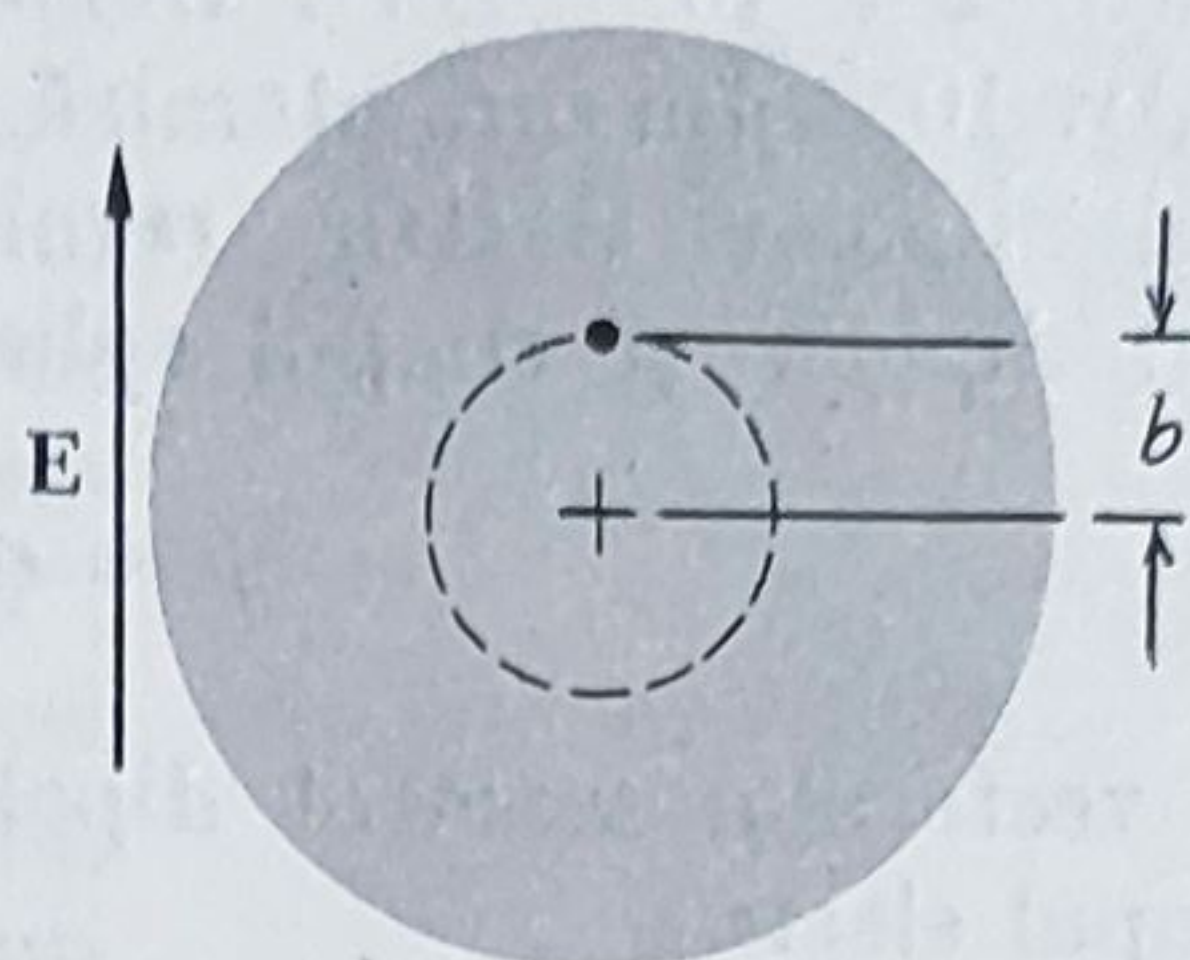


Fig. 9.12. Echilibru în câmp extern, cu nucleul și centrul bilei sferice de sarcină negativă separate la distanță  $b$ .

în jos și împingând nucleul pozitiv în sus. Atomul deformat va avea un moment dipolar electric deoarece „centrul de greutate” al sarcinii pozitive și acela al sarcinii negative nu mai coincid.

Putem folosi un model primitiv al atomului de hidrogen pentru a estima, ca ordin de mărime, cantitatea de deformare de așteptat. Să presupunem că în absența câmpului electric sarcina electrică negativă  $e$  este distribuită cu densitate *constantă* într-o sferă de rază  $a$ , în afara căreia este zero. Figura 9.11 ilustrează această aproximație folosită în locul distribuției reale reprezentată în figura 9.9. Să presupunem că atunci când câmpul  $E$  este aplicat, această minge de sarcină negativă își păstrează forma și densitatea și este doar deplasată, relativ la nucleu, astfel încât nucleul rămîne la o oarecare distanță  $b$  de la centrul sferei (fig. 9.12). La echilibru, forța asupra nucleului datorită intensității câmpului electric  $E$ , o forță  $eE$  newtoni acționînd în sus, trebuie să fie compensată de atracția în jos exercitată asupra nucleului de norul de sarcină negativă, care trage nucleul spre centru. Pentru a găsi mărimea forței din urmă, reamintim că în interiorul unei distribuții de sarcină sferice, într-un punct la distanța  $b$  de la centru, câmpul electric este acela datorat sarcinii în *interiorul* sferei de rază  $b$ . În acest caz cantitatea de sarcină în interiorul sferei de rază  $b$  este  $(b/a)^3 e$ , deoarece  $e$  este sarcina în interiorul sferei de rază  $a$ . La locul nucleului, de aceea, câmpul provenind de la norul electronic este chiar  $(1/4\pi\epsilon_0 b^2)e(b/a)^3$  sau  $eb/4\pi\epsilon_0 a^3$ . Egalarea acestei intensități de câmp cu aceea a câmpului aplicat de intensitate  $E$  dă condiția de echilibru

$$E = \frac{eb}{4\pi\epsilon_0 a^3} \text{ din care } b = \frac{4\pi\epsilon_0 a^3 E}{e}. \quad (23)$$

87,83,73  
285,253



Să introducem în ea cifra rotundă 1 angstrom, sau  $10^{-8}$  cm, pentru  $a$ . Am sugerat că o rază de această mărime ar cuprinde cea mai mare parte a sarcinii într-o distribuție reală. Pentru  $E$  vom lua 30 000 volt/cm, un câmp de laborator destul de intens. Cu aceste premize, ecuația 23 dă pentru  $b$  mărimea  $2 \times 10^{-13}$  cm\*. Deformarea este *foarte mică*. Deplasarea este aproximativ  $10^{-5}$  din raza atomică, și nu mult mai mare decât raza nucleului. Momentul dipolar electric rezultat este  $eb$ , astfel încât relația între momentul dipolar și câmpul aplicat, în acest model, este

$$p = eb = 4\pi\epsilon_0 a^3 E \quad (24)$$

Direcția vectorului moment dipolar este în sus, adică, în aceeași direcție ca și câmpul electric.

Observați că câmpul electric este proporțional cu câmpul aplicat. Ne putem aștepta ca aceasta să fie adevărat în atomul real, cel puțin pentru deformări mici, și calculul nostru sugerează că practic orice câmp din laborator perturbă numai foarte puțin un atom. Orice atom poate fi polarizat în acest fel. Spunem că momentul dipolar este *indus* de intensitatea câmpului electric  $E$ . În toate cazurile găsim că  $p$  este proporțional cu  $E$ :

$$p = \epsilon_0 \alpha E \quad (25)$$

Constanta  $\alpha$  este o proprietate a atomului numită *polarizabilitate atomică*.

Pentru modelul nostru al atomului de hidrogen polarizabilitatea  $\alpha$  este egală cu  $4\pi a^3$ . Observați că  $\alpha$  are dimensiunea de volum. Un calcul cuantic exact al polarizabilității atomului de hidrogen prezice  $\alpha = (9/2)a_0^3$ , unde  $a_0$  este „raza Bohr“,  $0,52 \times 10^{-8}$  cm, distanța caracteristică în structura atomului de  $H$  în starea sa normală. Polarizabilitățile electrice ale mai multor tipuri de atomi, determinate experimental, sînt date în tabela 9.2.

Tabel 9.2

Polarizabilități atomice, în unități de  $10^{-24}$  cm<sup>3</sup>

Element $\alpha =$	H 8,29	He 2,64	Li 150	Be 116	C 18,8
Ne 5,02	Na 339	A 201	K 427		

Exemplele date sînt aranjate în ordinea numărului crescător de electroni. Observați variațiile mari în  $\alpha$ . Dacă sînteți obișnuit cu sistemul periodic al elementelor, puteți distinge ceva sistematic aici. Hidrogenul și metalele alcaline, litiu, sodiu și potasiu, care ocupă prima coloană a sistemului periodic.

\* La efectuarea calculelor valorile numerice se introduc în unități SI (N. trad.).



au valori mari ale lui  $\alpha$  și acestea cresc în mod constant cu creșterea numărului atomic, de la hidrogen la potasiu. Gazele nobile au polarizabilități atomice mult mai mici, dar acestea cresc de asemenea când trecem, în această familie, de la heliu la neon, la krypton. Atomii alcalini, ca o clasă, sînt ușor deformați de un cîmp electric, în timp ce structura electronică a atomului de gaz nobil este mult mai rigidă. Electronul exterior slab legat, sau „de valență”, din structura atomilor alcalini este cel răspunzător pentru polarizabilitatea ușoară.

O moleculă, de asemenea, dezvoltă un moment dipolar indus cînd i se aplică un cîmp electric. Molecula de metan reprezentată în figura 9.13 este alcătuită din patru atomi de hidrogen așezați în colțurile unui tetraedru în jurul atomului de carbon central. Acest obiect are o polarizabilitate electrică, determinată experimental, de

$$32,6 \times 10^{-24} \text{ cm}^3.$$

Este interesant de comparat aceasta cu suma polarizabilităților unui atom de carbon și patru atomi de hidrogen izolați. Luînd datele din tabela 9.2, găsim  $\alpha_C + 4\alpha_H = 51,5 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$ . Evident legarea atomilor într-o moleculă a modificat întrucîtva structura electronică. Măsurători ale polarizabilităților atomice și moleculare au fost mult timp folosite de către chimiști drept chei la structura moleculară.

## 9.6. TENSORUL DE POLARIZABILITATE

Moleculele sînt în mod necesar mai puțin simetrice decît atomii. Aceasta ridică posibilitatea unui moment dipolar indus neparalel cu cîmpul electric care l-a indus. Să considerăm molecula de bioxid de carbon. Ea este o moleculă liniară „în formă de țigară” cu atomii constituenți aranjați cum se arată în figura 9.14, *a*. Ar fi surprinzător dacă această structură electronică ar fi la fel de rigidă față de deformări longitudinale și transversale. În general, ne-am aștepta ca un cîmp electric aplicat paralel axei să producă un moment dipolar indus diferit în mărime de acela indus de către un cîmp de aceeași intensitate aplicat ca la unghi drept față de axa moleculară. Într-adevăr, polarizabilitatea observată a moleculei de  $\text{CO}_2$  este  $50,9 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$ , pentru un cîmp aplicat paralel la axă, și ceva mai puțin de jumătate din aceasta pentru un cîmp transversal. Molecula are două polarizabilități, pe care le-am putea nota  $\alpha_{||}$  și  $\alpha_{\perp}$ . Ce se întîmplă dacă aplicăm un cîmp într-o oarecare altă direcție, ca în figura 9.14, *b*?

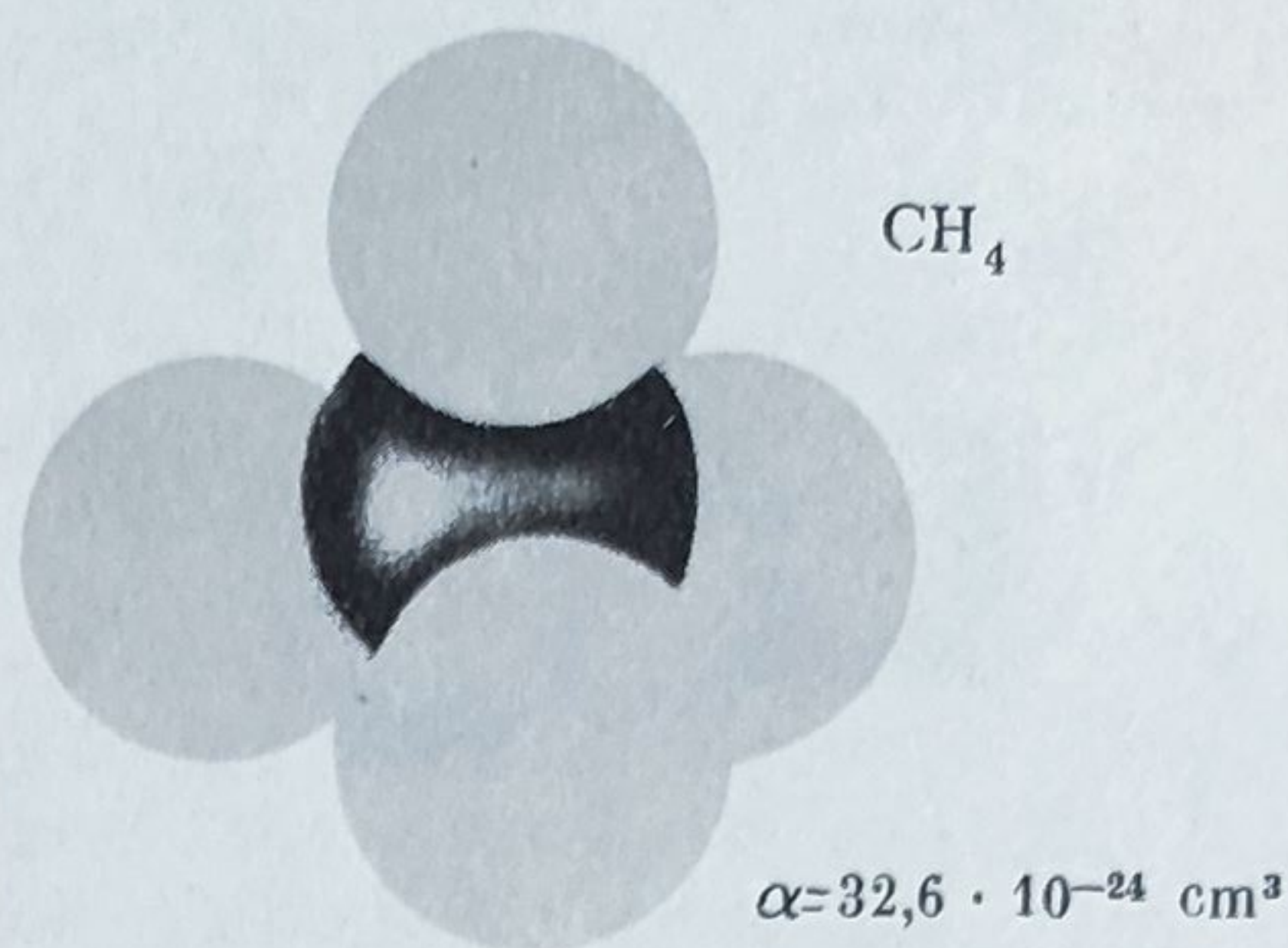
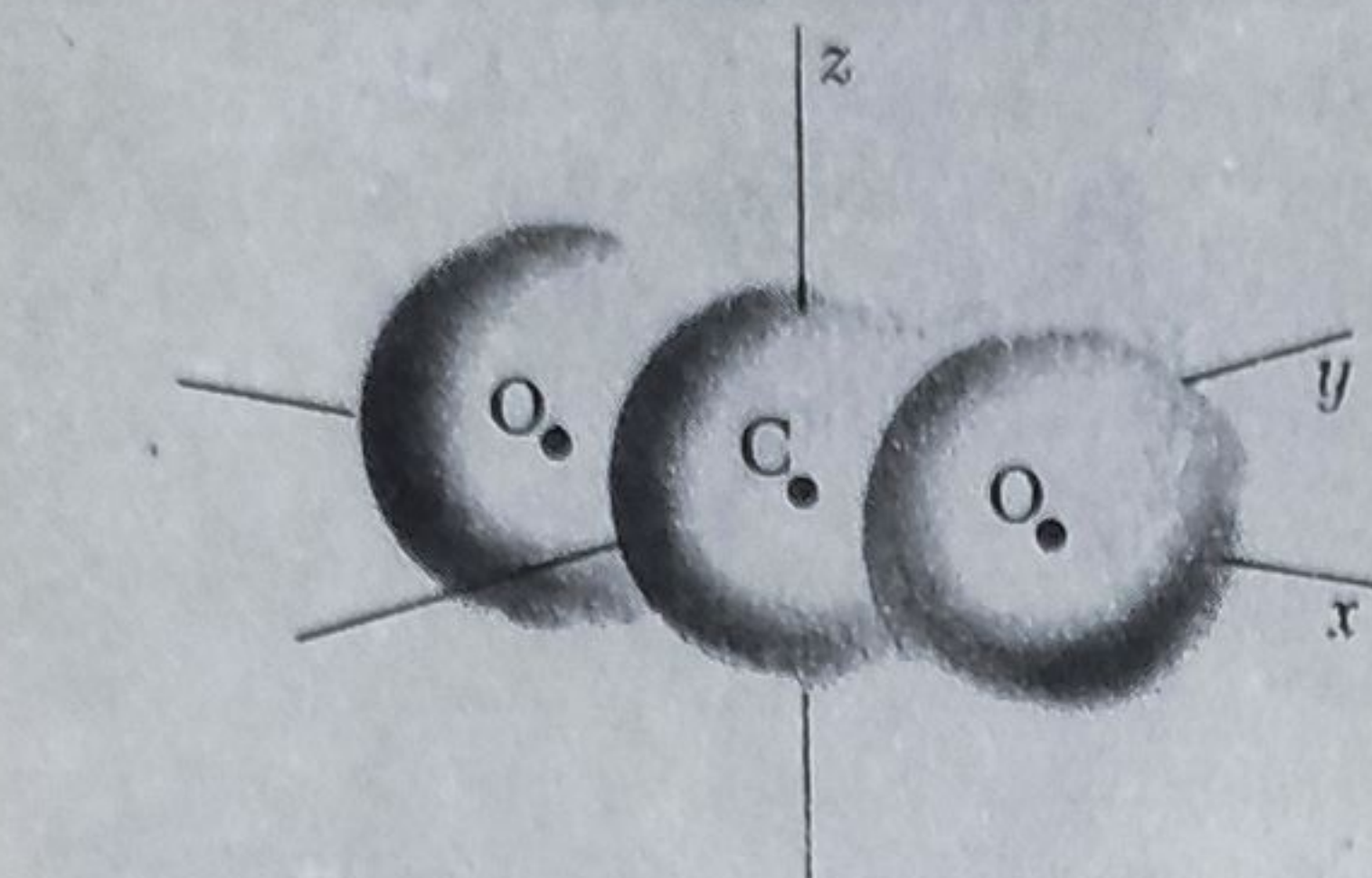
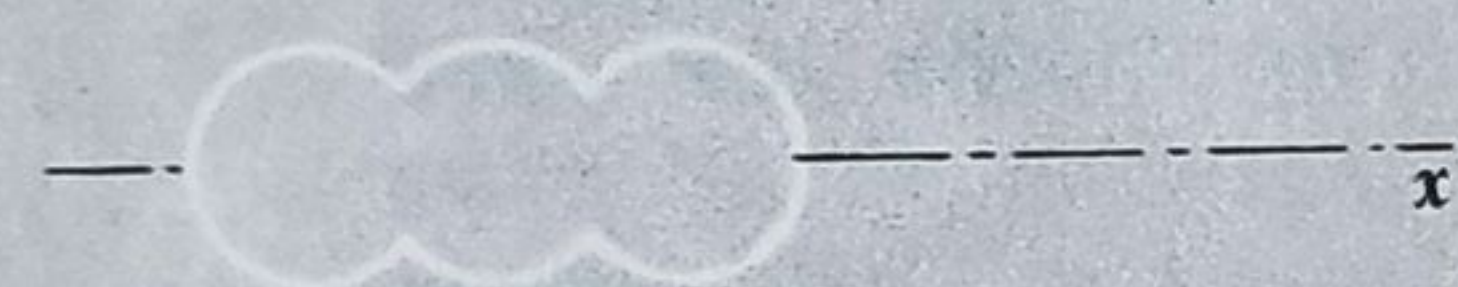
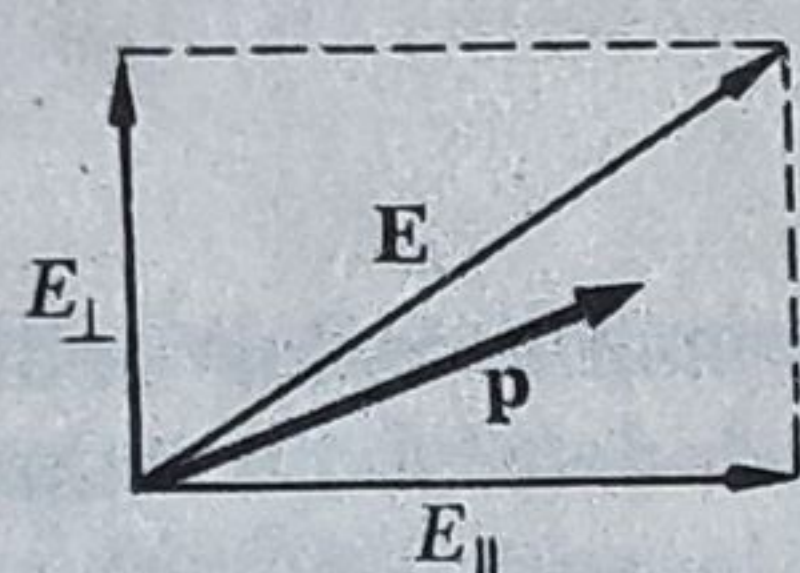


Fig. 9.13. Molecula de metan, alcătuită din patru atomi de hidrogen și un atom de carbon.

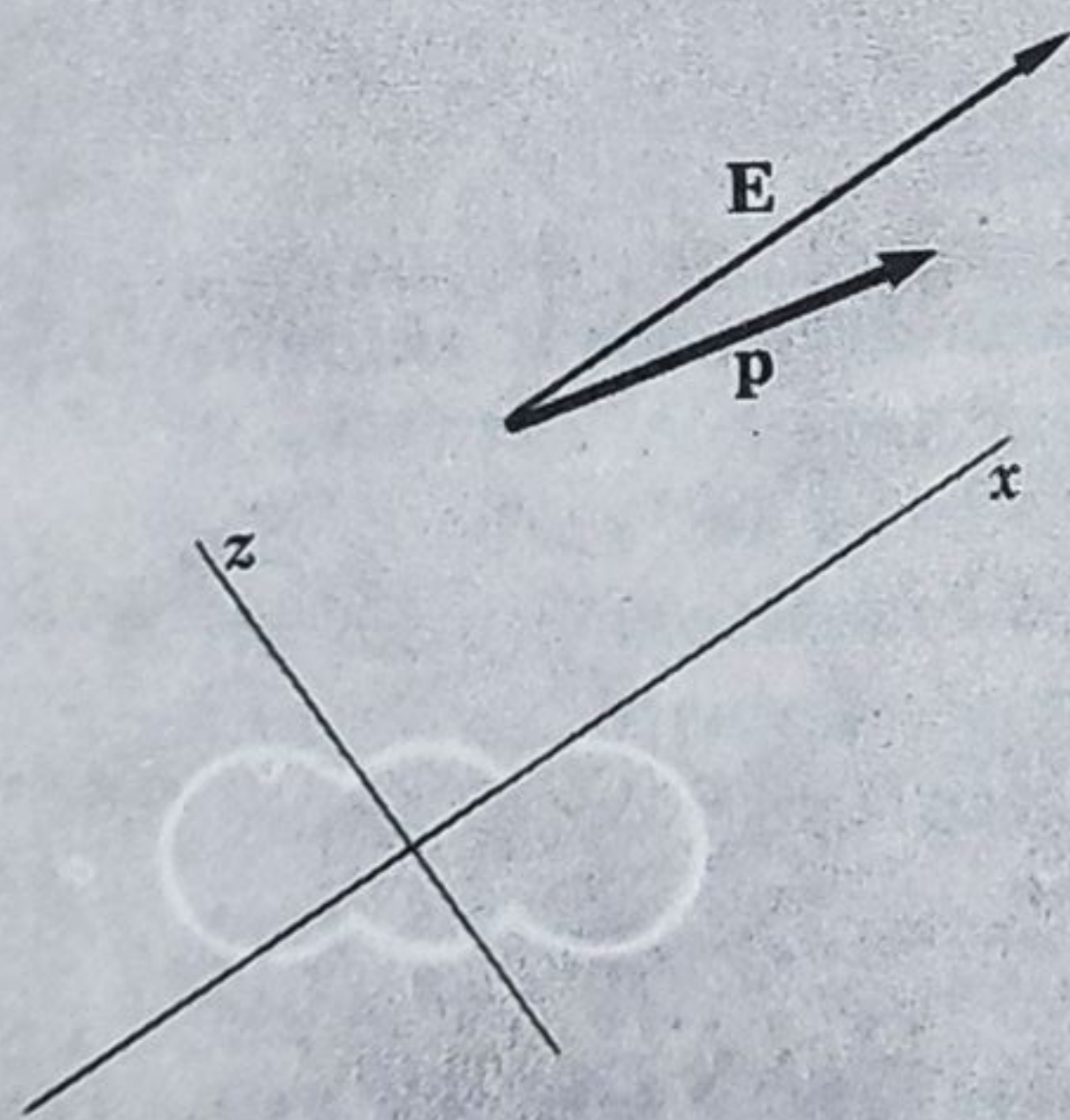




(a)



(b)



(c)

Aceasta se poate prezice ușor. Deoarece ne ocupăm cu un fenomen linear\* (efect direct proporțional cu cauza) principiul superpoziției are loc. Putem descompune intensitatea câmpului  $E$  în componente paralelă și perpendiculară la axa moleculară.  $E_{\parallel} = E \cos \theta$  și  $E_{\perp} = E \sin \theta$ . Ne putem imagina aceste componente aplicate separat, și apoi să combinăm vectorii moment care rezultă.  $E_{\parallel}$  induce un moment de-a lungul axei moleculare de mărime  $p_{\parallel} = \epsilon_0 \alpha_{\parallel} E_{\parallel} = \epsilon_0 \alpha_{\parallel} E \cos \theta$ .  $E_{\perp}$  produce un moment perpendicular pe axă:  $p_{\perp} = \epsilon_0 \alpha_{\perp} E \sin \theta$ . Acestea împreună dau momentul  $p$  produs de câmpul original  $E$ . Momentul dipolar nu este paralel cu  $E$  dacă  $\alpha_{\parallel} \neq \alpha_{\perp}$ . El este orientat mai aproape de direcția de polarizare ușoară. (Puteți imagina un analog mecanic pentru această comportare?)

Acest exemplu arată că polarizabilitatea unei molecule nu este un simplu număr, un scalar, ci mai degrabă un set de coeficienți care exprimă o dependență lineară a componentelor unui vector  $p$ , în acest exemplu, de acelea ale altuia,  $E$ . Un astfel de set de coeficienți este numit tensor. Cea mai generală relație de acest fel ar implica nouă coeficienți, și ar putea fi scrisă în acest fel:

$$\begin{aligned} p_x &= \epsilon_0 (\alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z) \\ p_y &= \epsilon_0 (\alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z) \\ p_z &= \epsilon_0 (\alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z) \end{aligned} \quad (26)$$

Cei nouă  $\alpha$  definiți în acest fel constituie ceea ce este cunoscut drept tensorul de polarizabilitate.

**Fig. 9.14.** (a) Molecula de bioxid de carbon polarizează mai ușor paralel cu axa lungă decât perpendicular pe aceasta.

(b) Aceasta înseamnă că componenta câmpului aplicat  $E_{\parallel}$  are un efect mai mare decât  $E_{\perp}$ .

(c) Astfel polarizarea indusă  $p$  nu este paralelă câmpului aplicat  $E$ .

\* Ne ocupăm de asemenea cu o moleculă *lineară* (atomi aranjați pe o linie dreaptă)! *Linear* are, desigur, înțelesuri cu totul diferite în cele două întrebări.



În exemplul moleculei de  $\text{CO}_2$ , dacă orientăm axa  $x$  de-a lungul axei moleculei, coeficienții devin  $\alpha_{xx} = \alpha_{||}$ ,  $\alpha_{yy} = \alpha_{zz} = \alpha_{\perp}$ ; și ceilalți șase coeficienți sînt zero. Dacă am fi ales o altă orientare pentru axele de coordonate, să spunem axa  $x$  la  $30^\circ$  de axa moleculară, un câmp  $E$  în direcția  $x$ , ca în figura 9.14, c ar produce un moment de dipol  $p$  avînd o componentă în direcția  $z$ . Astfel  $\alpha_{zx}$  nu ar fi zero. (Puteți găsi valoarea pe care ar avea-o descompunînd  $E$  în componente paralelă și perpendiculară la axa moleculară, găsind polarizația indusă de acestea, și apoi componenta  $z$  a rezultantei.) Astfel elementele tensorului de polarizabilitate vor depinde de orientarea axelor de coordonate. Ele trebuie să se transforme la rotația axelor de coordonate astfel încît să păstreze invariantă relația dintre vectorii  $E$  și  $p$ . Această relație poate să depindă numai de direcția lui  $E$  față de axa fizică a moleculei, și nu de cum se întîmplă să așezăm axele  $x, y$  și  $z$ . Nu vom dezvolta aici regulile după care se transformă coeficienții tensoriali. Ele sînt analoage regulilor pentru transformarea componentelor unui vector. Dacă vreți să vedeți ce se întîmplă cu un minim de muncă, ați putea să o faceți pentru cazul bidimensional, cum se sugerează în problema 9.23.

În tensorul de polarizabilitate  $\alpha$  numai șase coeficienți sînt independenți. Se poate demonstra că  $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$ ,  $\alpha_{xz} = \alpha_{zx}$  și  $\alpha_{yz} = \alpha_{zy}$ . Adică, matricea pătrată de nouă numere este totdeauna simetrică față de diagonala principală. Simetria tensorului exprimă un fapt fizic cu totul remarcabil care merită o oarecare gîndire. Aceasta înseamnă că un câmp  $E$  aplicat în direcția  $x$  produce întotdeauna o componentă  $z$  a polarizării exact egală cu componenta  $x$  a polarizării care ar fi produsă de un câmp egal aplicat după direcția  $z$ . Dacă gîndiți că această fapt este evident sau banal, reflectați că el este adevărat chiar pentru o moleculă care nu are nici un fel de simetrie ca molecula arătată în figura 9.15. Este un fel de teoremă de „reciprocitate” care, ca și egalitatea inductanțelor mutuale pe care am demonstrat-o în § 7.7, nu provine din simplă simetrie geometrică, ci din ceva mai general. Dacă vă întrebați cum se poate demonstra aceasta probleme 9.22 v-o va arăta.

Un corolar important al simetriei lui  $\alpha$  este faptul că este totdeauna posibil a orienta axele, relativ la cadrul molecular, astfel încît coeficienții „nediagonali”  $\alpha_{xy}$  etc., să fie zero. În aceste coordonate polarizabilitatea moleculei este complet descrisă de trei numere  $\alpha_{xx}$ ,  $\alpha_{yy}$ ,  $\alpha_{zz}$ . Și aceasta este adevărat chiar pentru o moleculă care nu are nici un fel de simetrie. Nu vom folosi aceste fapte în studiul nostru limitat al dielectricilor. Ele sînt extrem de importante în investigarea proprietăților optice ale moleculelor și sînt probabil încă mai familiare chimiștilor, astăzi, decît fizicienilor. Scopul principal al acestei digresiuni asupra tensorului de polarizabilitate a fost să vă familiarizeze, prin intermediul acestui exemplu intuitiv, cu natura unui tensor.

## 9.7. MOMENTE DIPOLARE PERMANENTE

Unele molecule sînt construite astfel încît au momente de dipol electric chiar în absența unui câmp electric. Ele sînt nesimetrice chiar din starea lor normală. Molecula arătată în figura 9.15 este un exemplu. Un exemplu mai simplu este dat de orice moleculă biatomică alcătuită din atomi neasemă-

87.83.43  
285.257



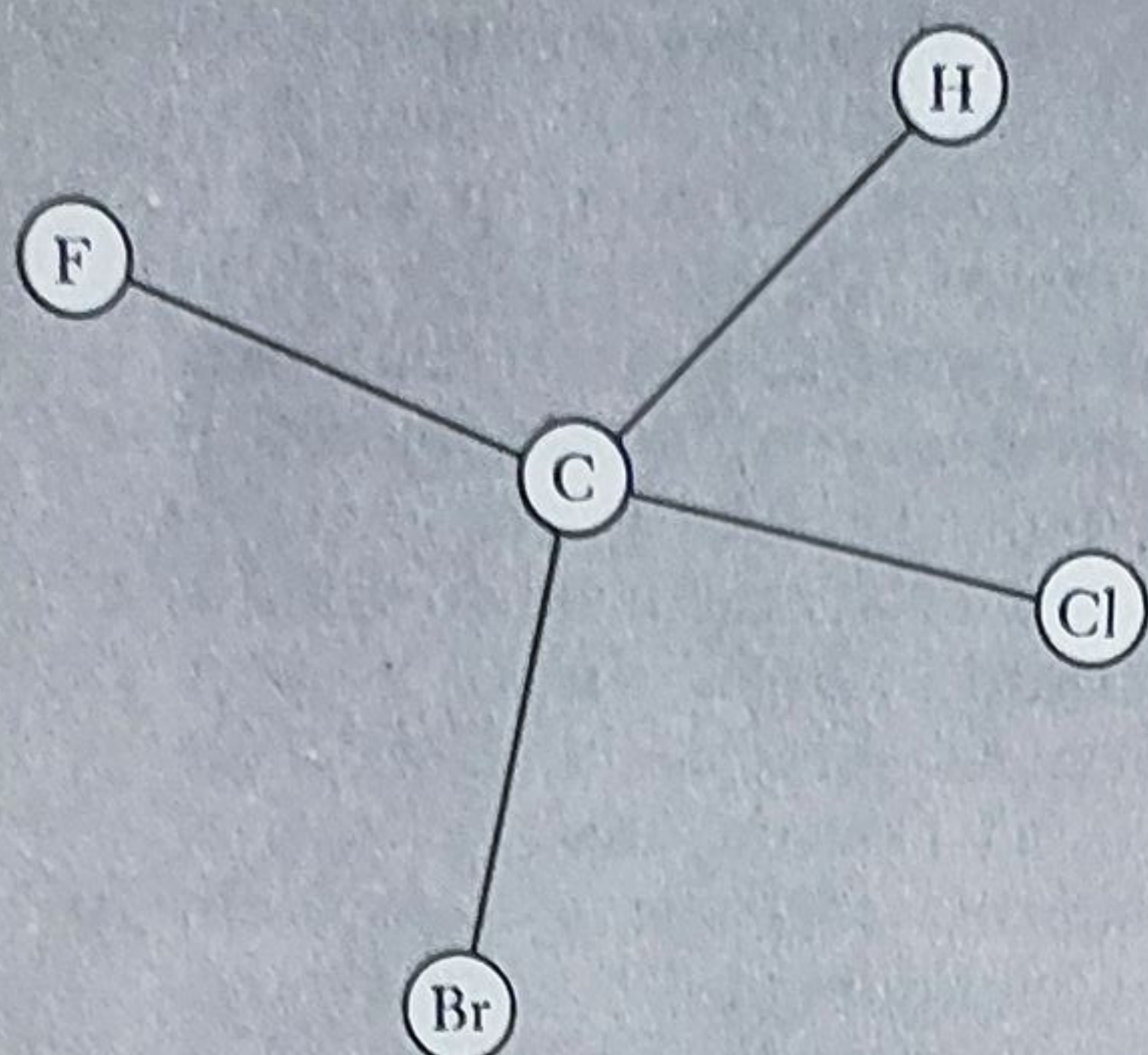


Fig. 9.15. O moleculă fără nici un fel de simetrie, bromoclorofluormetan. Aceasta este metan cu trei halogenuri diferite substituite pentru trei dintre hidrogeni. Lungimile legăturilor și muchiile tetraedrului sînt toate puțin diferite.

nători, ca acidul clorhidric, HCl. Nu există nici un punct pe axa acestei molecule față de care molecula este simetrică „înainte-înapoi”; cele două capete ale moleculei sînt fizic diferite. Ar fi doar un accident dacă „centrul de greutate” al sarcinilor pozitive și cel al sarcinilor negative s-ar întîmpla să cadă în același punct de-a lungul axei. Cînd molecula de HCl este formată din atomi inițial sferici de H și Cl, electronul atomului de H se deplasează

parțial către structura de Cl, lăsînd atomul de hidrogen în parte dezgolit. Astfel există un oarecare exces de sarcină pozitivă la capătul hidrogenului și un exces corespunzător de sarcină negativă la capătul clorului. Mărimea momentului dipolar rezultat,  $3,43 \times 10^{-30}$  coulomb-metru, este echivalentă cu deplasarea unui electron aproximativ o cincime de angstrom. Prin contrast atomul de hidrogen într-un cîmp de 30 kV/cm, cu polarizabilitatea trecută în tabela 9.2, ajunge la un moment indus mai mic de  $3 \times 10^{-34}$  coulomb-metru. Momentele dipolare permanente, cînd există, sînt de regulă imens mai largi decît orice moment care poate fi indus de cîmpuri electrice de laborator obișnuite.\* Din cauza aceasta, distincția între molecule *polare*, cum sînt numite moleculele cu momente dipolare proprii, și molecule *nepolare*, este foarte netă.

Am spus la începutul § 9.5 că atomul de hidrogen are, la orice moment de timp, un moment dipolar. Dar apoi l-am îndepărtat ca fiind zero în medie temporală, datorită mișcării rapide a electronului. Părem acum să vorbim despre momente dipolare moleculare ca și cînd o moleculă ar fi un obiect staționar obișnuit ca o paletă de baseball ale cărei capete ar putea fi examinate în voie pentru a vedea care este mai mare! Moleculele se mișcă mai încet decît electronii, dar mișcarea lor este rapidă față de standarde comune. De ce le putem atribui momente dipolare electrice „permanente”? Dacă această inconsistență v-a neliniștit, urmează să fiți lăudați. Răspunsul complet nu poate fi dat fără ceva mecanică cuantică, dar diferența implică în esență scala temporală a mișcării. Timpul necesar unei molecule să interacționeze cu mediul din jur este în general *mai scurt* decît timpul necesar mișcării intrinseci a moleculei să medieze în mod continuu momentul dipolar. Deci molecula *acționează în realitate* ca și cînd ar avea

\* Există un motiv întemeiat pentru aceasta. Cîmpurile electrice intense în atomi și molecule sînt în mod natural de ordinul lui  $e/4\pi\epsilon_0 (10^{-10}\text{m})^2$  care este aproximativ  $10^{11}$  V/m! Nu putem aplica un astfel de cîmp materiei în laborator din motivul că ar rupe materia în bucăți.



momentul despre care vorbeam. Un timp foarte scurt apare drept „permanent” în universul unei molecule și al vecinilor ei.

Cîteva molecule polare comune sînt arătate în figura 9.16, cu direcția și mărimea momentului dipolar permanent indicată pentru fiecare. Molecula de apă are un moment dipolar electric deoarece este încovoiată la mijloc, axele O—H făcînd un unghi de aproximativ  $105^\circ$  între ele. Aceasta este o ciudățenie cu consecințele cele mai cuprinzătoare. Momentul dipolar al moleculei este în mare măsură responsabil pentru proprietățile apei ca solvent, și joacă un rol decisiv în chimia care are loc în mediu apos. Este greu de imaginat cum ar arăta lumea dacă molecula de  $H_2O$ , asemenea moleculei de  $CO_2$ , avea părțile aranjate după o linie dreaptă; probabil nu am fi aici să o observăm. Ne grăbim să adăugăm că forma moleculei de  $H_2O$  nu este o fantezie capricioasă a Naturii. Mecanica cuantică a dezvăluit clar de ce o moleculă alcătuită dintr-un atom cu opt electroni legat de doi atomi cu un electron trebuie să fie încovoiată.

Comportarea unei substanțe polare ca dielectric este izbitor de diferită de aceea a materiei compuse din molecule nepolare. Constanta dielectrică a apei este circa 80, aceea a alcoolului metilic 33, în timp ce un lichid nepolar tipic ar putea avea o constantă dielectrică în jur de 2. În substanța nepolară aplicarea unui cîmp electric induce un mic moment dipolar în fiecare moleculă. În substanța polară dipolii sînt deja prezenți cu mare intensitate dar, în absența unui cîmp, sînt orientați aleatoriu astfel încît nu au nici un efect la scară mare. Un cîmp electric aplicat doar îi *aliniiază* într-un grad oarecare. În ambele procese, totuși, efectele macroscopice vor fi determinate de cantitatea netă de polarizare pe unitatea de volum.

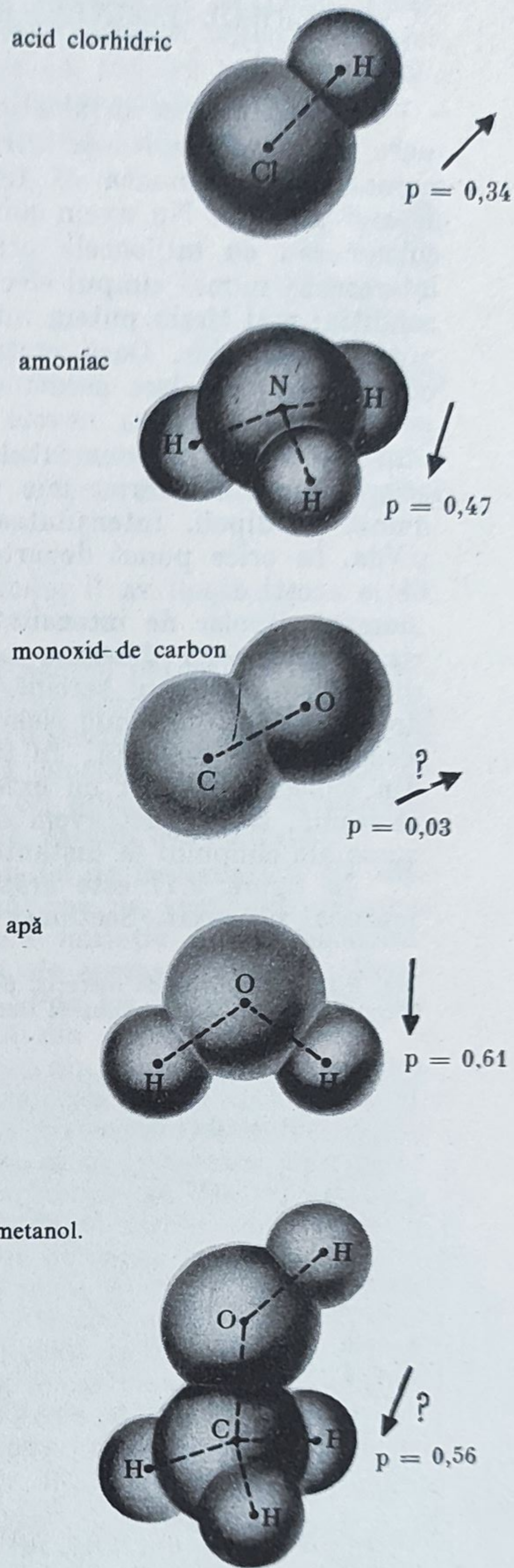


Fig. 9.16. Cîteva molecule polare bine-cunoscute. Mărimea observată a momentului dipolar „permanent” este dată în unități de  $10^{-29}$  coulomb-metri.

87,83,43  
285,257,2

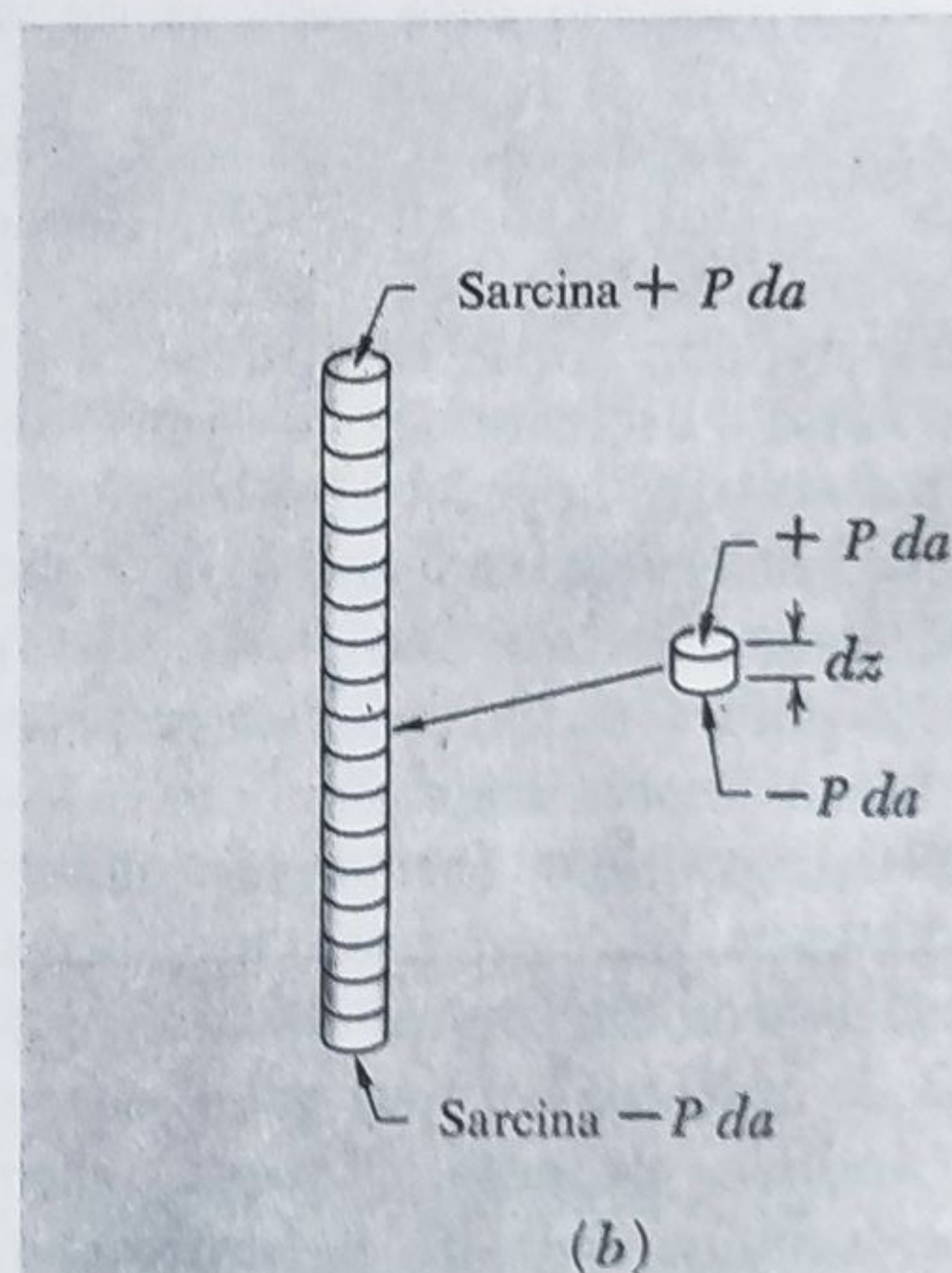
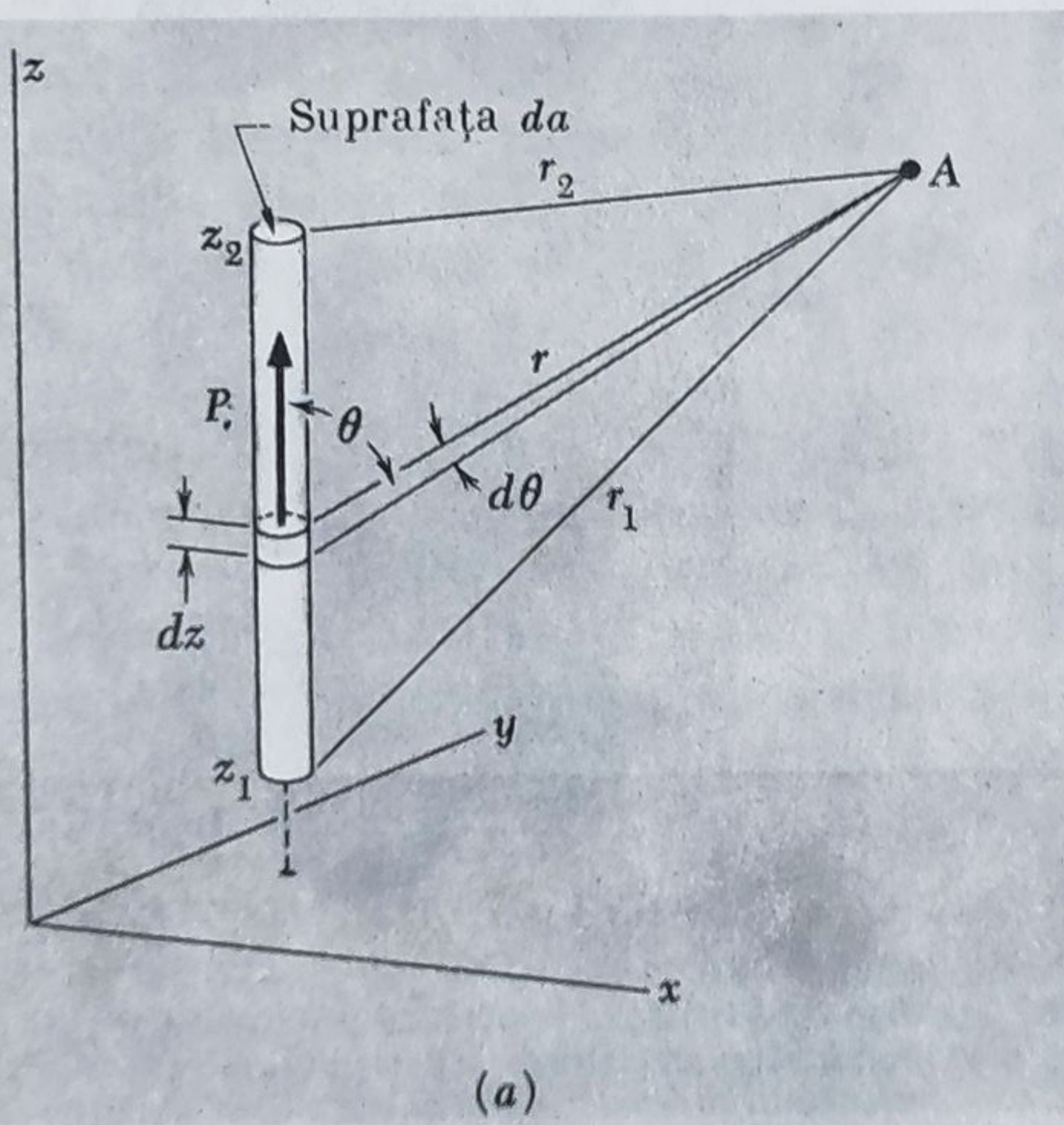


## 9.8. CÎMPUL ELECTRIC PRODUS DE MATERIA POLARIZATĂ

Să presupunem că alcătuim un bloc de materie prin asamblarea unui mare număr de molecule într-o regiune anterior goală din spațiu. Să presupunem de asemenea că fiecare din aceste molecule este polarizată în aceeași direcție. Nu avem nevoie să ne preocupăm acum cu natura moleculelor sau cu mijloacele prin care este menținută polarizarea lor. Ne interesează numai câmpul electric pe care *ele* îl produc când sînt în această condiție; mai târziu putem introduce orice câmpuri de la alte surse care ar putea fi împrejur. Dacă vrei, vă puteți imagina că acestea sînt molecule cu momente dipolare permanente care au fost alineate și înghețate în acea poziție. Tot ce avem nevoie să precizăm este  $N$ , numărul de dipoli pe centimetru cub, și momentul fiecărui dipol  $p$ . Vom presupune că  $N$  este atât de mare încît orice mic volum macroscopic  $dv$  conține totuși un mare număr de dipoli. Intensitatea dipolară totală într-un astfel de volum este  $pNdv$ . În orice punct departe de acest element de volum, câmpul electric de la acești dipoli va fi practic același dacă ar fi înlocuiți printr-un singur moment dipolar de intensitatea  $pNdv$ . Vom numi  $pN$  densitatea de polarizare și o vom desemna prin  $P$ , o cantitate vectorială cu dimensiunile sarcină-cm/cm<sup>3</sup> sau sarcină/cm<sup>2</sup>. Atunci  $P dv$  este momentul dipolar de asociat cu orice mic element de volum  $dv$  în scopul calculării câmpului electric la o distanță. În treacăt, materia noastră a fost alcătuită doar din molecule neutre; nu există nici o sarcină netă în sistem sau pe vreo moleculă, astfel încît avem de considerat *numai* momentele dipolare drept surse ale câmpului la distanță.

În figura 9.17 este arătată o coloană subțire, sau cilindru, din acest material polarizat. Secțiunea sa transversală este  $da$ , și se întinde vertical

Fig. 9.17. O coloană de material polarizat (a) produce același câmp, în oricare punct exterior  $A$ , ca două sarcini, una la fiecare capăt al coloanei (b).





de la  $z_1$  la  $z_2$ . Densitatea de polarizare  $\mathbf{P}$  în coloană este uniformă pe toată lungimea și orientată în direcția  $z$  pozitivă. Urmează să calculăm potențialul electric, într-un oarecare punct exterior, al acestei coloane de polarizare. Un element al cilindrului, de înălțime  $dz$ , are un moment dipolar  $Pdv = Pda dz$ . Contribuția sa la potențialul în punctul  $A$  poate fi scrisă referindu-ne la formula ecuației 12 pentru potențialul unui dipol:

$$d\varphi_A = \frac{P da dz \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (27)$$

Potențialul datorat întregii coloane este

$$\varphi_A = \frac{Pda}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz \cos \theta}{r^2}. \quad (28)$$

Aceasta este mai simplu decât arată;  $dz \cos \theta$  este tocmai  $-dr$ , astfel încât integrandul este o diferențială totală,  $d(1/r)$ . Rezultatul integrării este atunci

$$\varphi_A = \frac{Pda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (29)$$

Ecuația 29 este exact aceeași cu expresia pentru potențialul în  $A$  care ar fi produs de două sarcini punctuale, o sarcină pozitivă de mărime  $Pda$  stînd în vârful coloanei la o distanță  $r_2$  de  $A$ , și o sarcină negativă de aceeași mărime la celălalt capăt al coloanei. O sursă constînd dintr-o coloană de materie polarizată uniform este echivalentă, cel puțin în ceea ce privește cîmpul în toate punctele *exterioare*, cu două sarcini concentrate.

Putem dovedi aceasta riguros fără nici un fel de matematică. Să considerăm o mică secțiune a coloanei de înălțime  $dz$ , conținînd moment dipolar în cantitatea  $Pda dz$ . Să facem acum o imitație sau un înlocuitor pentru aceasta, luînd un izolator nepolarizat de aceeași mărime și formă și punînd o sarcină  $+P da$  sus și o sarcină  $-Pda$  jos. Acest mic bloc are acum același moment dipolar ca acea bucată din coloana originală și de aceea va aduce o contribuție identică la cîmpul din orice punct îndepărtat  $A$ . (Cîmpul din interiorul înlocuitorului nostru, sau foarte aproape de el, poate fi diferit de cîmpul originalului — nu ne preocupăm de aceasta.) Să facem acum un întreg set de astfel de blocuri, și să le așezăm unul peste altul pentru a imita coloana polarizată. Ele trebuie să dea același cîmp în  $A$  ca și întreaga coloană, deoarece fiecare bloc dă aceeași contribuție ca și perechea din original (fig. 9.17, *b*). Să vedem acum ce avem! La fiecare îmbinare sarcina pozitivă de pe suprafața de sus a unui bloc coincide cu sarcina negativă de pe suprafața inferioară a blocului de deasupra, făcînd sarcina zero. Singurele sarcini lăsate necompensate sînt sarcina negativă  $-Pda$  de pe fața de jos a celui mai jos bloc și sarcina pozitivă  $+Pda$  de pe fața de sus a celui mai de sus bloc. Văzute dintr-un punct îndepărtat cum este  $A$ , acestea arată ca sarcini punctuale. Tragem concluzia, ca și înainte, că două astfel de sarcini produc în  $A$  exact același cîmp ca și coloana de material polarizat.

Fără alte calcule putem extinde acestea la o placă, sau un cilindru drept, de orice proporții, polarizat uniform într-o direcție perpendiculară pe fețele paralele (fig. 9.18, *a*). Placa poate fi subdivizată într-un mănunchi de coloane și potențialul în exterior va fi suma contribuțiilor coloanelor, fiecare dintre ele putînd fi înlocuită printr-o sarcină la fiecare capăt.

87,83, 43  
285, 25



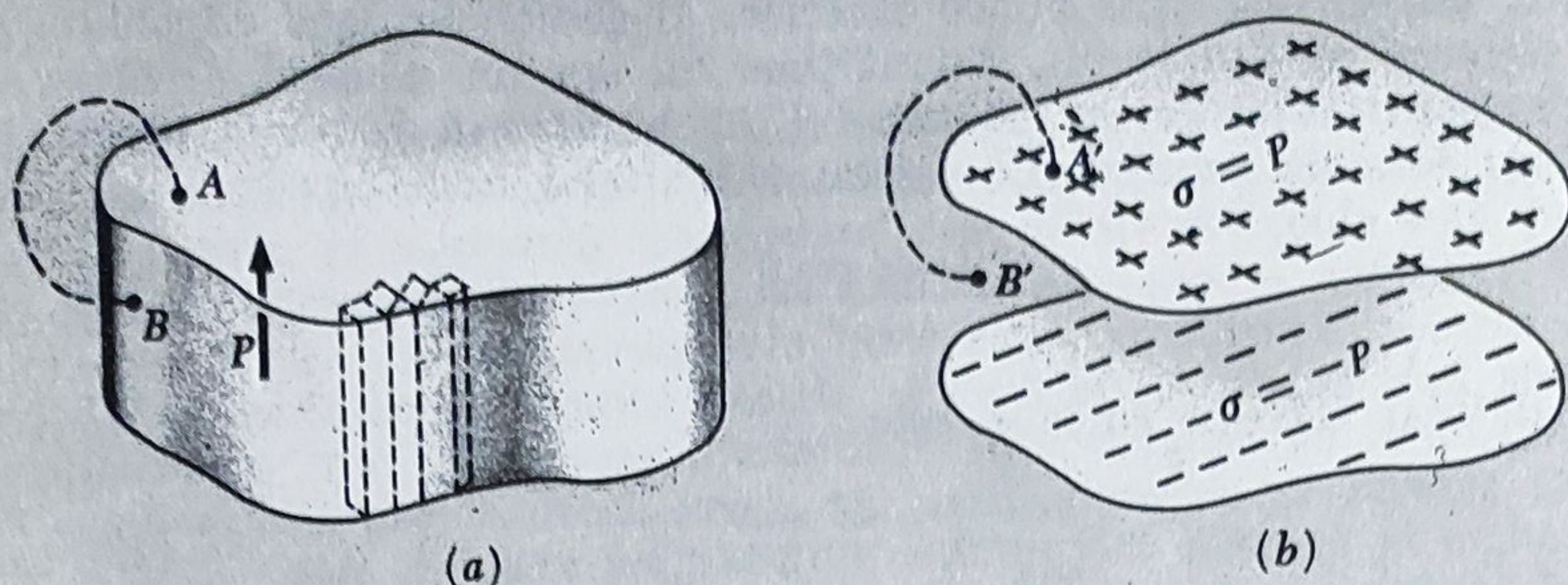


Fig. 9.18. O bucată de material polarizat (a) este echivalentă cu două straturi de sarcină (b), în măsura în care este considerat câmpul din afară.

Sarcinile de pe fața de sus,  $Pda$  pe fiecare capăt de coloană de arie  $da$ , alcătuiesc un strat uniform de densitate de sarcină superficială  $\sigma = P$  coulomb pe unitate de arie. Tragem concluzia că potențialul oriunde în afara unei plăci sau cilindru uniform polarizat este tocmai ceea ce ar rezulta de la două straturi de sarcină superficială localizate unde suprafețele de sus și de jos ale plăcii erau localizate, purtând densitatea de sarcină de suprafață constantă  $\sigma = +P$  și  $\sigma = -P$  respectiv (fig. 9.18, b).

Nu sîntem cu totul gata să spunem ceva despre câmpul în interiorul plăcii. Totuși, cunoaștem potențialul pe toate punctele de pe suprafața plăcii, sus, jos sau pe margini. Oricare două astfel de puncte,  $A$  și  $B$ , pot fi conectate printr-o traiectorie trecînd în întregime prin câmpul extern,

astfel încît integrala curbilinie  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  este în întregime determinată de câmpul exterior. Ea trebuie să fie aceeași ca și integrala de-a lungul curbei  $A'B'$  din figura 9.18, b. Un punct literalmente pe suprafața dielectricului ar putea fi în interiorul razei de acțiune a câmpurilor moleculare intense, „câmpul apropiat” al moleculei pe care l-am neglijat. Să convenim a defini frontiera dielectricului drept o suprafață îndeajuns de îndepărtată de cel mai exterior nucleu atomic — 10 sau 20 de angstromi ar fi suficient — astfel încît în orice punct în afara acestei frontiere, „câmpul apropiat” al atomilor individuali aduc o contribuție neglijabilă la întreaga integrală de la  $A$  la  $B$ .

Cu aceasta în minte, să privim la o placă relativ subțire, lată, de material polarizat, de grosime  $t$  arătată în secțiune transversală în figura 9.19, a. Figura 9.19, b arată, de asemenea în secțiune, straturile echivalente de sarcină. Pentru sistemul de două straturi de sarcină cunoaștem câmpul, desigur, în spațiul atît în afara cît și dintre straturi. Intensitatea câmpului în interior, departe de muchii, trebuie să fie  $\sigma/\epsilon_0$ , cu orientare în jos, și diferența de potențial între punctele  $A'$  și  $B'$  este de aceea  $\sigma t/\epsilon_0$  volt. Aceeași diferență de potențial trebuie să existe între punctele corespunzătoare  $A$  și  $B$  pe placa noastră polarizată, deoarece întreg câmpul exterior este același în cele două sisteme.



Este câmpul interior identic, de asemenea? Cu siguranță *nu*, deoarece placa este plină de nuclee pozitive și electroni, cu câmpuri de milioane de volți pe centimetru cu direcția variind din loc în loc. Dar un lucru este același: integrala de linie a câmpului, efectuată pe *orice* traiectorie internă de la  $A$  la  $B$ , trebuie să fie tocmai  $\varphi_B - \varphi_A$ , care așa cum am văzut este aceeași cu  $\varphi_{B'} - \varphi_{A'}$ , care este egală cu  $\sigma t / \epsilon_0$ , sau  $Pt / \epsilon_0$ . Aceasta trebuie să fie astfel deoarece introducerea sarcinilor atomice, indiferent de distribuția lor, nu poate distruge proprietatea conservativă a câmpului electric, exprimată în afirmația că  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  este independentă de traiectorie, sau  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ .

Știm că în figura 9.19,  $b$  diferența de potențial între straturile superior și inferior este aproape constantă, cu excepția vecinătății muchiilor, deoarece câmpul electric interior este practic uniform. De aceea în regiunea centrală a plăcii noastre polarizate diferența de potențial între suprafețe trebuie să fie în mod asemănător constantă.

În această regiune integrala de linie  $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  luată din *orice* punct  $A$  de pe fața de sus a plăcii la *orice* punct  $B$  de pe fața inferioară, pe *orice* traiectorie, trebuie totdeauna să dea aceeași valoare  $Pt / \epsilon_0$ . Figura 9.20 este o „vedere mărită” a regiunii centrale a plăcii, în care moleculele polarizate au fost făcute să arate ca moleculele de  $\text{H}_2\text{O}$  toate orientate în același fel. Nu am încercat să figurăm câmpurile foarte intense care există între molecule, și în interiorul lor. (La zece angstromi depărtare de o moleculă de apă câmpul ei se ridică la mai multe sute de kilovolt/cm, cum puteți descoperi din tabela 9.1 și ecuația 14.) Trebuie să vă imaginați niște configurații destul de complicate de câmp în vecinătatea fiecărei molecule. Observați că  $\mathbf{E}$  în  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  înseamnă *câmpul electric total* într-un punct dat din spațiu, în interiorul sau în exte-

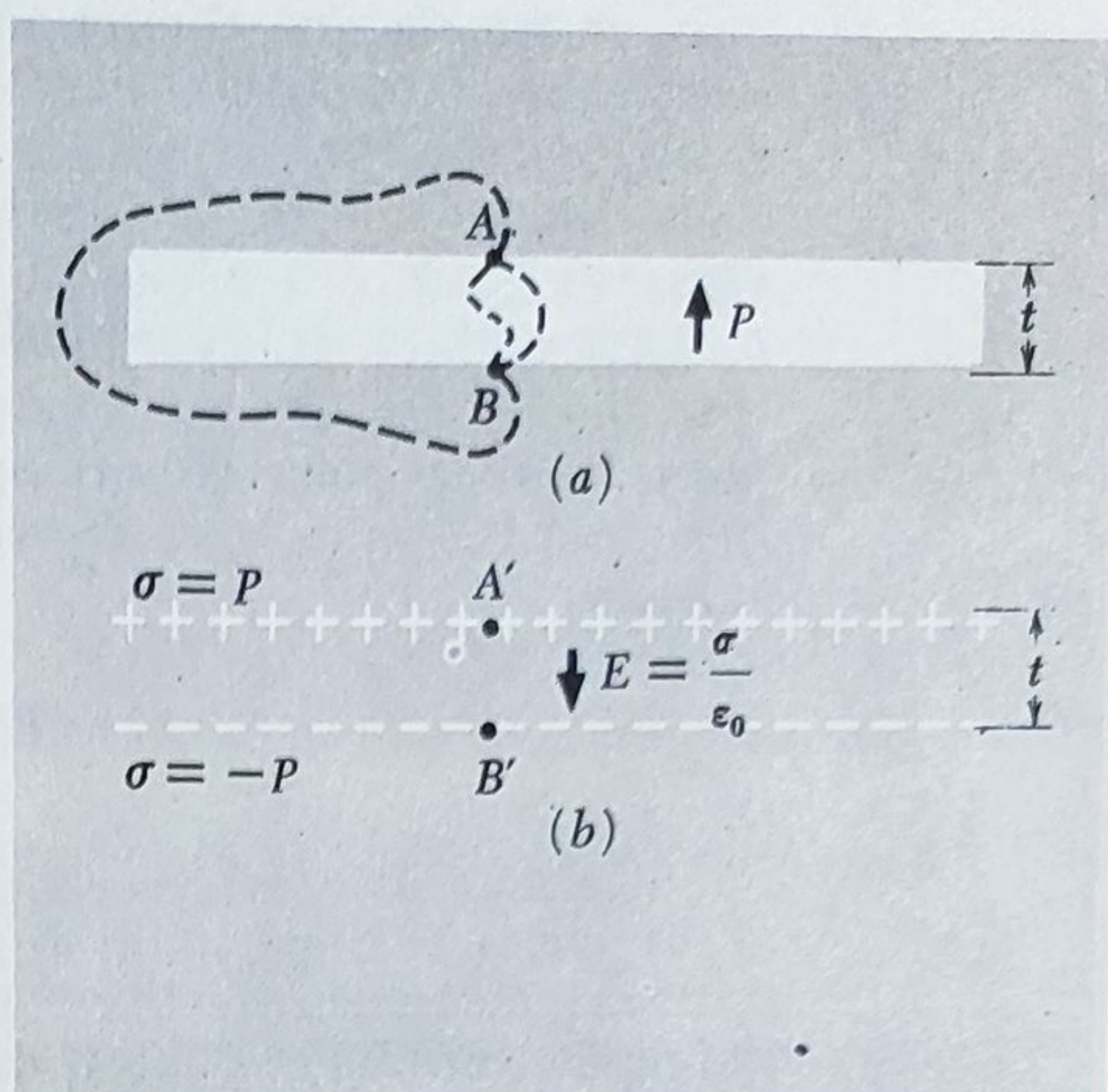


Fig. 9.19. Integrala curbilinie a lui  $\mathbf{E}$  de la  $A$  la  $B$  trebuie să fie aceeași pe toate traiectoriile, interioare sau exterioare, deoarece câmpurile electrice „microscopice” sau „atomice” interioare sînt de asemenea conservative ( $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ ). Straturile echivalente de sarcină (b) au același câmp exterior.

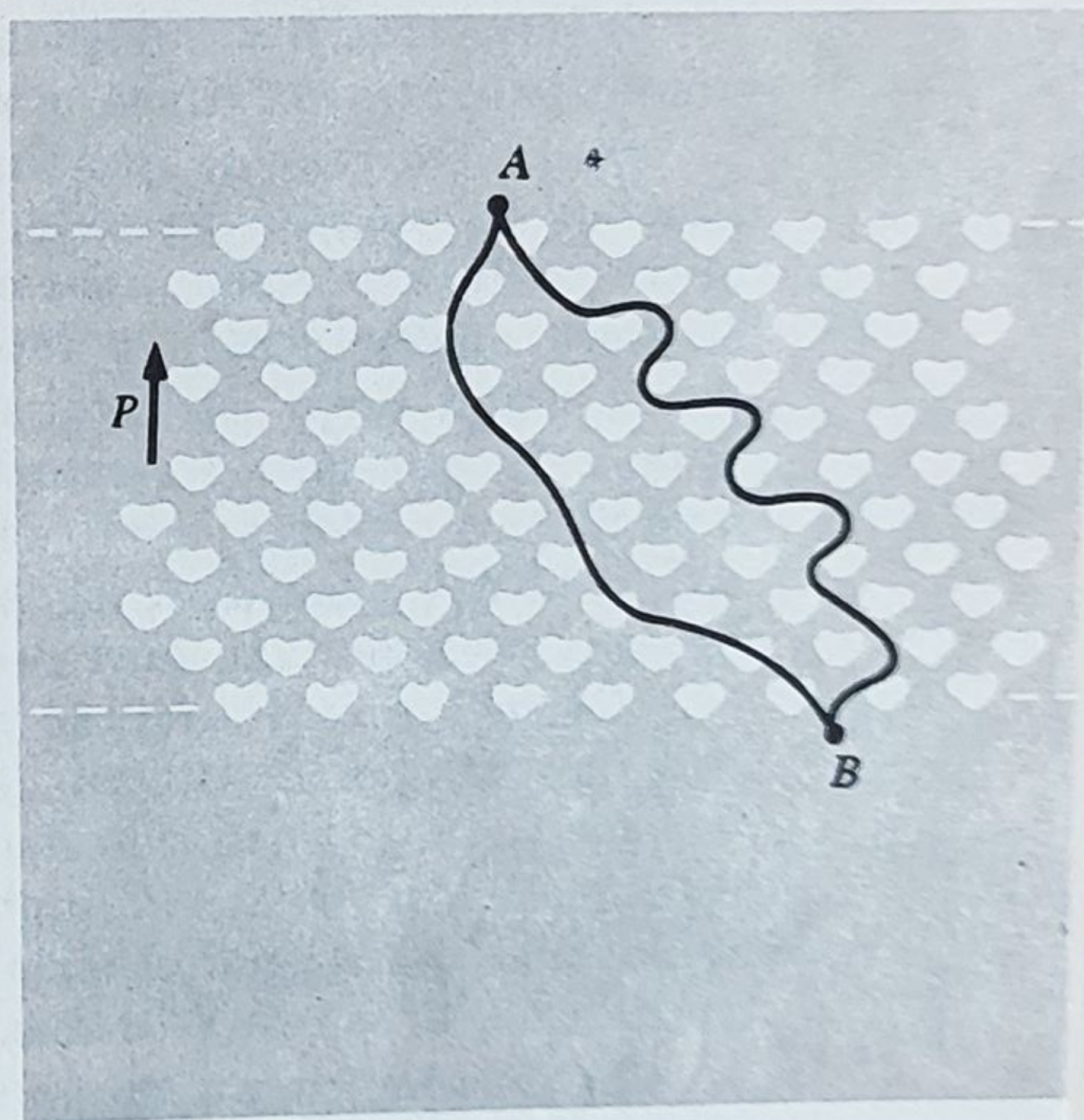


Fig. 9.20. De-a lungul oricărei traiectorii de la  $A$  la  $B$  integrala curbilinie a câmpului microscopic real este aceeași.



rorul unei molecule; el cuprinde aceste câmpuri complicate și intense tocmai menționate. Am obținut concluzia remarcabilă că *orice* traiectorie prin acest amestec de sarcini și câmpuri, indiferent dacă ocolește moleculele sau le pătrunde, trebuie să dea aceeași valoare pentru integrala curbilinie, anume valoarea pe care o găsim în sistemul din figura 9.19, *b* unde câmpul este aproape uniform și are intensitatea  $P/\epsilon_0$ .

Aceasta ne spune că *media spațială* a câmpului electric în interiorul plăcii noastre polarizate trebuie să fie  $-P/\epsilon_0$ . Prin medie spațială a unei intensități  $E$  pe un oarecare volum  $V$ , care am putea-o nota  $\langle E \rangle_V$ , înțelegem aceasta:

$$\langle E \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V E \, dv. \quad (30)$$

Un mod de a evalua câmpul în multe elemente  $dv$  egale și mici în care  $V$  ar putea fi împărțit ar fi de a măsura câmpul de-a lungul fiecărei linii într-un „mănunchi de fibre” de linii paralele strînse. Tocmai am văzut că integrala curbilinie a lui  $E$  de-a lungul oricărei sau tuturor acestor traiectorii este aceeași ca și când am fi într-un câmp electric constant de intensitate  $-P/\epsilon_0$ . Aceasta este justificarea pentru concluzia că  $\langle E \rangle = -P/\epsilon_0$ .

Câmpul mediu este o cantitate macroscopică. Volumul pe care luăm media trebuie să fie destul de larg încît să cuprindă foarte multe molecule, altfel media ar fluctua de la un astfel de volum la cel învecinat. Câmpul mediu  $\langle E \rangle$  definit prin ecuația 30 este de fapt singurul fel de câmp electric *macroscopic* în interiorul unui dielectric despre care putem vorbi. El dă singurul răspuns satisfăcător, în contextul unei descrieri macroscopice a materiei, la întrebarea „Care este câmpul electric în interiorul unui material dielectric?”

Intensitatea  $E$  în integrandul din dreapta, în ecuația 30, îl putem numi câmpul *microscopic*. Dacă punem pe cineva să măsoare valorile de câmp de care avem nevoie pentru integrala curbilinie, el va măsura câmpuri electrice în vid, în prezența, desigur, a sarcinii electrice. Va fi nevoie de instrumente foarte mici, deoarece se poate cere măsurarea câmpului într-un oarecare punct tocmai în interiorul unui capăt al unei anumite molecule. Avem vreun drept să vorbim în acest fel despre integrala curbilinie a lui  $E$  de-a lungul unei traiectorii oarecare care ocolește colțul de sud-est al unei molecule date și apoi tunelează prin molecula vecină? Da. Justificarea este evidența masivă că legile electromagnetismului se aplică la o scară de dimensiuni mult mai mică decît dimensiunile atomice. Putem chiar descrie o experiență care ar servi la măsurarea mediei câmpului electric microscopic de-a lungul unei traiectorii definită bine în limitele dimensiunilor atomice. Tot ceea ce avem de făcut este să trimitem o particulă încărcată energetică, de exemplu o particulă  $\alpha$ , prin material. Din schimbarea totală a impulsului său câmpul electric mediu care a acționat asupra sa, pe întreaga traiectorie, ar putea fi dedus.

Să lucrăm cu un exemplu numeric care implică materiale polarizate. Imaginați-vă un disc de rază 1 cm și 0,3 cm grosime, ca în figura 9.21, *a*. Fie densitatea moleculelor în disc  $3 \times 10^{22}$  molecule/cm<sup>3</sup>. Să presupunem că ele sînt toate molecule polare, fiecare cu un moment dipolar  $6.0 \times 10^{-30}$  coulomb-metru. În fine — și aceasta este o presupunere destul de



forțată — să presupunem că ele sînt toate alinuate în sus, ca moleculele din figura 9.20, cu momentele lor dipolare orientate în aceeași direcție, paralel la axa discului. Vom discuta cîmpul într-un punct  $A$  în interiorul discului, un punct  $B$  în afara discului, și un punct  $C$  la 10 cm depărtare de axă. Polarizarea  $P$  are valoarea

$$P = Np = (3 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}) \times (6,0 \times 10^{-30} \text{ coulomb} \cdot \text{metru}) = (31) \\ = 0,18 \text{ coulomb/metru}^2.$$

Straturile echivalente de sarcină sînt arătate în figura 9.21, c. Dacă aceste straturi se extindeau la infinit, cîmpul în punctul  $A$  între ele ar fi fost simplu  $\sigma/\epsilon_0$ , sau  $2,03 \times 10^{10} \text{ V/m}$ . Aceasta ar fi o aproximație destul de bună în acest caz, deoarece separarea între straturi este relativ mică în comparație cu diametrul lor. În realitate, cîmpul va fi ceva mai mic. Cîmpul în afară, la punctul  $B$ , ar fi zero pentru suprafețe infinite, dar în cazul real va avea o valoare relativ mică, îndreptată spre dreapta. Discontinuitatea în  $E$  la stratul pozitiv va fi exact  $\sigma/\epsilon_0$ , sau  $P/\epsilon_0$ . Dacă avem nevoie să calculăm cîmpurile în  $A$  sau  $B$  precis, putem folosi formula dezvoltată în capitolul 2, pentru cîmpul unui disc de sarcină superficială, superpunînd cîmpurile a două astfel de discuri localizate în mod convenabil. Pentru a estima cîmpul într-un punct depărtat ca  $C$ , tot ce avem nevoie să cunoaștem este momentul dipolar total al obiectului. Văzut din  $C$  nu contează mult cum sînt distribuiți dipolii individuali. Discul se comportă ca un singur dipol de intensitate  $p_{tot} = \text{Volumul} \cdot P = 0,942 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot 0,18 \text{ coulomb/metru}^2 = 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot \text{m}$ . Cîmpul pe axa unui astfel de dipol, la 10 cm depărtare, este

$$E_C = \frac{2p_{tot}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3,4 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot \text{m}}{(0,1)^3} = \\ = 3,06 \cdot 10^6 \text{ V/m.} \quad (32)$$

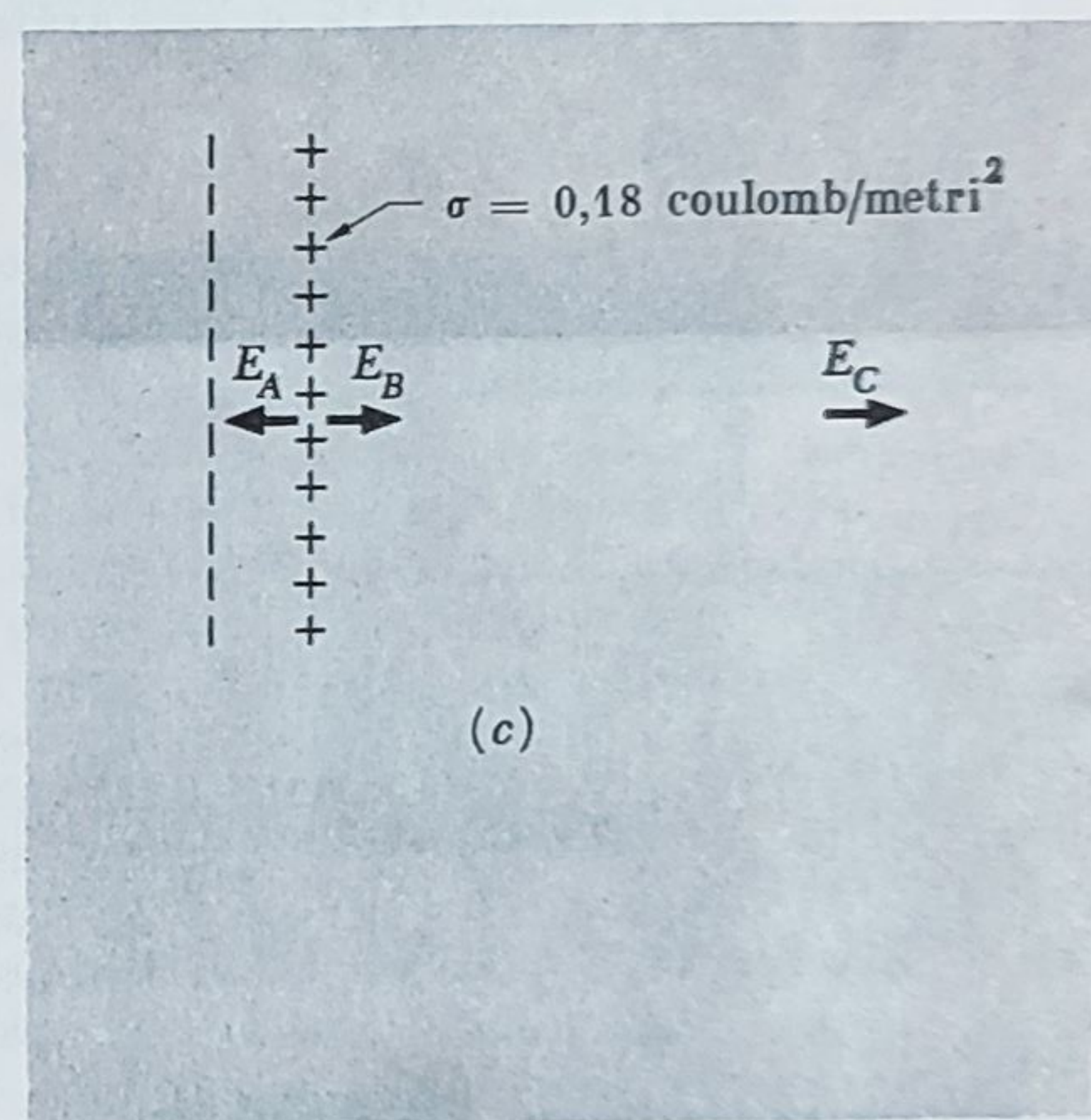
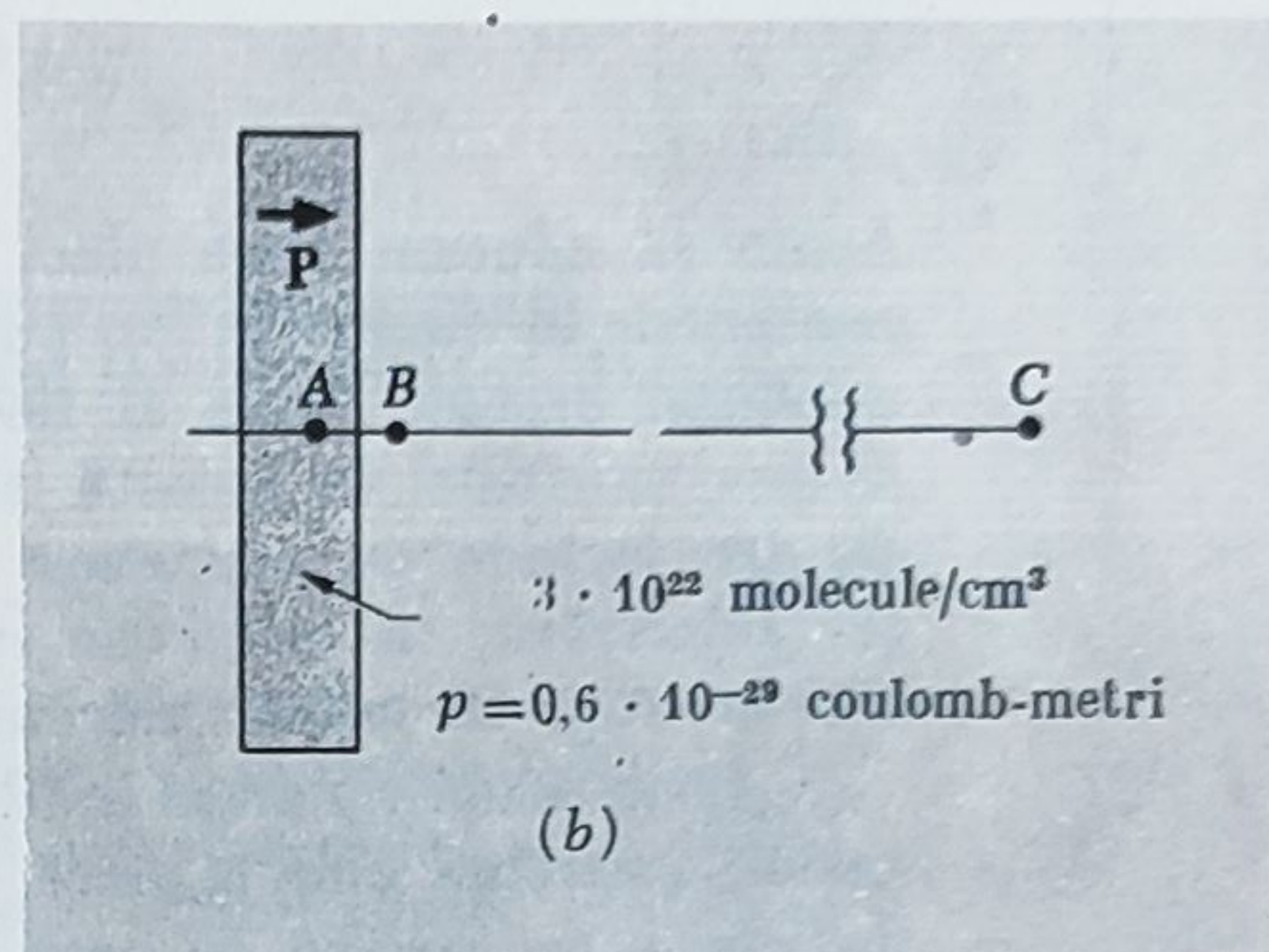
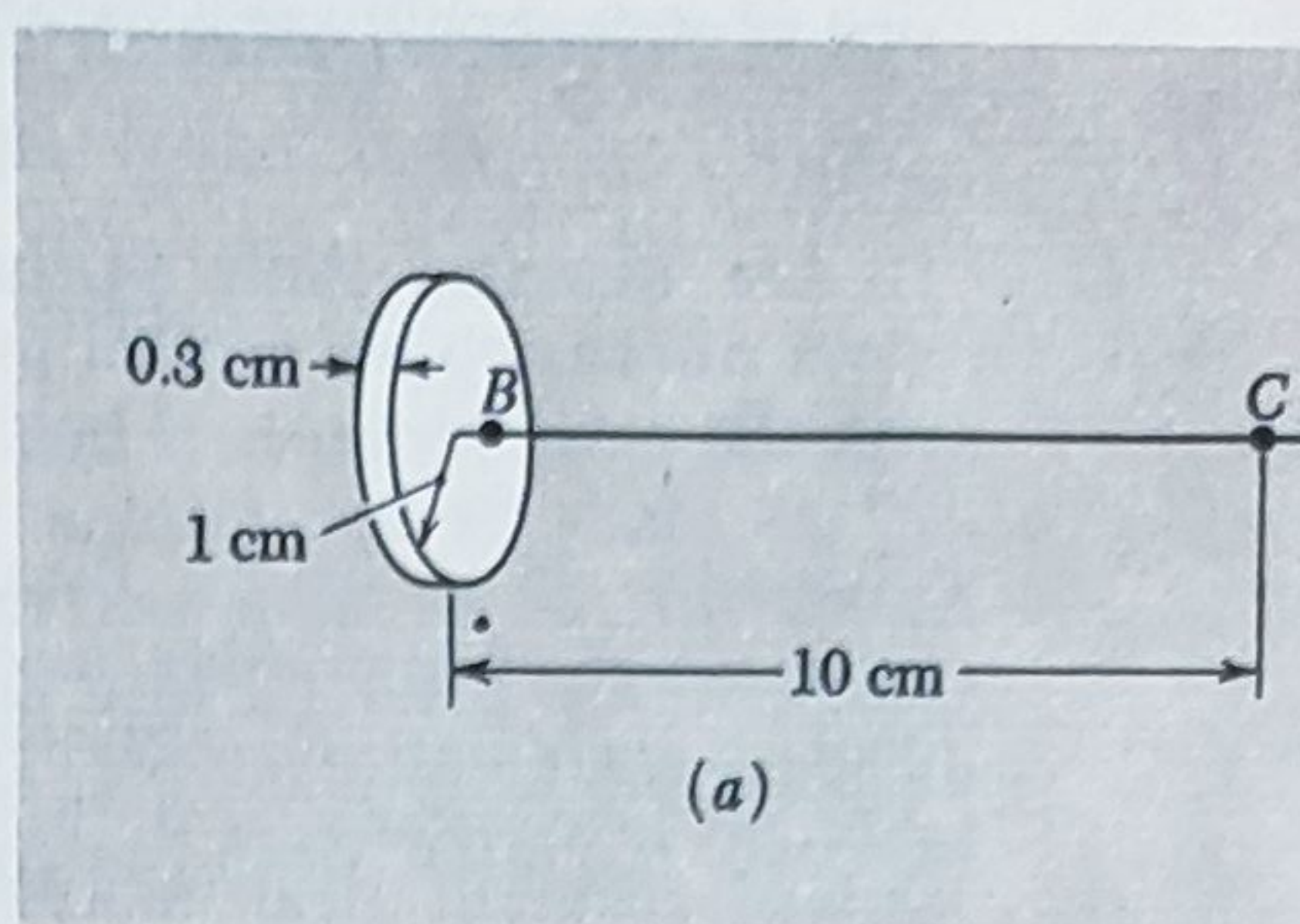


Fig. 9.21. (a) Un disc alcătuit din molecule polare cu momentele dipolare orientate toate în aceeași direcție paralel la axă. (b) Secțiunea transversală a discului. (c) Secțiunea transversală a discurilor echivalente de sarcină.

88,83,43  
285,257, 246



## 9.9. CONDENSATORUL UMPLUT CU DIELECTRIC

Am discutat mult în jurul condensatorului cu dielectric, dar acum putem aduce asupra acestei probleme o oarecare înțelegere a însuși dielectricului. Să considerăm mai întâi cele două plăci conductoare în vid cu sarcina  $-Q$  pe placa de sus, sarcina  $+Q$  pe placa de jos. Figura 9.22, *a* este chiar figura 9.1, *a*, cu care am început acest capitol, în secțiune transversală. Câmpul între plăci  $E_0$  este egal cu  $Q/\epsilon_0 A$ , și este orientat în sus. Diferența de potențial între plăci,  $\varphi_{12}$ , este egală cu  $Qt/\epsilon_0 A$ . Capacitanța condensatorului gol,  $C_0$ , este dată de formula de acum familiară

$$C_0 = \frac{Q}{\varphi_{12}} = \frac{\epsilon_0 A}{t}. \quad (33)$$

Acum să aducem între plăci un dielectric. Câmpul va polariza atomii sau moleculele în dielectric. Nu putem, în acest stadiu, să prezicem mărimea momentului dipolar indus al fiecărei molecule deoarece câmpul care acționează asupra moleculei în această situație nu este tocmai intensitatea câmpului  $E_0$  dar include de asemenea o contribuție de la celelalte molecule. Direcția polarizării, în orice caz, va fi paralelă cu  $E_0$ , pentru un dielectric care este izotrop. Să notăm mărimea densității de polarizare, oricare ar fi, prin  $P$ .

Avem acum sistemul arătat în figura 9.22, *c*, constând din două straturi reale de sarcină plus o placă de material polarizat. *Superpoziția* celor două distribuții de sarcină pe care le-am analizat deja, aceea a figurii 9.22, *a*, și aceea a figurii 9.19, *a*, este arătată în figura 9.22, *b*. Câmpul electric va fi suma

câmpurilor acelor două distribuții, câmpul  $E_0$  a două straturi reale de densitate de sarcină superficială  $\sigma = Q/A$ , plus intensitatea câmpului  $E'$  al celor două straturi de sarcină de densitate  $\sigma' = P$ , cu care placa polarizată este echivalentă. Observați că  $E'$  este orientat *invers* față de  $E_0$  deoarece  $P$  este în aceeași direcție ca  $E_0$ ; stratul de sarcină echivalentă pozitivă se află lângă placa încărcată negativ. Motivul pentru aceasta, desigur, este că sarcina negativă de pe placă a polarizat atomii dielectricului atrăgând părțile lor pozitive și respingând părțile lor negative, trăgând astfel sarcina pozitivă mai aproape de acea placă.

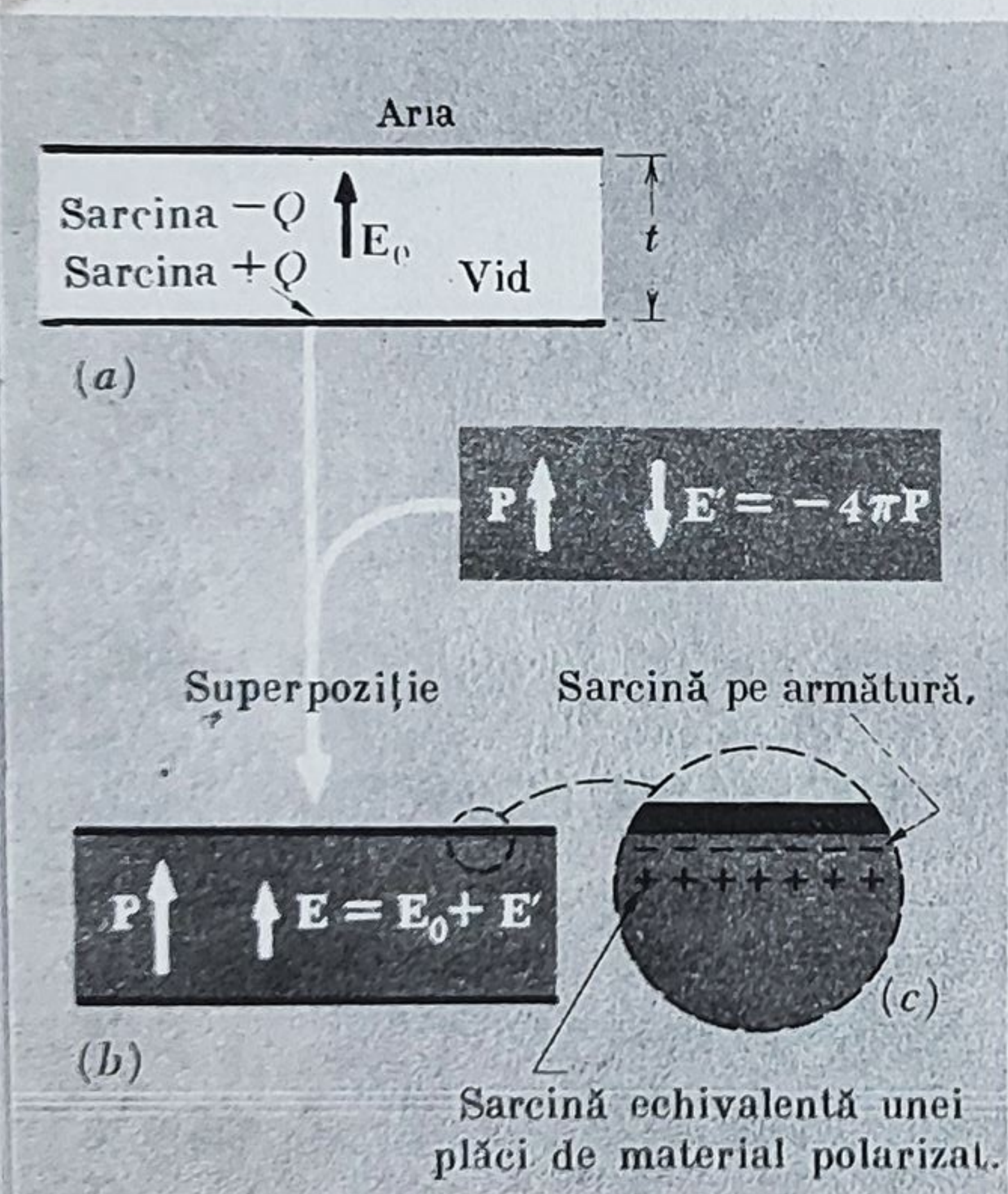


Fig. 9.22. Un condensator cu dielectric între armături (c) poate fi analizat ca superpoziție a unui condensator încărcat-vid (a) și a unei plăci de material polarizat (b).



În interiorul condensatorului, atunci, intensitatea câmpului electric  $\mathbf{E}$  este

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' = \mathbf{E}_0 - \mathbf{P}/\epsilon_0 \quad (34)$$

Mărimea diferenței de potențial dintre plăci a devenit

$$\varphi_{12} = (E_0 - P/\epsilon_0)t \quad (35)$$

Sarcina pe condensator este totuși aceeași. Dacă plăcile ar fi conectate printr-o sîrmă, sarcina  $Q$  s-ar scurge, dielectricul relaxîndu-se între timp înapoi la starea sa nepolarizată. Deoarece diferența de potențial a fost redusă prin factorul  $(E_0 - P/\epsilon_0)/E_0$ , în comparație cu condensatorul de vid la aceeași sarcină, capacitatea,  $C = Q/\varphi_{12}$ , a crescut prin inversul acelui factor:

$$C = C_0 \frac{E_0}{E_0 - P/\epsilon_0}. \quad (36)$$

Este mai bine să exprimăm aceasta prin  $\mathbf{E}$ , intensitatea câmpului electric (cîmpul microscopic, sau *mediu*) care există acum în condensator. Deoarece  $E_0 = E + P/\epsilon_0$ , din ecuația 34, avem:

$$C = C_0 \frac{E + P/\epsilon_0}{E} = C_0 \left( 1 + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{P}{E} \right). \quad (37)$$

Raportul lui  $P$  și  $E$  este o proprietate intrinsecă a materialului dielectric. Acest raport este numit *susceptibilitatea electrică* a materialului, și simbolul  $\chi_e$  este folosit în mod obișnuit. Raportul este adimensional. Întreaga cantitate în paranteze în ecuația 37 este numită *constanta dielectrică* a materialului notată prin  $k$ .

$$P = \epsilon_0 \chi_e E, \quad k = 1 + \chi_e. \quad (38)$$

Acestea sînt doar definiții: fizica este în ecuațiile 34 și 37.

Strict vorbind, umplerea condensatorului de vid cu material dielectric crește capacitatea tocmai prin factorul  $\chi_e$  doar dacă umplem tot spațiul din jur ca și spațiul între plăci. În exemplul de mai sus, am presupus tacit că separarea dintre plăci  $t$  este atît de mică în comparație cu lărgimea plăcilor că „efectele de margine“, incluzînd mica cantitate de sarcină care este pe exteriorul plăcilor în vecinătatea marginii (vezi fig. 3.11, *b*) sînt neglijabile. Se poate face o afirmație cu totul generală despre un sistem de conductori de orice formă sau dispunere care este în întregime scufundat într-un dielectric omogen și izotrop — de exemplu într-o cuvă mare de ulei. Cu orice sarcini,  $Q_1, Q_2$  etc., pe diverșii conductori, intensitatea câmpului microscopic  $\mathbf{E}_{med}$  oriunde în mediul dielectric este exact  $1/\chi_e$  ori cîmpul  $\mathbf{E}_{vid}$  care ar exista acolo cu aceleași sarcini pe aceleași conductori în vid (fig. 9.23). Desigur toate diferențele de potențial sînt reduse prin același factor,  $1/k$ .

Chestiunile noastre neterminate privesc două probleme de o natură cu totul diferită:

(i) Dorim să înțelegem comportarea oricărui sistem de izolatori și conductori, date fiind constantele materialelor implicate. Adică, vrem să fim în stare să calculăm cîmpurile electrice în exteriorul dielectricilor și intensitatea cîmpului microscopic  $\mathbf{E}$  în interior, oricare ar fi condițiile de frontieră impuse prin potențialele și sarcinile pe conductori.



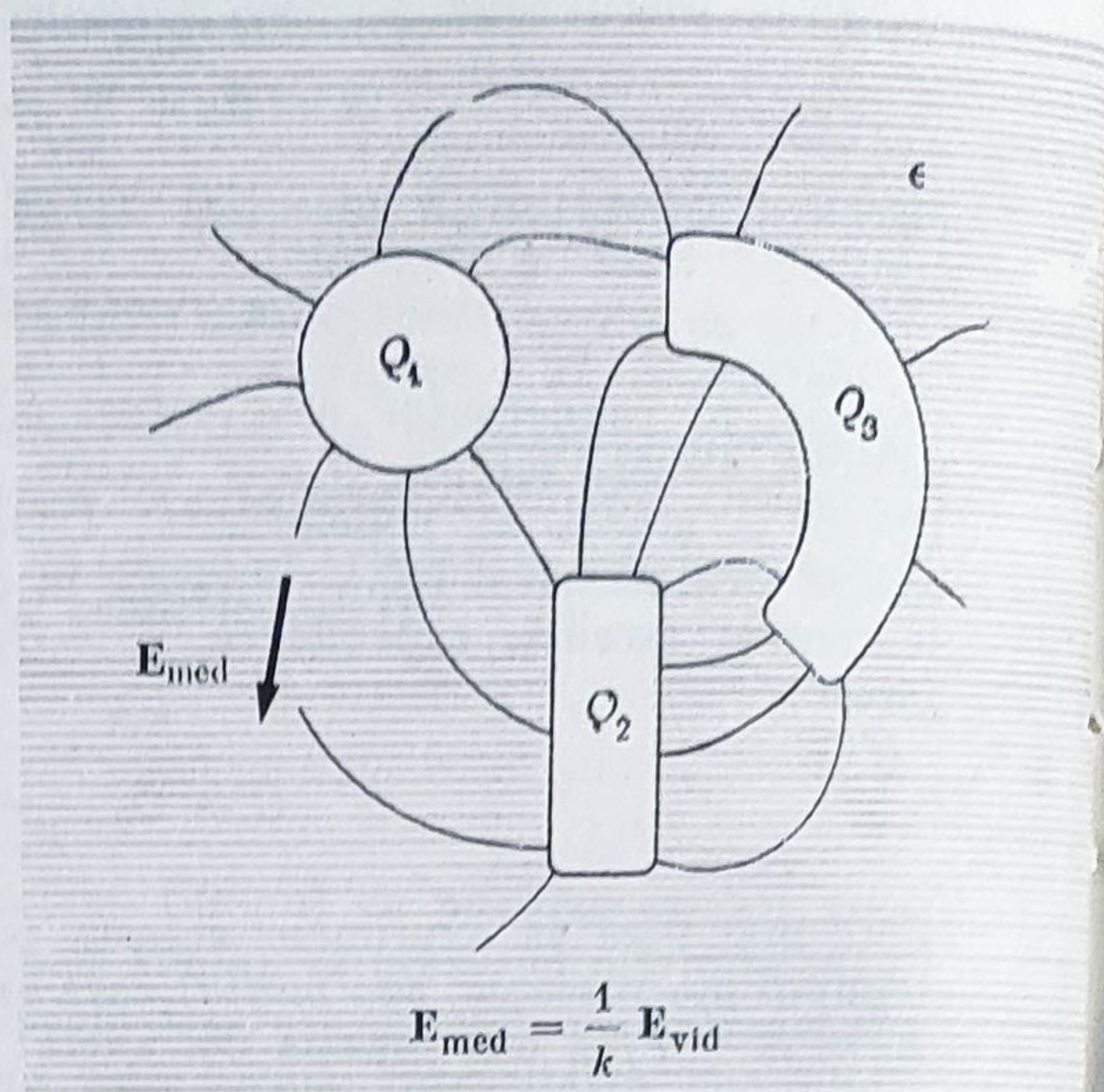
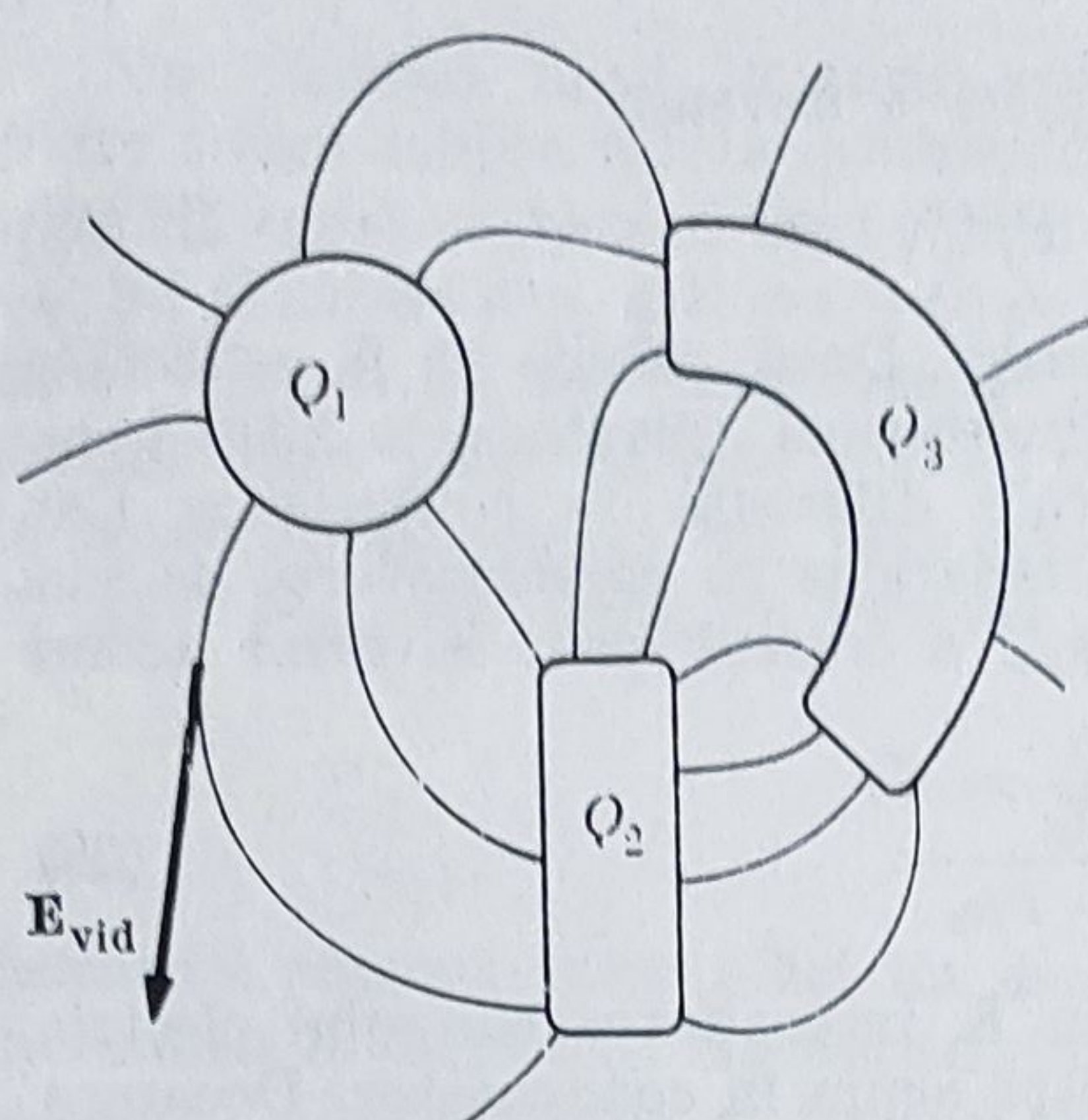


Fig. 9.23. Pentru aceleași sarcini pe conductori, prezența dielectricului reduce toate intensitățile câmpului electric (și de aici toate diferențele de potențial) prin factorul  $1/\epsilon$ . Sarcinile  $Q_1$ ,  $Q_2$  și  $Q_3$  sînt sarcinile care ar curge în realitate afară din conductori dacă am descărca sistemul.

(ii) Relația cantitativă între polarizabilitatea globală a materialului exprimată prin susceptibilitatea  $\chi_e$ , și polarizabilitatea atomilor și moleculelor din care este compus dielectricul, rămîne destul de misterioasă. Pentru a o descoperi vom avea de decis ce câmp simte de fapt un atom polarizabil cînd câmpul mediu spațial, sau macroscopic, din vecinătatea sa, este cunoscut. Ceea ce simte un atom fixat este nu câmpul mediu spațial, ci un alt câmp pe care îl putem numi câmpul local. Este câmpul local,  $E_{loc}$ , care induce de fapt momentul dipolar al atomului. Această problemă cere o altă privire „microscopică” la interiorul dielectricului.

Ne întoarcem mai întîi către problema (i).

#### 9.10. CÎMPUL UNEI SFERE POLARIZATE

Sfera solidă în figura 9.24, *a* este presupusă uniform polarizată, ca și cînd ar fi fost cioplită din substanța plăcii polarizate în figura 9.18, *a*. Cum trebuie să fie câmpul electric, atît în interiorul cît și în exteriorul sferei? Aceasta este o problemă instructivă, și rezultatele vor fi folositoare în diverse moduri.  $P$  va desemna ca de obicei densitatea de polarizare, constantă în mărime și direcție peste tot volumul sferei. Materialul polarizat ar putea fi împărțit, ca placa din figura 9.18, *a*, în coloane paralele la  $P$ , și fiecare din acestea înlocuite printr-o sarcină de mărime  $(P \times \text{secțiunea}$



transversală a coloanei), sus și jos. Astfel câmpul pe care îl căutăm este acela al unei distribuții de sarcină superficială răspândită pe o sferă cu o densitate  $\sigma = P \cos \theta$ . Factorul  $\cos \theta$  intervine, cum ar trebui să fie evident din figură, deoarece o coloană de secțiune transversală  $da$  delimitează pe sferă o bucată de suprafață de arie  $da/\cos \theta$ . Figura 9.24, *b* este o secțiune transversală prin această pătură de sarcină superficială echivalentă în care densitatea sarcinii a fost indicată prin grosimea variabilă a semicercului negru de sus (densitate de sarcină pozitivă) și semicercul deschis de jos (densitate de sarcină negativă).

Dacă încă nu ați înțeles, această figură vă poate sugera că gândim despre polarizarea  $\mathbf{P}$  ca provenind din mica deplasare în sus a unei bile umplută în mod uniform cu sarcină pozitivă de densitate de volum  $\rho$ , față de o bilă de densitate de sarcină negativă  $-\rho$ . Aceasta ar lăsa sarcină pozitivă necompensată pe fața de sus, și sarcină negativă pe fața de jos, variind în mărime întocmai ca  $\cos \theta$  pe întreaga frontieră. În interior, unde densitățile de sarcină pozitivă și negativă încă se suprapun, ele se anulează una pe alta. Cu această imagine, vedem un mod foarte ușor de a calcula câmpul în exteriorul păturii de sarcină superficială. Orice distribuție sferică de sarcină, după cum știm, are un câmp extern același ca și când întreaga sarcină ar fi fost concentrată în centru. Astfel, superpoziția a două sfere de sarcină totală  $+Q$  și  $-Q$  respectiv, cu centrele separate printr-o mică deplasare  $s$ , vor produce un câmp exterior identic cu acela a două sarcini punctuale  $Q$  și  $-Q$ ,  $s$  cu depărtare. Ceea ce este tocmai un dipol cu moment dipolar  $p_0 = Qs$ .

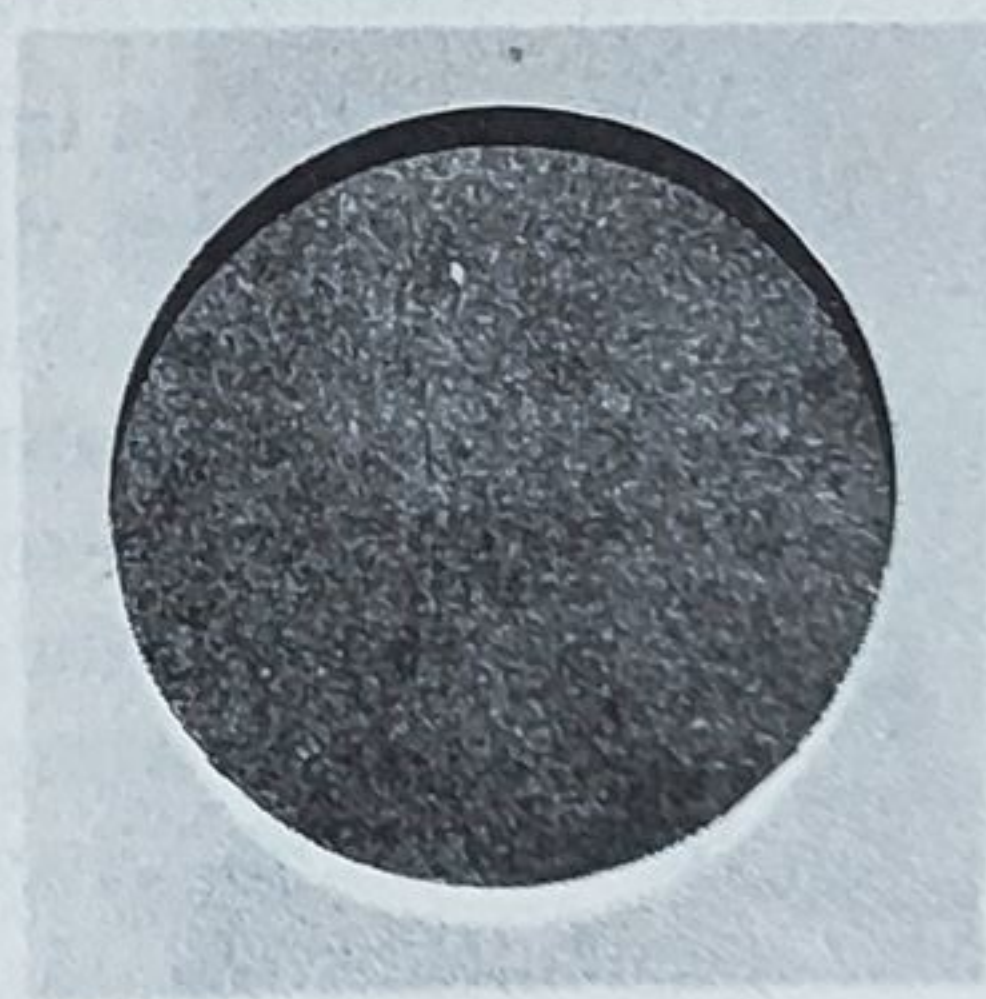
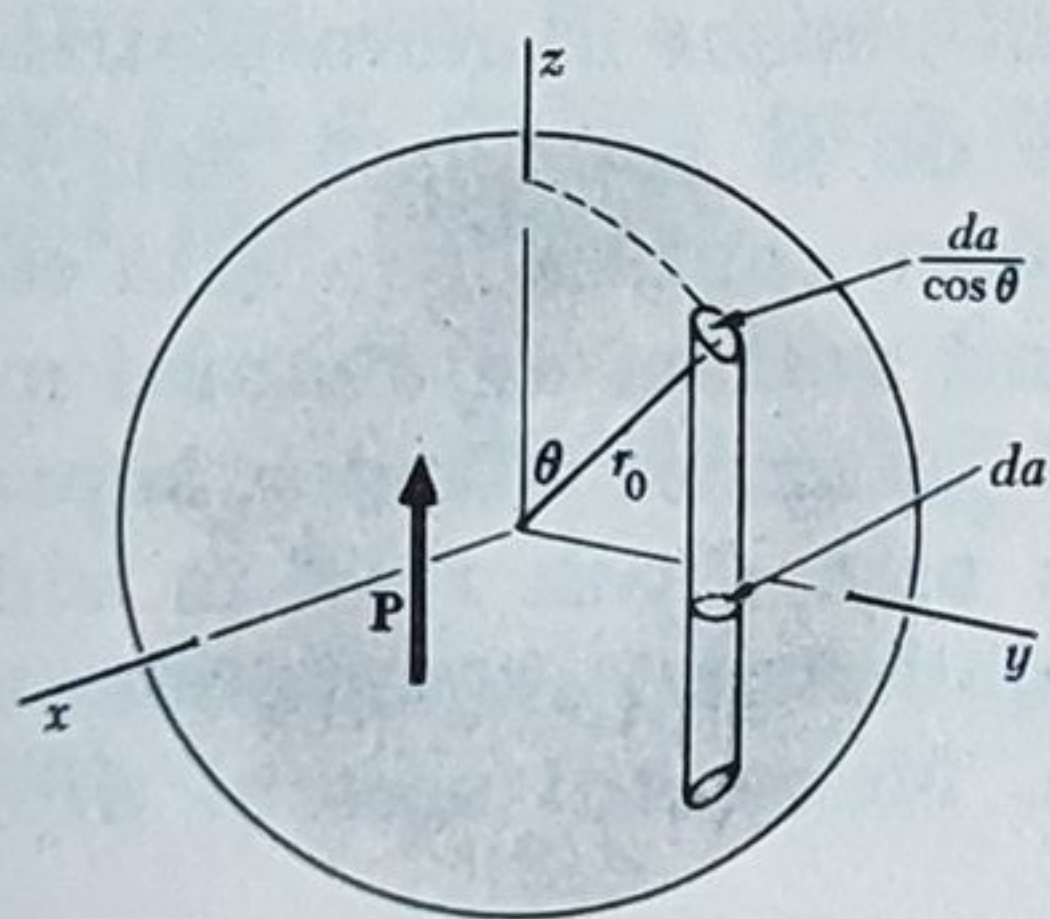


Fig. 9.24 (a) Împărțiți sfera polarizată în bare polarizate și înlocuiți fiecare bară prin parcele de sarcină pe suprafața aceleiași sfere. (b) O sferă de densitate de sarcină de volum pozitivă și o sferă de densitate de sarcină de volum negativă, ușor deplasate, sînt echivalente unei distribuții de sarcină pe suprafața sferică.



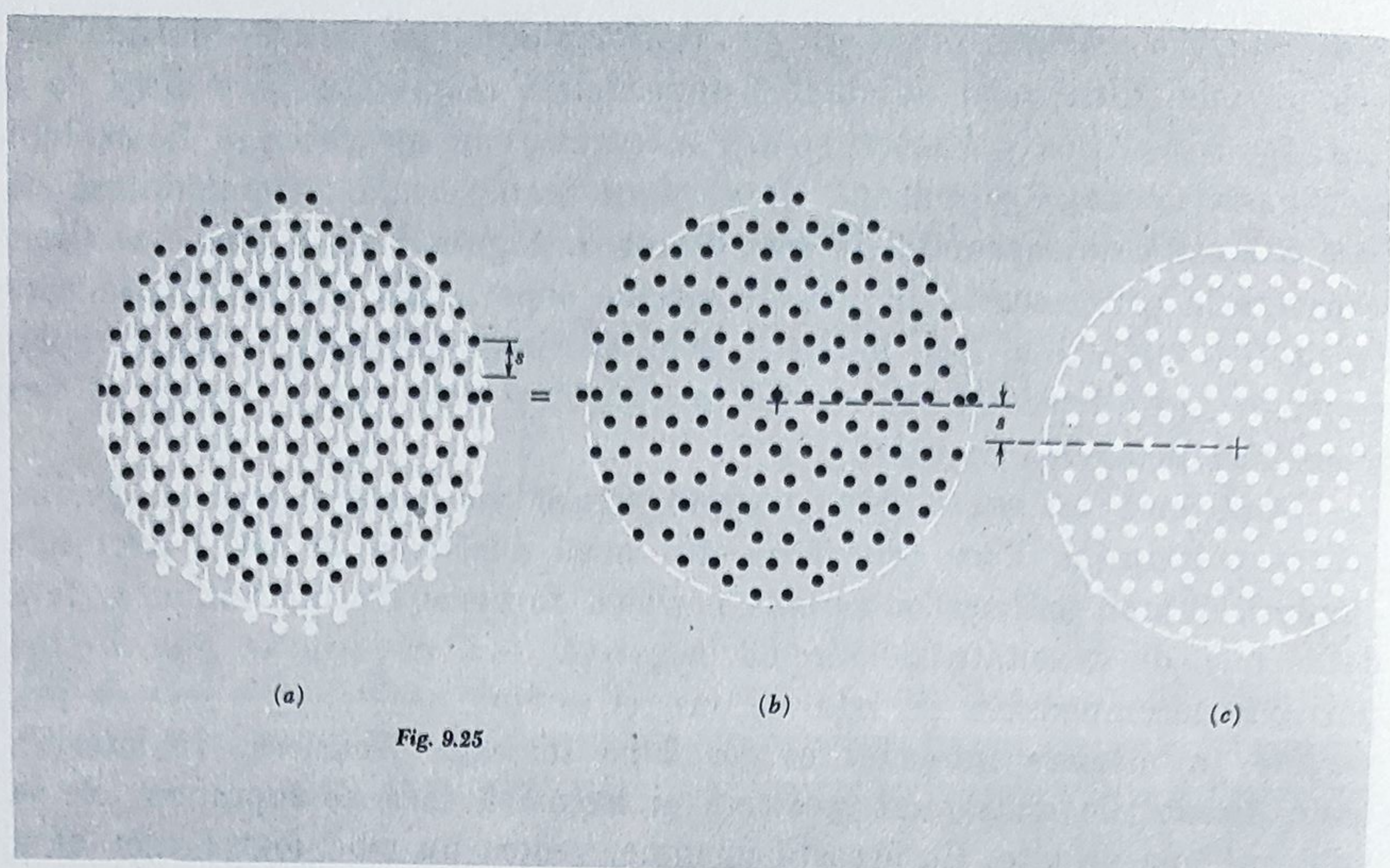


Fig. 9.25. O sferă de dipoli moleculari aliniați în sus (a) este echivalentă cu sfere suprapuse ușor deplasate, de sarcină pozitivă (b), și negativă (c).

O descriere microscopică a substanței polarizate ne conduce la aceeași concluzie. În figura 9.25, *a* dipolii moleculari răspunzători în realitate pentru polarizarea  $P$  au fost reprezentați schematic drept alcătuiți individual dintr-o pereche de sarcini  $q$  și  $-q$ ,  $s$  cm depărtare, pentru a da un moment dipolar  $p = qs$ . Cu  $N$  din acestea pe centimetru cub,  $P = Np = Nqs$  și numărul total de astfel de dipoli din sferă este  $(4\pi/3)r_0^3 N$ . Sarcinile pozitive, considerate separat (fig. 9.25, *b*), sînt distribuite într-o sferă cu un conținut total de sarcină  $Q = (4\pi/3)r_0^3 Nq$ , iar sarcinile negative ocupă o sferă asemănătoare cu centrul deplasat (fig. 9.25, *c*). Este limpede că fiecare dintre aceste distribuții de sarcină poate fi înlocuită printr-o sarcină punctiformă în centrul ei, dacă ne interesăm de câmpul binișor în afara distribuției. „Binișor în afară” înseamnă destul de departe de la suprafață astfel încît caracterul granular al distribuției de sarcină să nu conteze, și acesta este un aspect pe care îl avem totdeauna de neglijat cînd vorbim de câmpuri macroscopice. Astfel încît pentru scopurile prezente imaginea sferelor suprapuse de densitate de sarcină uniformă și descrierea prin dipoli reali în vid sînt echivalente\* și arată că câmpul în exteriorul distribuției este identic cu acela al unui singur dipol localizat în centru. Momentul acestui dipol  $p_0$  este simplu polarizarea totală a sferei:

$$p_0 = Qs = \frac{4\pi}{3} r_0^3 Nqs = \frac{4\pi}{3} r_0^3 P. \quad (39)$$

\* Aceasta s-ar fi putut să fie îndeajuns de evident, dar am lucrat detaliile în acest caz pentru a evita orice bănuială că imaginea „bilei de sarcină continuă”, care este atît de diferită de ceea ce știm că este interiorul unei substanțe reale, ne-ar putea induce în eroare.



Cantitățile  $Q$  și  $s$  nu au, în mod separat, nici o semnificație și pot fi acum scoase din discuție.

Cîmpul exterior al sferei polarizate este acela al unui dipol central  $p_0$ , nu numai la mare distanță de la sferă; el este un cîmp de dipol pur chiar pînă la suprafață, macroscopic vorbind. Tot ceea ce am avut de făcut pentru a construi figura 9.26, o reprezentare a liniilor de cîmp externe, a fost să acoperim o arie circulară din figura 9.5.

Cîmpul interior este o chestiune diferită. Să considerăm potențialul electric,  $\varphi(x, y, z)$ . Cunoaștem potențialul în toate punctele frontierei sferice, deoarece cunoaștem cîmpul exterior. Este chiar potențialul dipolar,  $p_0 \cos \theta / 4\pi\epsilon_0 r^2$ , care pe frontiera sferică de rază  $r$  devine

$$\varphi = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r_0^2} = \frac{Pr_0 \cos \theta}{3\epsilon_0}. \quad (40)$$

Deoarece  $r_0 \cos \theta = z$ , vedem că potențialul unui punct de pe sferă depinde doar de coordonata sa  $z$ :

$$\varphi = \frac{Pz}{3\epsilon_0}. \quad (41)$$

Problema găsirii cîmpului intern s-a redus la aceasta: ecuația 41 dă potențialul la fiecare punct pe frontiera regiunii, în interiorul căreia  $\varphi$  trebuie să satisfacă ecuația lui Laplace. În conformitate cu Teorema de Unicitate pe care am demonstrat-o în capitolul 3, aceasta este suficient pentru a determina  $\varphi$  peste tot în interior. Dacă putem găsi o soluție, ea trebuie să fie soluția. Acum funcția  $Cz$ , unde  $C$  este orice constantă, satisface ecuația lui Laplace, astfel încît ec. 41 ne-a dat de fapt soluția pentru potențialul în interiorul sferei. Acesta este potențialul unui cîmp electric uniform în direcția  $-z$ :

$$E_z = -\frac{\partial \varphi_{in}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{Pz}{3\epsilon_0} \right) = -\frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (42)$$

Cum direcția lui  $\mathbf{P}$  a fost singurul lucru care distinge axa  $z$ , putem scrie rezultatul nostru în forma mai generală

$$\mathbf{E}_{in} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}. \quad (43)$$

Acesta este cîmpul macroscopic în materialul polarizat.

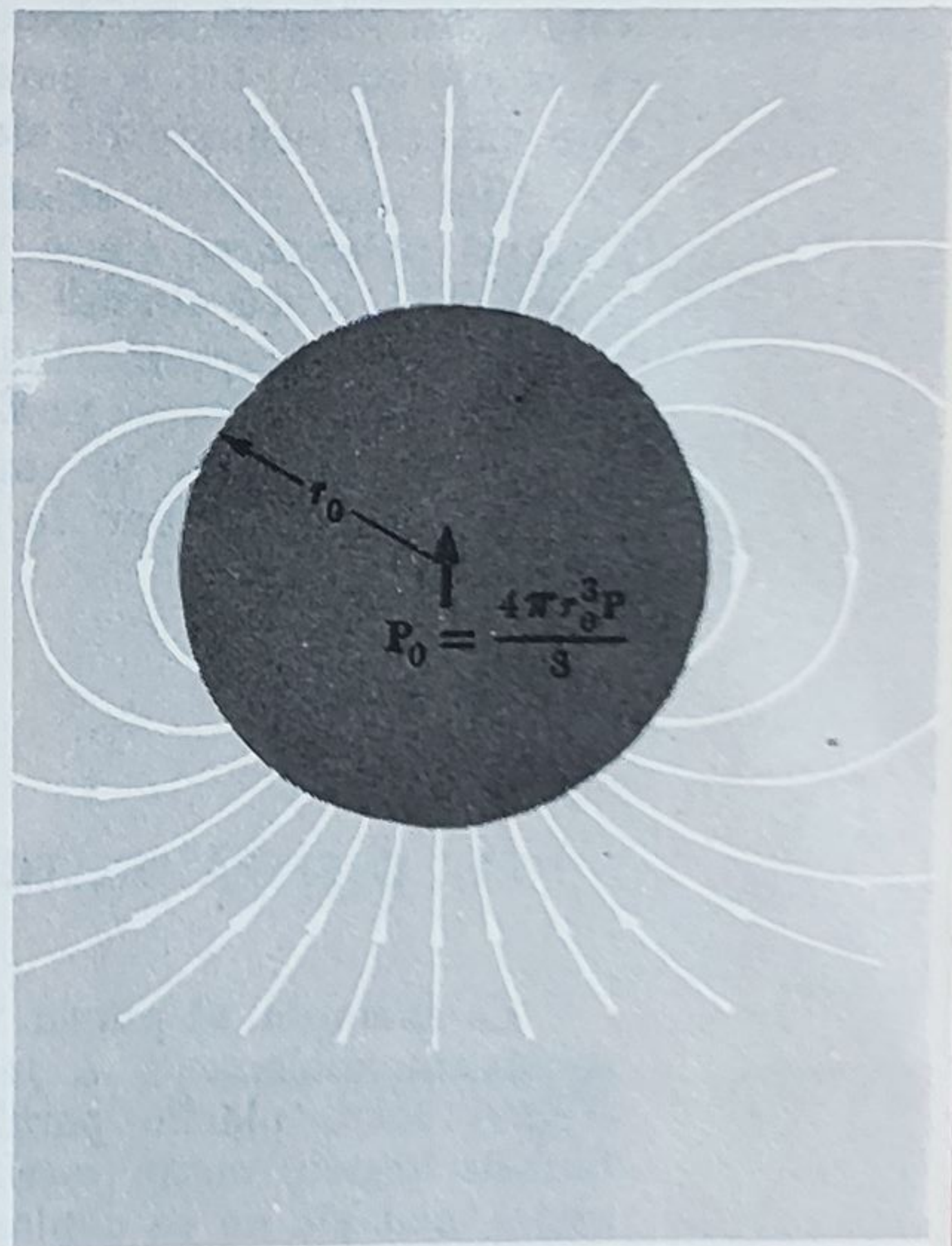


Fig. 9.26. Cîmpul în exteriorul unei sfere polarizate uniform este identic cu acela al unui dipol localizat în centrul sferei.

87.83.43  
285.257.2



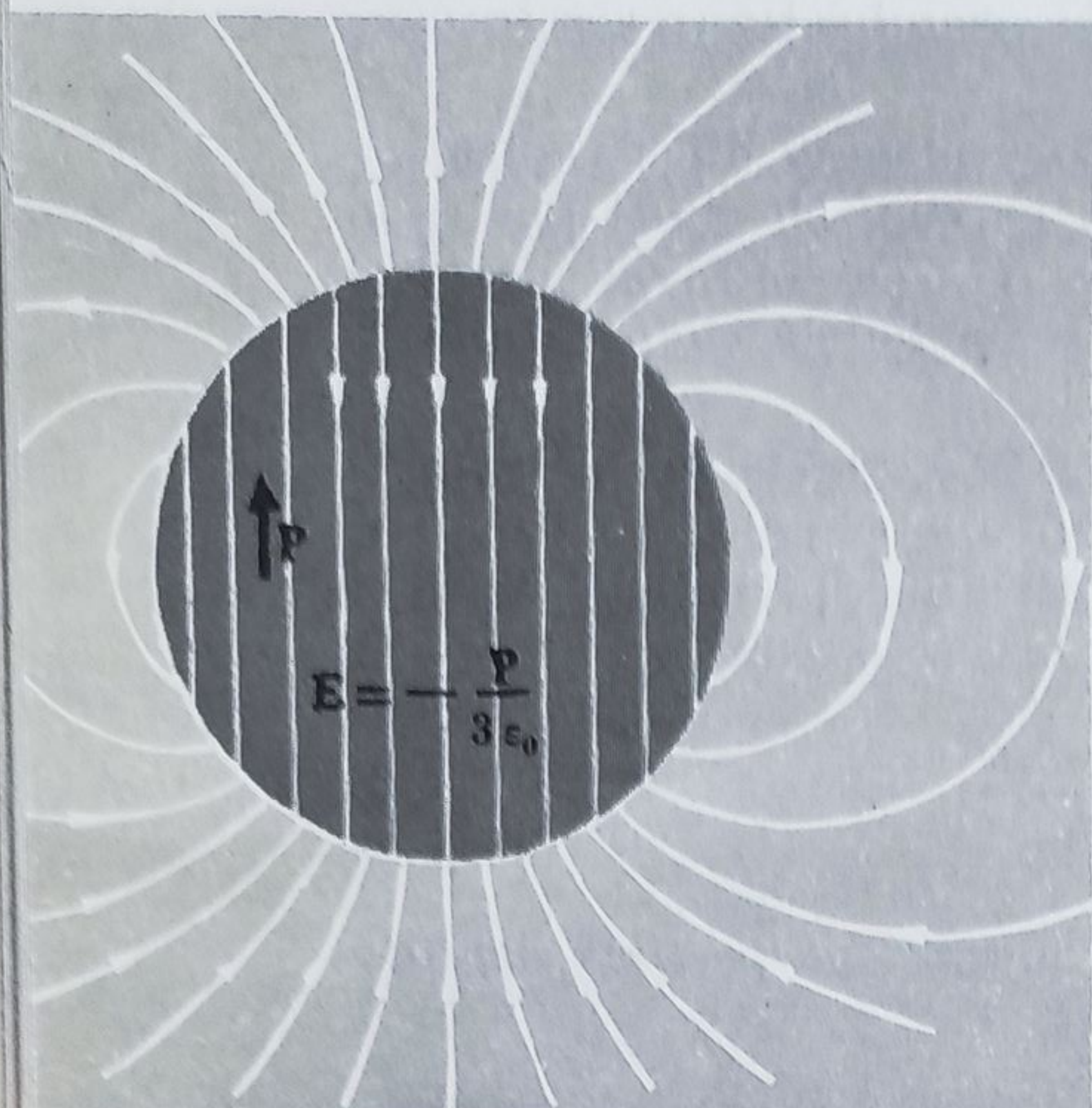


Fig. 9.27. Câmpul sferei uniform polarizate, atât în interior cât și în exterior.

Figura 9.27 arată atât câmpul interior cât și câmpul exterior. La polul de sus al sferei, intensitatea câmpului extern exterior orientat în sus este, din ecuația 14 pentru câmpul unui dipol

$$E = \frac{2p_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{2(4\pi r_0^3 P/3)}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} = \frac{2P}{3\epsilon_0} \text{ (în afară)} \quad (44)$$

care este exact de două ori mărimea câmpului intern orientat în jos.

Acest exemplu ilustrează regulile generale pentru comportarea componentelor câmpului la suprafața unui mediu polarizat.  $E$  este discontinuu la frontiera mediului polarizat exact cum ar fi la suprafața în vid care ar purta o densitate de sarcină superficială  $\sigma = P_n$ . Simbolul  $P_n$  desemnează componenta lui  $P$  normală la suprafață spre exterior. Urmează că componenta normală a lui  $E$  trebuie să se schimbe brusc printr-o cantitate  $P_n/\epsilon_0$  în timp ce componenta lui  $E$  paralelă la frontieră rămâne continuă, adică, are aceeași valoare de ambele părți ale frontierei. Într-adevăr, la polul nord al sferei noastre schimbarea totală în  $E_z$  este  $2P/3\epsilon_0 - (-P/3\epsilon_0)$  sau  $P/\epsilon_0$ . Prin referire la ecuația 14 pentru câmpul de dipol, puteți verifica că componenta lui  $E$  paralelă la suprafață este continuă de la interior spre exterior oriunde pe sferă.

Nici una dintre aceste concluzii nu depinde de felul în care a fost produsă polarizarea sferei. Presupunând că o sferă oarecare este polarizată, figura 9.27 arată câmpul ei. Peste acesta poate fi superpus orice câmp de la alte surse, reprezentînd astfel multe sisteme posibile. Aceasta nu va afecta discontinuitatea în  $E$  la frontiera mediului polarizat. Regulile tocmai formulate se aplică în consecință în orice sistem, discontinuitatea în  $E$  fiind determinată doar de polarizarea existentă.

### 9.11. O SFERĂ DIELECTRICĂ ÎNTR-UN CÂMP UNIFORM

Ca exemplu, să punem o sferă de material dielectric caracterizat printr-o constantă dielectrică  $k$  într-un câmp electric omogen  $E_0$  ca de exemplu câmpul între plăcile paralele ale unui condensator de vid, figura 9.28. Sursele acestui câmp, sarcinile de pe plăci, să fie situate departe de sferă astfel încît ele nu se deplasează cînd introducem sfera. Atunci oricare ar fi



cîmpul din vecinătatea sferei, el va rămîne practic  $E_0$  la distanțe mari. Aceasta se înțelege prin a pune o sferă într-un cîmp uniform. Cîmpul total  $E$  nu mai este uniform în vecinătatea sferei. El este *suma* cîmpului uniform  $E_0$  al surselor depărtate și a unui cîmp  $E'$  generat de însăși materia polarizată:

$$E = E_0 + E'. \quad (45)$$

Cîmpul  $E'$  depinde de polarizarea  $P$  a dielectricului, care la rîndul ei depinde de valoarea lui  $E$  în interiorul sferei:

$$P = \epsilon_0 \chi_e E = (k - 1) \epsilon_0 E. \quad (46)$$

Încă nu știm care este cîmpul total  $E$ ; știm doar că ecuația 46 trebuie să se verifice în orice punct din interiorul sferei. Dacă sfera devine uniform polarizată, o presupunere care va avea să fie justificată prin rezultatele noastre, relația dintre polarizarea sferei și propriul ei cîmp  $E'$ , în puncte interioare, este dată deja de ecuația 43. (În ec. 43 foloseam simbolul  $E$  pentru acest cîmp; în acel caz era singurul cîmp prezent.)

$$E'_{in} = -\frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (47)$$

Avem acum destule ecuații să eliminăm  $P$  și  $E'$ , ceea ce ne-ar da o relație între  $E$  și  $E_0$ . Folosind ecuațiile 45 la 47 găsim:

$$E = E_0 - \frac{P}{3\epsilon_0} = E_0 - \frac{k-1}{3} E. \quad (48)$$

Rezolvînd pentru  $E$ ,

$$E = \left( \frac{3}{2+k} \right) E_0. \quad (49)$$

Deoarece  $k$  este mai mare decît unu, factorul  $3/(2+k)$  va fi mai mic decît unu; cîmpul în interiorul dielectricului este mai slab decît  $E_0$ . Polarizarea este

$$P = (k-1)\epsilon_0 E = 3\epsilon_0 \left( \frac{k-1}{k+2} \right) E_0. \quad (50)$$

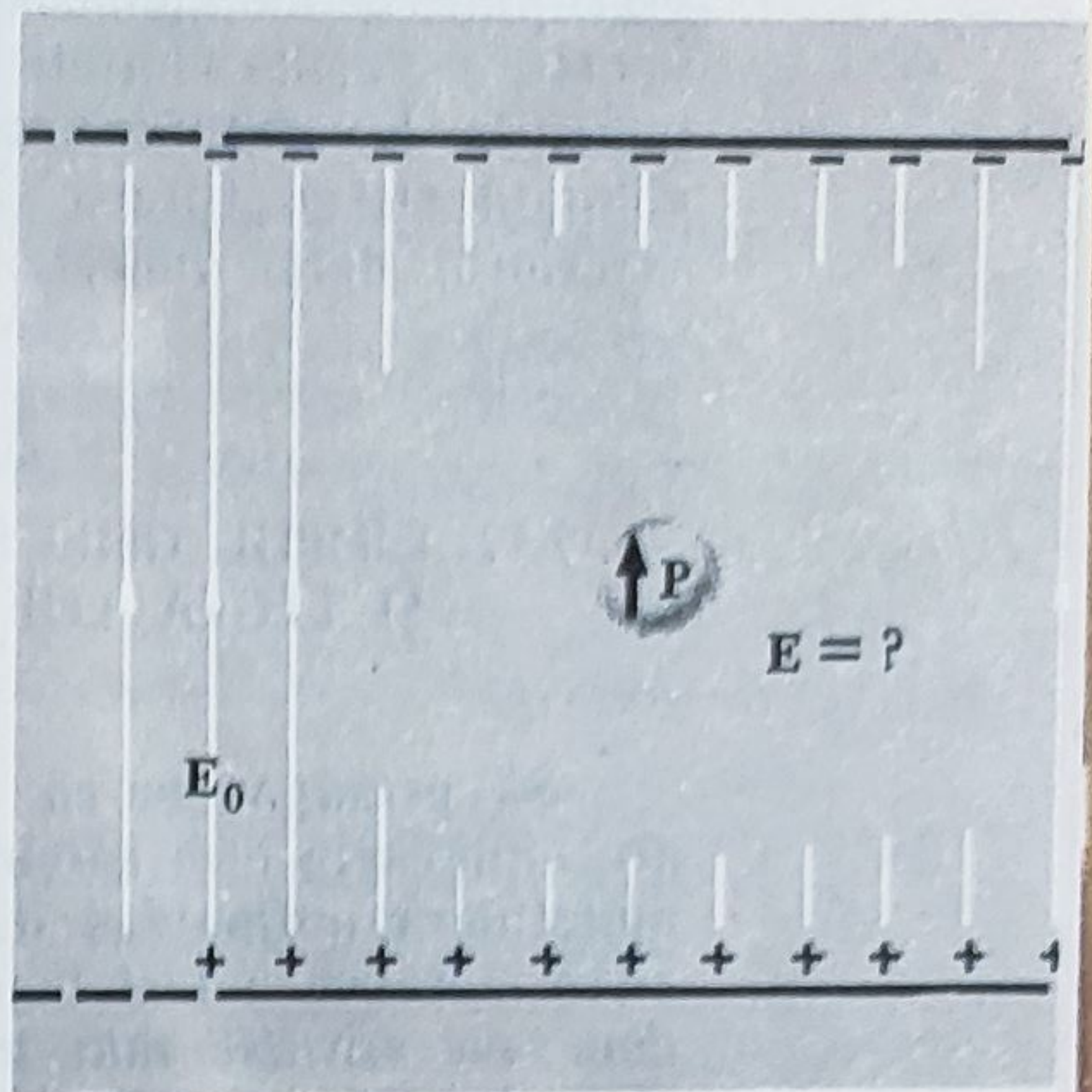


Fig. 9.28. Sursele cîmpului  $E$  rămîn fixate. Sfera dielectrică dezvoltă o oarecare polarizare  $P$ . Cîmpul total  $E$  este superpoziția lui  $E_0$  și cîmpul acestei sfere polarizate.

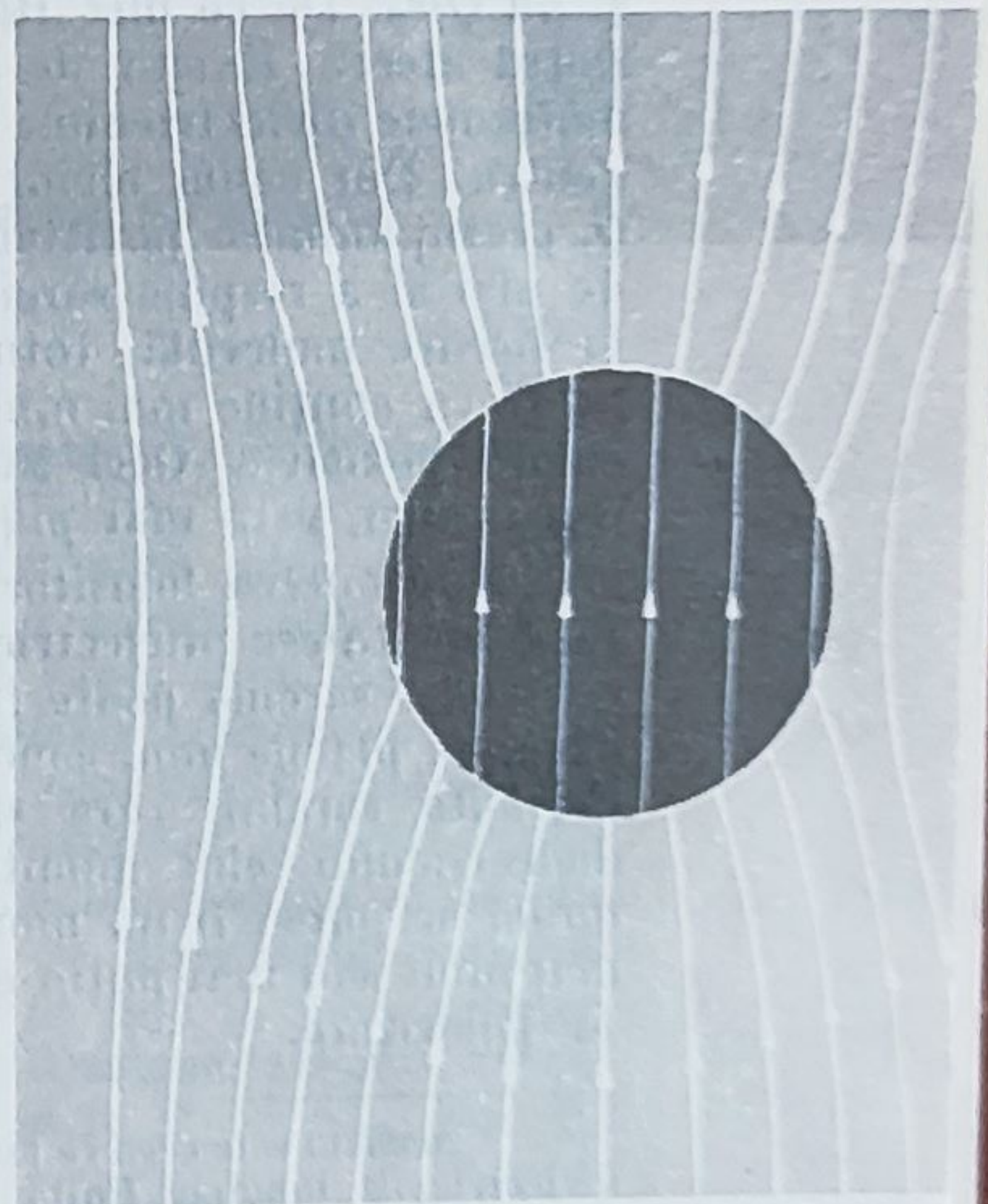


Fig. 9.29. Cîmpul total  $E$ , atît în interiorul cît și în exteriorul sferei dielectrice.



Presupunerea unei polarizări uniforme apare acum consistentă prin ea însăși.\* Pentru a calcula câmpul total  $\mathbf{E}$  în exteriorul sferei trebuie să adunăm vectorial la  $\mathbf{E}_0$  câmpul unui dipol central de moment dipolar egal cu  $\mathbf{P}$  ori volumul sferei. Câteva linii de câmp ale lui  $\mathbf{E}$ , atât în interiorul cât și în exteriorul sferei dielectrice, sînt arătate în figura 9.29.

## 9.12. CÂMPUL UNEI SARCINI ÎNTR-UN MEDIU DIELECTRIC ȘI LEGEA LUI GAUSS

Să presupunem că un volum foarte mare dintr-un dielectric omogen are undeva în el o sarcină concentrată  $Q$ , care nu face parte din structura moleculară normală a dielectricului. Imaginați-vă, de exemplu, că o mică sferă metalică a fost încărcată și apoi introdusă într-o cuvă de ulei. După cum s-a afirmat mai înainte, câmpul electric în ulei este simplu  $1/k$  ori câmpul pe care l-ar produce  $Q$  în vid.

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 k r^2}. \quad (51)$$

Mărimea  $\epsilon = \epsilon_0 k$  se numește *permitivitate dielectrică* a mediului și este o constantă de material.  $\epsilon_0$  este numit uneori *permitivitatea spațiului vid*. Este interesant să vedem cum se aplică legea lui Gauss. Integrala de suprafață a lui  $\mathbf{E}$  (care este câmpul macroscopic, ori mediul spațial, vă amintiți) luată pe o sferă în jurul lui  $Q$ , dă  $Q/\epsilon$ , dacă credem ecuația 51, și nu  $Q/\epsilon_0$ . De ce nu? Răspunsul este că  $Q$  nu este singura sarcină în interiorul sferei. Există de asemenea toate sarcinile care alcătuiesc atomii și moleculele dielectricului. În mod obișnuit orice volum din ulei ar fi electric neutru. Dar acum uleiul este polarizat radial, ceea ce înseamnă că sarcina  $Q$ , presupunînd-o pozitivă, a atras către ea sarcina negativă din moleculele de ulei și a respins sarcinile pozitive. Deși deplasarea poate fi foarte mică în fiecare moleculă, totuși în medie orice sferă pe care o ducem în jurul lui  $Q$  va conține mai multă sarcină moleculară negativă decît sarcină moleculară pozitivă. Deci sarcina netă în sferă, incluzînd sarcina „străină”  $Q$  din centru, este mai puțin decît  $Q$ . De fapt este  $Q/k$ .

Este adesea folositor să distingem între sarcina „străină”  $Q$  și sarcinile care alcătuiesc dielectricul. Asupra primelor avem un oarecare grad de control — sarcina poate fi adăugată sau îndepărtată de pe un obiect, ca de exemplu plăcile unui condensator. Aceasta este adesea numită sarcină *liberă*. Celelalte sarcini, care sînt părți integrale ale atomilor sau moleculelor dielectricului, sînt numite în mod obișnuit sarcini „legate”. Sarcină *structurală* ar putea fi un nume mai potrivit. Aceste sarcini nu sînt mobile dar mai mult sau mai puțin elastic legate, contribuind, prin mica lor deplasare, la polarizare.

\* Aceasta este ceea ce face ca acest sistem să fie ușor de tratat. Pentru un cilindru dielectric de lungime finită într-un câmp electric uniform, presupunerea nu ar lucra. Câmpul  $\mathbf{E}'$  al unui cilindru uniform polarizat — de exemplu unul cu lungimea aproximativ egală cu diametrul — nu este uniform în interiorul cilindrului. (Cum trebuie să arate?) De aceea  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$  nu poate fi uniform — dar în acest caz  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$  nu poate fi, la urmă, uniform. De fapt doar dielectrici de formă elipsoidală, între care sfera este un caz special, primesc o polarizare uniformă într-un câmp uniform.



Se poate imagina o mărime vectorială care este legată prin ceva asemănător cu legea lui Gauss de singura sarcină liberă. În sistemul pe care tocmai l-am examinat, o sarcină punctuală scufundată într-un dielectric, vectorul  $k\mathbf{E}$  are această proprietate. Adică,  $\int k\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ , luată pe o suprafață oarecare închisă  $S$ , este egală cu  $Q/\epsilon_0$  dacă  $S$  cuprinde  $Q$ , și zero dacă nu. Prin superpoziție, aceasta trebuie să aibă loc pentru orice mulțime de sarcini libere descrise printr-o densitate de sarcină liberă  $\rho_{\text{liberă}}(x, y, z)$  într-un mediu dielectric omogen infinit:

$$\int_S k\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_{\text{liberă}} dv \quad (52)$$

unde  $V$  este volumul închis de suprafața  $S$ . O relație integrală ca aceasta implică o relație „locală” între divergența câmpului vectorial  $k\mathbf{E}$  și densitatea de sarcină liberă:

$$\text{div}(k\mathbf{E}) = \rho_{\text{liberă}}/\epsilon_0. \quad (53)$$

Deoarece  $k$  a fost presupus constant în tot mediul, ecuația 53 nu ne spune nimic nou. Totuși ne poate ajuta să identificăm rolul sarcinii izolate. Într-un sistem oricare ar fi ele, relația fundamentală între câmpul electric  $\mathbf{E}$  și densitatea de sarcină totală  $\rho_{\text{liberă}} + \rho_{\text{legată}}$  rămâne valabilă:

$$\text{div} \mathbf{E} = (\rho_{\text{liberă}} + \rho_{\text{legată}})/\epsilon_0. \quad (54)$$

Din ecuațiile 53 și 54 urmează că

$$\text{div}(k - 1)\mathbf{E} = -\rho_{\text{legată}}/\epsilon_0. \quad (55)$$

După ecuația 38,  $(k - 1)\mathbf{E} = \mathbf{P}/\epsilon_0$ , astfel încât ecuația 55 implică

$$\text{div} \mathbf{P} = -\rho_{\text{legată}}. \quad (56)$$

Ecuația 56 este o afirmație despre două aspecte ale distribuției de sarcină legată în orice vecinătate, și despre nimic altceva. De aceea ea nu poate depinde de condițiile din altă parte a sistemului, nici de modul în care este menținută aranjarea particulară a sarcinilor legate. Orice aranjament de sarcină legată care are un anumit exces local, pe unitate de volum, de protoni nucleari față de electroni atomici trebuie să reprezinte o polarizare cu o anumită divergență. Astfel ecuația 56 trebuie să aibă loc în mod general, nu numai în dielectricul nelimitat. Puteți căpăta o intuiție asupra identității exprimate în ecuația 56 imaginându-vă câteva molecule polare dispuse încît să dea o polarizare cu divergență pozitivă (fig. 9.30). Dipolii sînt orientați spre exterior, ceea ce lasă în mod necesar o mică concentrare de sarcină negativă în mijloc. Desigur, ecuația 56 se referă la medii pe elemente de volum atît de largi încît  $\mathbf{P}$  și  $\rho_{\text{legată}}$  pot fi tratate drept mărimi continue variabile.

Din ecuațiile 54 și 56 obținem relația

$$\text{div} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = \rho_{\text{liberă}}/\epsilon_0. \quad (57)$$

87,83,73  
285,257,1



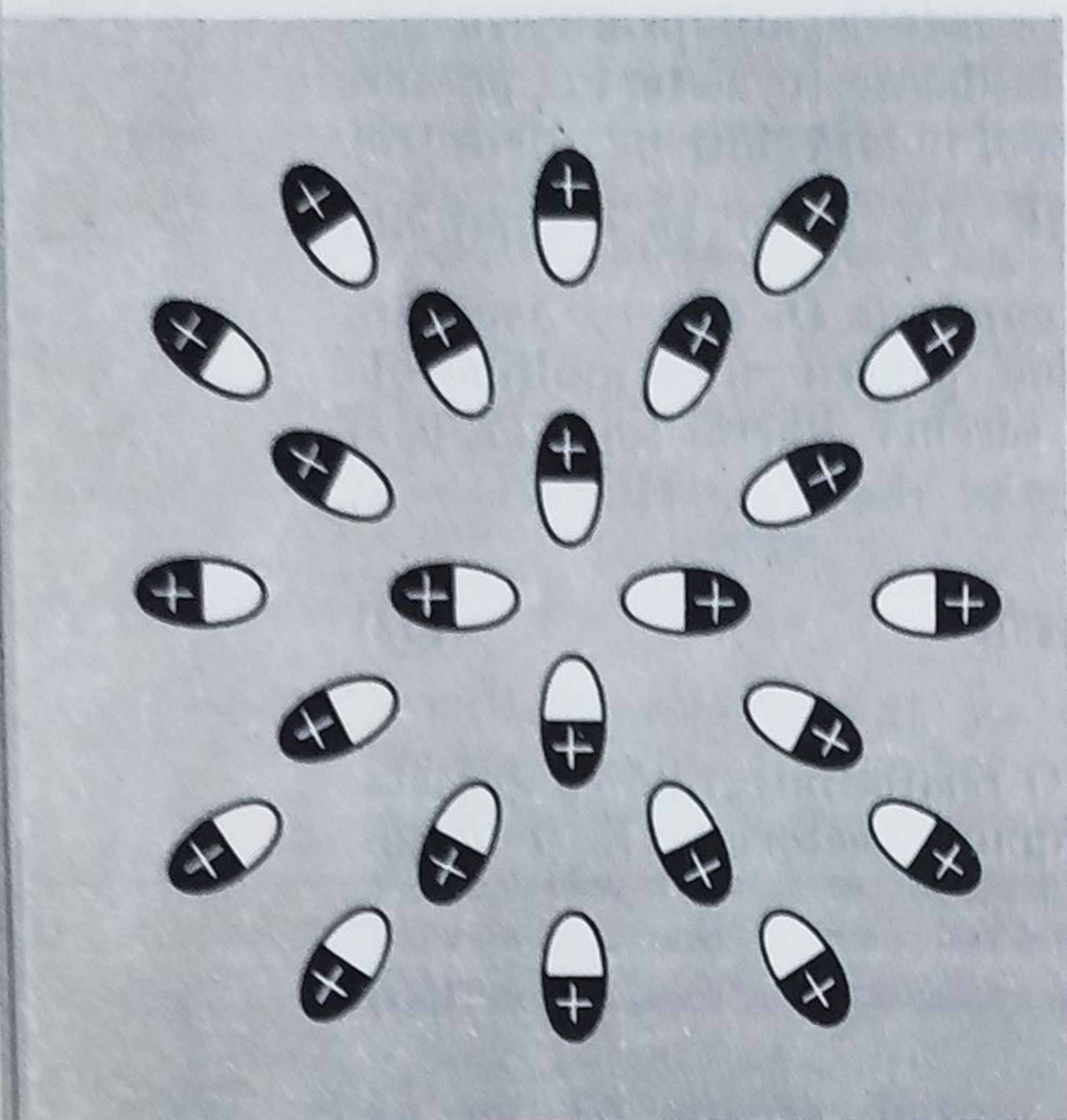


Fig. 9.30. Dipoli moleculari aranjați astfel încât  $\text{div } \mathbf{P} > 0$ . De notat concentrarea sarcinii negative în mijloc, consistentă cu ecuația 56.

Aceasta este complet independentă de orice relație între  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{P}$ . Ea nu este limitată la acele materiale, pe care le numim dielectrice, în care  $\mathbf{P}$  este proporțional cu  $\mathbf{E}$ .

Este obișnuit a da combinației  $\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$  un nume special, vectorul de *deplasare electrică*, și propriul său simbol,  $\mathbf{D}$ . Adică, definim  $\mathbf{D}$  prin

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (58)$$

Într-un dielectric izotrop,  $\mathbf{D}$  este simplu  $\epsilon_0 K \mathbf{E}$ , dar relația

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_{\text{liberă}} \quad (59)$$

are loc în orice situație în care mărimile macroscopice  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{E}$  și  $\rho$  pot fi definite.

Aspectul ecuației 59 poate sugera să privim  $\mathbf{D}$  drept un câmp vectorial a cărui sursă este distribuția de sarcină liberă  $\rho_{\text{liberă}}$ , în același sens în care distribuția de sarcină totală  $\rho$  este sursa lui  $\mathbf{E}$ . Aceasta ar fi greșit. Câmpul electrostatic  $\mathbf{E}$  este determinat în mod unic — cu excepția adăugării unui câmp constant — de distribuția de sarcină  $\rho$  deoarece, completând legea  $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ , există o altă condiție universală,  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ . Nu este adevărat, în general, că  $\text{rot } \mathbf{D} = 0$ . Astfel distribuția de sarcină liberă nu este suficientă pentru a determina  $\mathbf{D}$  din ecuația 59. Încă ceva este necesar, cum sint condițiile de frontieră la diferite suprafețe dielectrice. Condițiile de frontieră asupra lui  $\mathbf{D}$  sint desigur o simplă cale alternativă de a exprima condițiile de frontieră implicând  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{P}$ , deja formulate spre sfârșitul § 9.10.

În abordarea pe care am luat-o pentru câmpuri electrice în materie introducerea lui  $\mathbf{D}$  este un artificiu care nu este, în întregime, foarte folositor. Am menționat  $\mathbf{D}$  deoarece este înconjurat de tradiție, începînd cu Maxwell\*, iar studentul îl va întîlni sigur în alte cărți, multe tratîndu-l cu mai mult respect decît se cuvine.

\* Importanța lui  $\mathbf{D}$  în formularea lui Maxwell a teoriei electromagnetice, și alegerea numelui de *deplasare* poate fi probabil atribuită înclinării sale către un fel de model mecanic al „eterului”. Whittaker a observat în lucrarea sa clasică, *O istorie a teoriilor eterului și electricității*, vol. I, p. 266 (Harper Torchbooks, New York, 1960, în limba engleză) că această înclinare pare să-l fi indus în eroare pe însuși Maxwell la un moment dat în aplicarea teoriei sale asupra problemei reflexiei luminii de către un dielectric.



Concluziile noastre esențiale despre câmpuri electrice în materie pot fi rezumate astfel:

(i) Materia poate fi polarizată, starea sa putînd fi descrisă complet, cîtă vreme este considerat câmpul macroscopic, printr-o densitate de polarizare  $\mathbf{P}$ , care este momentul dipolar pe unitate de volum. Contribuția unei astfel de materii la câmpul electric  $\mathbf{E}$  este identică cu aceea a unei distribuții de sarcină  $\rho_{\text{legat}}$ , existînd în vid și avînd densitatea  $\rho_{\text{legat}} = -\text{div } \mathbf{P}$ . În particular, la suprafața unei substanțe polarizate, unde există o discontinuitate în  $\mathbf{P}$ , aceasta se reduce la o sarcină superficială de densitate  $\sigma = -P_n$ . Adăugați orice distribuție de sarcină liberă care poate fi prezentă, și câmpul electric este câmpul pe care această distribuție de sarcină *totală* l-ar produce în vid. Acesta este câmpul macroscopic  $\mathbf{E}$  atît în interiorul cît și în afara materiei, cu mențiunea că în interiorul materiei este media spațială a câmpului macroscopic adevărat.

(ii) Dacă  $\mathbf{P}$  este proporțional cu  $\mathbf{E}$  într-un material, numim materialul dielectric. Definim susceptibilitatea  $\chi_e$  și constanta dielectrică  $k$  caracteristice materialului:  $\chi_e = \mathbf{P}/\epsilon_0 \mathbf{E}$  și  $k = 1 + \chi_e$ . Sarcini libere scufundate într-un dielectric generează câmpuri electrice care au  $1/k$  din intensitatea pe care aceleași sarcini ar produce-o în vid.

### 9.13. LEGĂTURA ÎNTRE SUSCEPTIBILITATEA ELECTRICĂ ȘI POLARIZABILITATEA ATOMICĂ

Raportul densității de polarizare  $\mathbf{P}$  la câmpul electric macroscopic  $\mathbf{E}$  într-o substanță este, pînă la o constantă, susceptibilitatea electrică  $\chi_e$ . Să presupunem că substanța este alcătuită din atomii de polarizabilitate atomică  $\alpha$ . Acum  $\mathbf{P}$  nu este decît suma, în unitatea de volum, a momentelor dipolare  $\mathbf{p}$  ale atomilor individuali. Putem prezice momentul dipolar indus al unui atom dacă știm  $\alpha$  și câmpul electric care acționează asupra atomului pentru a-l polariza. De aici ar trebui să fim în stare, dacă știm  $\alpha$  și numărul de atomi per unitate de volum,  $N$ , să prezicem susceptibilitatea  $\chi_e$ . Să încercăm să facem o teorie care să lege  $\chi_e$  cu  $\alpha$ .

Momentul dipolar indus într-un atom  $A$  este determinat de către câmpul, provenind de la toate *celelalte* surse, care acționează asupra atomului. Acesta *nu* este identic cu câmpul macroscopic  $\mathbf{E}$  din acea vecinătate, deoarece acel câmp cuprinde o contribuție de la sarcinile din însuși atomul  $A$ . Astfel că problema noastră ia o întorsătură interesantă chiar de la început. Pentru a face situația clară, considerăm un sistem foarte particular. Substanța noastră este alcătuită din atomi identici aliniați într-o rețea cristalină cubică cu distanțare  $b$  cm între vecinii cei mai apropiați. Polarizabilitatea fiecărui atom este  $\alpha$ . Figura 9.31 este o secțiune transversală prin rețea. Direcția presupusă a câmpului macroscopic  $\mathbf{E}$  din acea regiune este indicată, ca și deformarea atomilor polarizați. Întrebarea noastră este, care este mărimea câmpului care produce acea deformare? Fiecare atom poate fi imaginat ca ocupînd propria sa celulă cubică, și vom presupune că atomii sînt mult mai mici decît distanțarea în rețea, astfel încît toată sarcina dintr-un atom este foarte aproape de centrul celulei.

Vom nota prin  $\mathbf{E}_{\text{alte}}$  câmpul care acționează asupra atomului  $A$ . Sursele acestui câmp sînt oriunde altundeva în sistem, incluzînd toți ceilalți



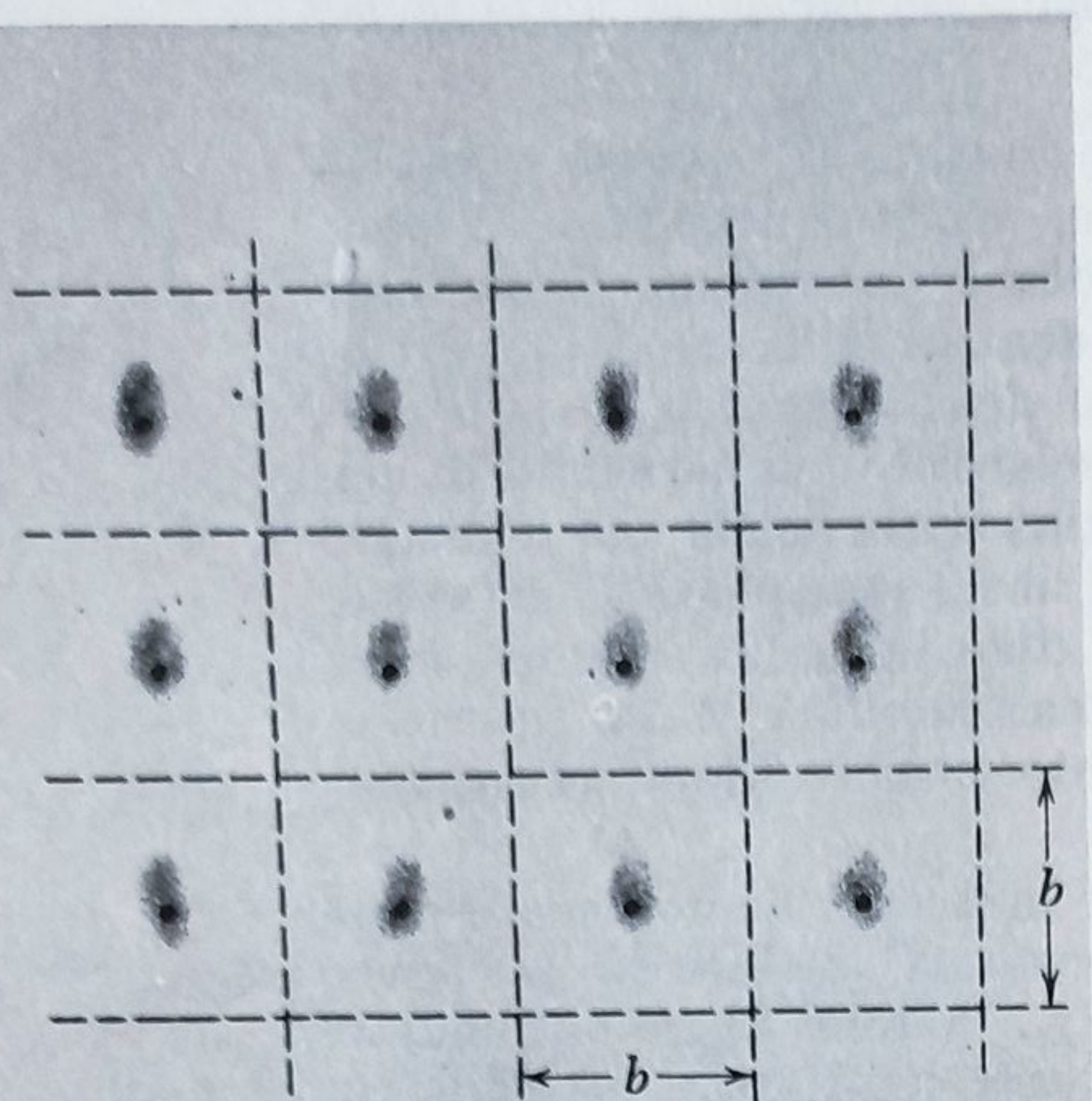


Fig. 9.31. O aranjare cubică a atomilor într-un cristal. Fiecare atom este arătat polarizat.

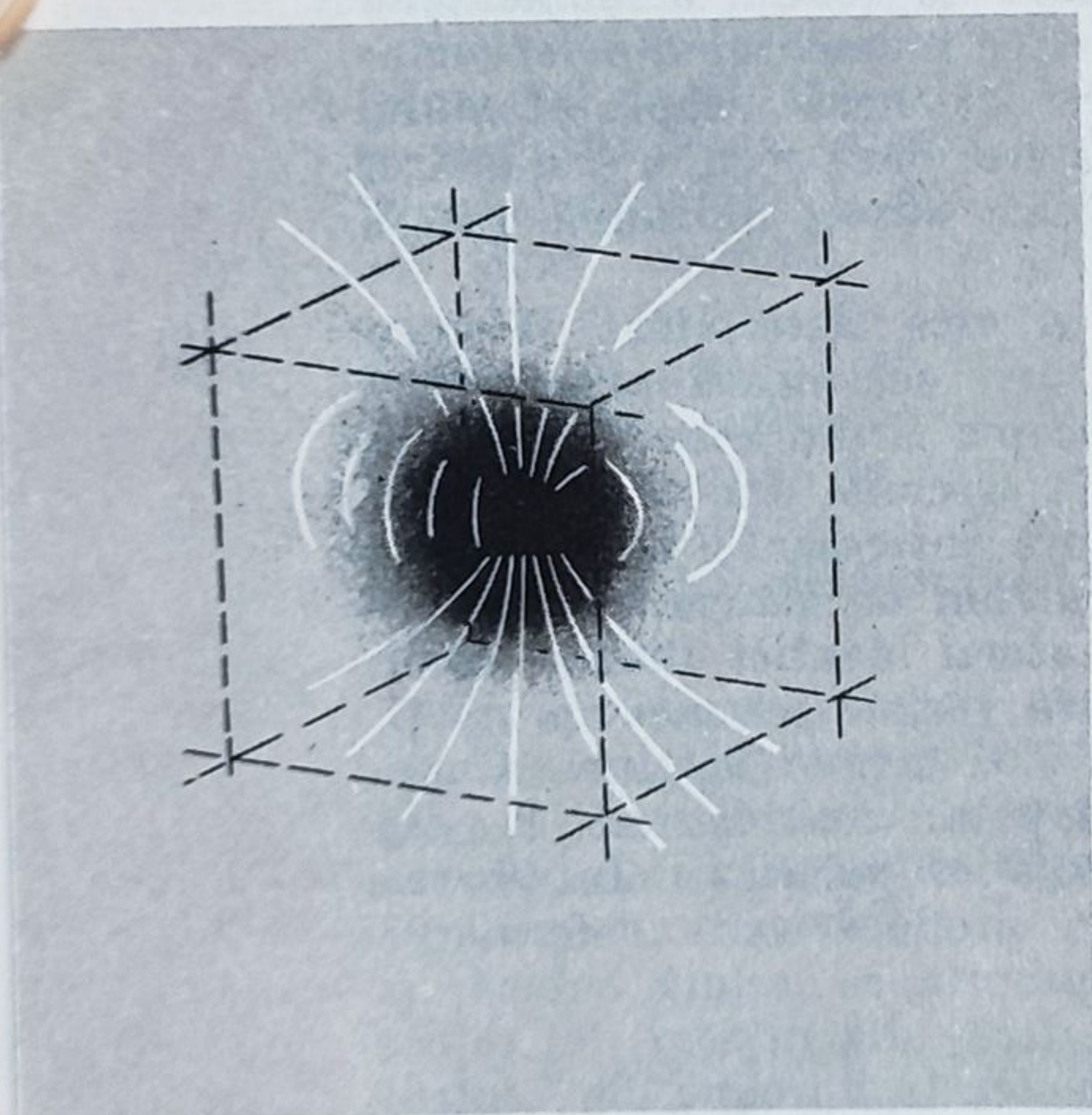


Fig. 9.32. Atomul A și câmpul  $E_{\text{auto}}$  care provine numai de la acel atom.

atomi și oricare sarcini în afară.  $E_{\text{alte}}$  este câmpul pe care l-am găsi în celula A dacă am putea îndepărta în mod magic atomul A în același timp înghețând toate celelalte distribuții de sarcină în forma pe care o au cu atomul A prezent.  $E_{\text{alte}}$  nu va fi cu totul constant în celula A, dar vom presupune că *valoarea sa medie* în celulă este destul de apropiată de ceea ce vrem. Printr-o medie peste volumul cuprins de celula A înțelegem, ca de obicei, integrala  $\int E dv$  împărțită la volumul celei. Vom indica astfel de medii prin  $\langle \rangle_{\text{celulă}}$ .

Fie  $E_{\text{auto}}$  câmpul atomului A. Câmpul total microscopic,  $E_{\text{mic}}$ , este atunci în fiecare punct

$$E_{\text{mic}} = E_{\text{alte}} + E_{\text{auto}}. \quad (60)$$

Știm că câmpul macroscopic  $E$  este egal cu media spațială a câmpului microscopic  $E_{\text{mic}}$ . Variația lui  $E_{\text{mic}}$  este desigur aceeași în fiecare celulă. De asemenea, celulele umplu spațiul complet fără nici un gol între ele. De aceea media lui  $E_{\text{mic}}$  în orice celulă individuală trebuie să fie aceeași ca și media peste o regiune mai mare conținând multe celule\*. Urmează că

$$\langle E_{\text{mic}} \rangle_{\text{celulă}} = E. \quad (61)$$

Dar  $\langle E_{\text{mic}} \rangle_{\text{celulă}} = \langle E_{\text{alte}} \rangle_{\text{celulă}} + \langle E_{\text{auto}} \rangle_{\text{celulă}}$ , media unei sume fiind suma mediilor, astfel că  $\langle E_{\text{alte}} \rangle_{\text{celulă}}$ , care este mărimea pe care o căutăm, este dată de

$$\langle E_{\text{alte}} \rangle_{\text{celulă}} = E - \langle E_{\text{auto}} \rangle_{\text{celulă}}. \quad (62)$$

Problema noastră s-a redus acum la calcularea lui  $\langle E_{\text{auto}} \rangle_{\text{celulă}}$ , media pe celulă a câmpului atomului care ocupă celula

$$\langle E_{\text{auto}} \rangle_{\text{celulă}} = \frac{1}{b^3} \int_{\text{celulă}} E_{\text{auto}} dv. \quad (63)$$

Trebuie să includem în integrare toate elementele de volum în interiorul celei, în interiorul ca și în exteriorul distribuției atomice de sarcină. Figura 9.32 sugerează cum ar putea arăta câmpul  $E_{\text{auto}}$ . Aceasta

\* Nu acceptați această afirmație crucială fără gândire. De ce golurile între celule ar strica-o?

Fig. 9.33. deplasată

face ca  
lucra cu  
media p

Dacă  
integrală

din celu  
direcția  
ca în fig  
grosime

acum si

lăm me  
ușoara v  
pe volu  
peste p

Legea h  
în ecuaț  
în jurul  
șase feț  
= -qz/



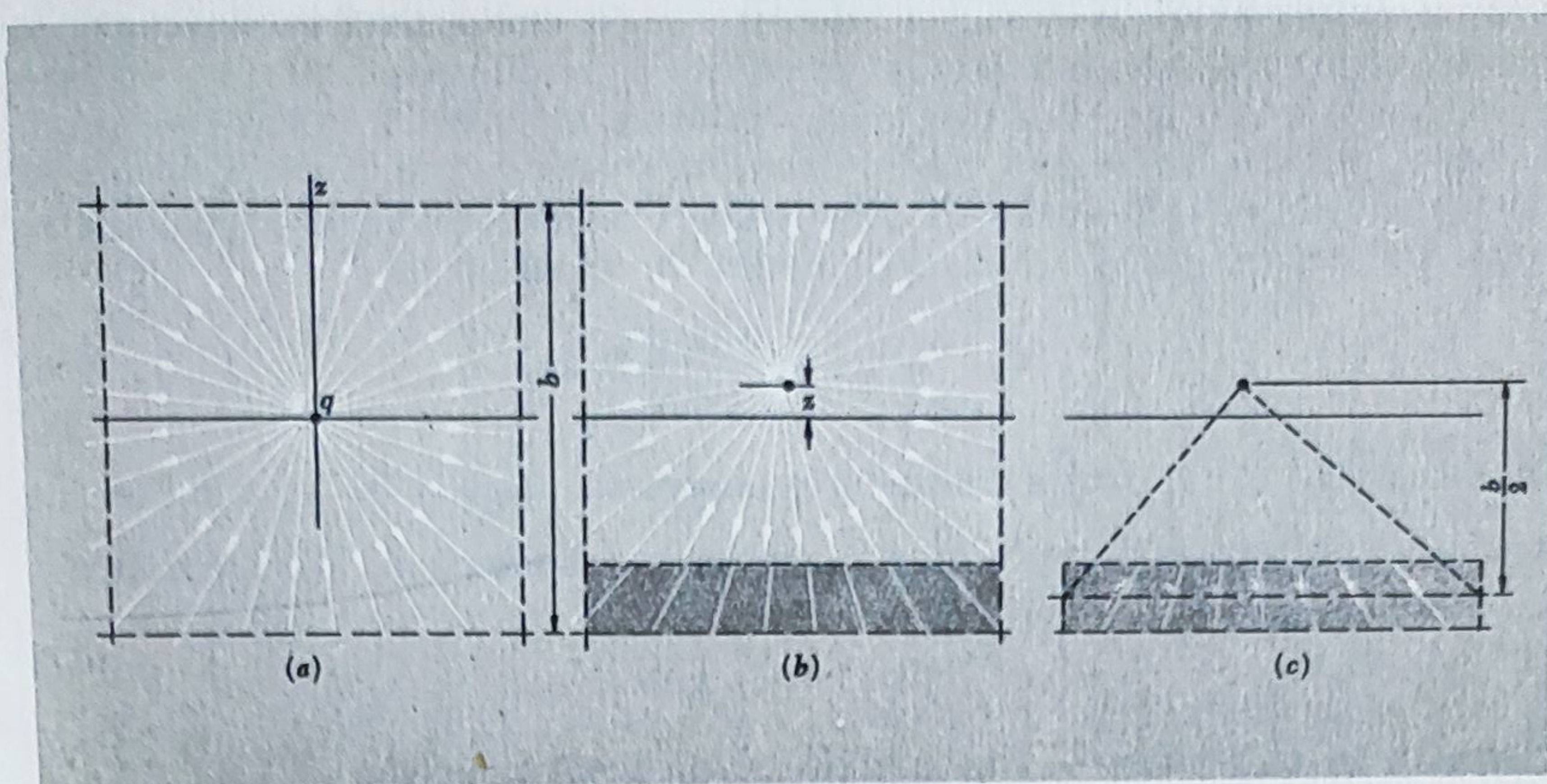


Fig. 9.33. Calcularea „mediei de celulă” a câmpului unei sarcini punctuale  $q$  care este ușor deplasată de la centrul celulei.

face ca sarcina noastră să pară extraordinară. Totuși, putem totdeauna lucra cu un element de distribuție de sarcină la un moment dat. Să calculăm media pe celulă a câmpului  $E_q$  de la o sarcină punctiformă individuală  $q$ :

Dacă sarcina punctiformă era în centrul celulei, ca în figura 9.33,  $a$ , integrala  $\int_{\text{celulă}} E_q dv$  ar fi zero. Datorită simetriei, fiecare element de volum din celulă se potrivește cu un altul în care câmpul are intensitate egală în direcția opusă. Să deplasăm acum sarcina  $q$  în sus printr-o mică distanță  $z$ , ca în figura 9.33,  $b$ . Există un strat subțire în partea de jos a celulei, de grosime  $2z$ , care nu este echilibrat de stratul de sus. Acest strat alcătuiește acum singura contribuție la  $\int_{\text{celulă}} E_q dv$ . Evident, avem nevoie doar să calculăm media lui  $E_{qz}$ ;  $E_{qx}$  și  $E_{qy}$  se vor media încă la zero. Dacă neglijăm ușoara variație a lui  $E_{qz}$  în grosimea stratului, integrala de volum a lui  $E_{qz}$  pe volumul stratului este chiar de  $2z$  ori integrala de suprafață a lui  $E_{qz}$  peste pătratul care formează planul median al stratului (fig. 9.33,  $c$ )

$$\int_{\text{strat}} E_{qz} dv = 2z \int_{\text{pătrat}} E_{qz} da. \quad (64)$$

Legea lui Gauss ne vine acum în ajutor, deoarece integrala de suprafață în ecuația 64 este tocmai fluxul lui  $E_q$  printr-una din fețele unui cub centrat în jurul sarcinii  $q$ . Acel flux trebuie să fie chiar  $q/6\epsilon_0$ , deoarece un cub are șase fețe echivalente. Tragem concluzia că  $2z \int_{\text{pătrat}} E_{qz} da = -2z(q/6\epsilon_0) = -qz/3\epsilon_0$  astfel că

$$\langle E_{qz} \rangle_{\text{celulă}} = \frac{1}{b^3} \int_{\text{celulă}} E_{qz} dv = \frac{-qz}{3\epsilon_0 b^3}. \quad (65)$$

87,83,43  
285,257,2



Semnul minus exprimă faptul că deplasarea în sus a unei sarcini pozitive rezultă în preponderența câmpului orientat în jos în celulă. O formulă asemănătoare s-ar obține pentru o mică deplasare în direcția  $x$  sau direcția  $y$ . De aceea o mică deplasare  $\mathbf{r}$  de la centru în orice direcție va rezulta într-un câmp mediu în celulă  $-\mathbf{qr}/3\epsilon_0 b^3$ . Deci pentru un atom complet  $A$ , cu distribuția de sarcină  $\rho(x, y, z)$ , câmpul mediu în celulă va fi

$$\langle \mathbf{E}_{\text{auto}} \rangle_{\text{celulă}} = \frac{-1}{3\epsilon_0 b^3} \int \mathbf{r} \rho \, dv. \quad (66)$$

În integrala  $\int \mathbf{r} \rho \, dv$  putem recunoaște *momentul dipolar* al distribuției de sarcină,  $\mathbf{p}$ . (Comparați cu definiția momentului dipolar, ec. 10). Avem acum

$$\langle \mathbf{E}_{\text{auto}} \rangle_{\text{celulă}} = \frac{-1}{3\epsilon_0 b^3} \mathbf{p}. \quad (67)$$

Restul este un exercițiu. Din ecuația 62 obținem imediat

$$\langle \mathbf{E}_{\text{auto}} \rangle_{\text{celulă}} = \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0 b^3} \mathbf{p}. \quad (68)$$

Dacă spunem că  $\langle \mathbf{E}_{\text{alte}} \rangle_{\text{celulă}}$  este câmpul efectiv în polarizarea atomului, atunci  $\mathbf{p}$  este legat de acest câmp prin polarizabilitatea atomică:

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \alpha \langle \mathbf{E}_{\text{auto}} \rangle_{\text{celulă}}. \quad (69)$$

Din ecuațiile 68 și 69 obținem relația care leagă  $\mathbf{p}$  și  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \alpha \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{3\epsilon_0 b^3} \right). \quad (70)$$

Aceasta se poate scrie în funcție de densitatea de polarizare macroscopică  $\mathbf{P}$ . Deoarece  $N$ , numărul de atomi polarizați per centimetru cub, este egal cu  $1/b^3$ ,  $\mathbf{P} = N\mathbf{p} = \mathbf{p}/b^3$ . Înlocuind în ecuația 70.

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 N \alpha \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \right] \quad (71)$$

care, rearanjată, este

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \left[ \frac{N\alpha}{1 - (1/3)N\alpha} \right] \mathbf{E}. \quad (72)$$

Factorul în paranteze trebuie să fie susceptibilitatea  $\chi_e$ .

Am făcut două aproximații de-a lungul drumului către ecuația 72. Am presupus că toate părțile distribuției de sarcină atomică se află lângă centrul celulei; ecuațiile 65 și 66 nu sînt exacte dacă  $z$ , sau  $\mathbf{r}$ , nu este mic în comparație cu  $b$ . De asemenea, am folosit media lui  $\mathbf{E}_{\text{alte}}$  pe celulă, în locul valorii  $\mathbf{E}_{\text{alte}}$  la centrul celulei, drept câmp care polarizează atomul. Pentru atomi legați împreună atît de aproape cum sînt în cele mai multe cristale, prima presupunere nu este foarte realistă, iar problema implicată în a doua presupunere nu este relevantă. Nu ne putem aștepta ca ecuația 72 să fie urmată exact de un cristal real.

Dacă atomii unei substanțe sînt foarte depărtați, astfel încît  $N\alpha/3 \ll 1$ , putem neglija acel termen la numitorul ecuației 72, ceea ce ne dă

$$\chi_e = N\alpha \quad (73)$$



Acesta este rezultatul pe care l-am fi obținut dacă am fi uitat despre influența dipolilor unul asupra altuia. Ea se aplică destul de bine la gaze de densitate normală, pentru care termenul neglijat este de ordinul lui  $10^{-3}$ . În această limită aranjarea geometrică a atomilor nu contează, doar numărul pe centimetru cub. Astfel prin măsurarea cu precizie a constantei dielectrice a unui gaz la presiune scăzută, polarizabilitatea atomică poate fi determinată fără nici un fel de complicații din influența mutuală a dipolilor. Măsurători asupra unei forme mai dense ale aceleiași substanțe\* poate fi atunci folosită pentru a verifica o formulă teoretică cum este ecuația 72.

Termenul  $-N\alpha/3$  în numitorul ecuației 72 reflectă interacția atomilor polarizați în cristal. Evident interacția are natura unei *întăriri*, conducând la o polarizare mai mare decât ar exista fără ea. Dacă luăm în serios formula matematică, ea sugerează o posibilitate surprinzătoare. Ce ar fi dacă  $N\alpha$  ar fi atât de mare încât  $N\alpha/3$  ar fi egal sau ar depăși unu? Rezultă că  $\chi_e$  ar tinde la infinit. Aceasta ar putea însemna o polarizare în câmp aplicat zero! Sună ca un non-sens, dar nu este în întregime. Sînt cunoscute unele cristale care prezintă o polarizare electrică spontană. Totuși, ceva mai mult decât polarizarea indusă este implicat în acest caz, teoria noastră nu este aplicabilă. De fapt, pentru a face  $N\alpha/3$  să se apropie de unu, atomii trebuie să fie atât de strînși împreună încît aproximațiile noastre nu sînt bune de loc (vezi prob. 9.30).

#### 9.14. VARIAȚII DE ENERGIE ÎN POLARIZARE

Pentru a încărca un condensator la o diferență de potențial  $U$ , un lucru în mărime de  $\frac{1}{2}CU^2$  este de făcut. Acea cantitate de energie poate fi recuperată permițînd condensatorului să se descarce printr-un circuit extern. Energia a fost înmagazinată în condensatorul încărcat. S-a arătat în capitolul 2 că în orice sistem electrostatic energia înmagazinată poate fi calculată atribuind  $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$  joule/ $m^3$  câmpului electric. Pentru a ne reaminti, intensitatea  $E$  a câmpului în condensatorul de vid cu plăci paralele, cu suprafața plăcilor  $A$  și distanțare  $t$ , este  $V/t$ , astfel încît

$$\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\right) \times \text{volumul} = \epsilon_0 V^2 A / 2t = \frac{1}{2} CV^2.$$

Dacă condensatorul este umplut cu dielectric de constantă dielectrică  $k$  și încărcat la aceeași diferență de potențial  $V$ , lucrul efectuat va fi mai mare prin factorul  $k$ , deoarece  $C$  este de atîtea ori mai mare. Totuși,  $E$  este același. De aceea energia de asociat cu unitatea de volum în dielectric

\* Se poate arăta că relația dată în ecuația 72 este valabilă nu numai pentru un cristal cu simetrie cubică dar de asemenea pentru un gaz în care atomii ocupă poziții întâmplătoare în spațiu. Cea mai bună confirmare experimentală a acesteia vine de la măsurători ale constantei dielectrice a gazelor la densitate și presiune relativ ridicate (vezi Prob. 9.28).

87,83,73  
285,25



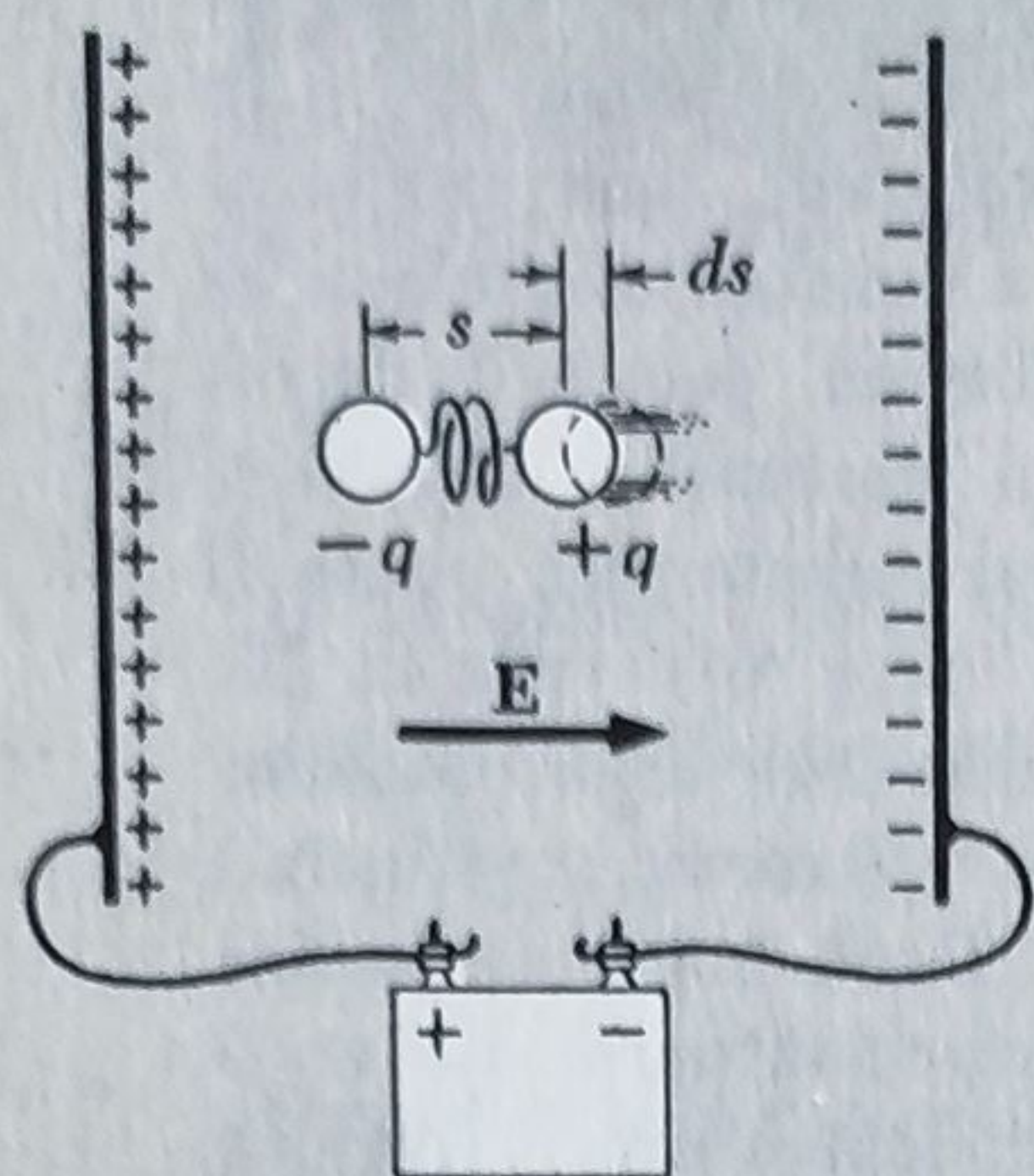


Fig. 9.34. O moleculă polarizată este ca două sarcini ținute împreună de un arc elastic. Într-un câmp  $E$  arcul este întins.

este nu  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ , ci  $\frac{1}{2} k \epsilon_0 E^2$ . Aceasta se poate generaliza la orice sistem electrostatic. În locul ecuației 2.36 avem acum:

$$\text{Energia} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int k E^2 dv. \quad (74)$$

Cum este înmagazinată „extra“-energia? Să considerăm o moleculă polarizabilă izolată, căreia i se poate aplica un câmp electric. În figura 9.34 molecula este reprezentată prin două sarcini fixate la extremitățile unui resort elastic. Momentul ei dipolar  $p$  este un vector de mărime  $qs$ . Câmpul  $E$  provine de la niște surse externe,

ca plăcile și bateria arătate în figură. Să presupunem că în timp ce câmpul  $E$  este prezent, sarcinile se deplasează printr-o creștere  $ds$ . Momentul dipolar se schimbă prin aceasta de la  $qs$  la  $q(s + ds)$ . Și a existat o mișcare de sarcină în direcția lui  $E$ , echivalentă cu deplasarea sarcinii  $+q$  pe distanța  $ds$ . (Nu contează dacă se deplasează o extremitate, sau amândouă.) Deci lucru în cantitatea  $Eqds$  a fost efectuat asupra moleculei. Originea ultimă a acestui lucru este sursa câmpului — în figura 9.34 bateria care menține diferența de potențial constantă dintre plăci. Dacă  $dW$  reprezintă lucrul efectuat asupra moleculei, atunci

$$dW = Eqds = E \cdot dp \quad (75)$$

Energia înmagazinată care corespunde la aceasta poate fi găsită în două locuri, în resortul elastic care a fost întins la o lungime mai mare, și în câmpul electric al însuși dipolului molecular, care acum are mai multă energie totală deoarece cele două sarcini sînt mai depărtate. În cazul unei molecule reale nu avem de făcut o astfel de distincție. Toată energia aparține structurii moleculare, și dacă aveam de privit în acea structură dinamică am găsi energia ca energie potențială electrostatică și energie cinetică a mișcării electronului. Principalul este acesta: Lucrul care a fost efectuat asupra moleculei pentru a-i schimba polarizarea,  $E \cdot dp$ , a mărit exact cu aceasta energia legată în însăși moleculă.

Să vedem cît de mult din energia înmagazinată în dielectric poate fi explicată în felul acesta. Cu  $N$  molecule per unitate de volum,  $P = Np$ . Cînd  $P$  variază prin  $dP$ , atunci  $E \cdot dP$  este creșterea în energia internă a moleculelor în  $1 \text{ m}^3$ . Dar deoarece  $P = (k - 1)\epsilon_0 E$ ,

$$E \cdot dP = (k - 1)\epsilon_0 E \cdot dE = \frac{1}{2} (k - 1)\epsilon_0 d(E^2). \quad (76)$$

De aceea, din cei  $k\epsilon_0 E^2/2$  joule care apar a fi înmagazinați în dielectric,  $(k - 1)\epsilon_0 E^2/2$  pot fi explicați ca energie internă crescută a moleculelor polarizate. Restul,  $\epsilon_0 E^2/2$  este tocmai energia înmagazinată în câmpul de vid.



## 9.15. DIELECTRICI ALCĂTUIȚI DIN MOLECULE POLARE

Moleculele cu momente dipolare permanente, moleculele *polare*, reacționează la un câmp electric încercând să se alinieze paralel cu el. Modelul mecanic potrivit nu este acela a două sarcini la capetele unui resort, ci două sarcini fixate la capetele unei vergele (fig. 9.35). Dacă vergeaua nu este paralelă cu câmpul, există un cuplu asupra ei, de mărime  $Eqs \sin \theta$ . Lucrul efectuat într-o deplasare unghiulară  $d\theta$  este (cuplul  $\times$  deplasarea unghiulară) sau  $Eqs \sin \theta d\theta$ . Aceasta se poate scrie de asemenea prin momentul dipolar vectorial  $\mathbf{p}$ , care este un vector de mărime  $qs$ , și variația  $d\mathbf{p}$  care apare la rotația prin  $d\theta$ . Din diagramă este clar că mărimea lui  $d\mathbf{p}$  este  $p d\theta$ , și direcția sa este astfel că  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{p} = E dp \sin \theta$ . Astfel  $dW = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{p}$ . Aceasta este în acord cu ecuația 75, cum trebuie să fie.

Dacă o moleculă polară izolată ocupă poziția indicată în figura 9.35 la momentul la care este aplicat câmpul, ea se va roti paralel cu câmpul, dar apoi va continua să se rotească peste echilibru și va oscila ca un pendul, deoarece nu are nici o cale de a scăpa de energia ei. Totuși, o moleculă reală înconjurată de alte molecule poate schimba energie cu vecinii ei, dând un fel de „frecare” care amortizează oscilația. Ar părea că aceasta ar putea rezulta în aceea că toate moleculele polare dintr-o substanță se așază exact paralel cu orice câmp aplicat, chiar slab. Așa ar fi la temperatura zero absolut, presupunând că rotația era încă posibilă. La orice temperatură peste zero absolut mișcarea întâmplătoare a agitației termice, care este cu atât mai intensă cu cât este temperatura mai înaltă, acționează împotriva alinieriiordonate. Câmpul aplicat face energetic favorabilă pentru un dipol molecular o orientare paralelă cu câmpul, dar în mod continuu ciocnită de vecini, cel mai bun lucru pe care îl poate face este să stea ceva mai mult timp orientată în direcția corectă decît în aceea inversă. În apă, de exemplu, un câmp de 1 000 volt/cm rezultă într-o polarizare echivalentă cu aliniere perfectă de aproximativ o moleculă din 3 000. Chiar și așa, aceasta este o polarizare mult mai mare decît ar arăta o substanță nepolară în același câmp, și este motivul pentru constanta dielectrică extrem de înaltă a apei. Polarizarea globală într-un dielectric polar este în general proporțională cu intensitatea câmpului electric aplicat și invers proporțională cu temperatura absolută.

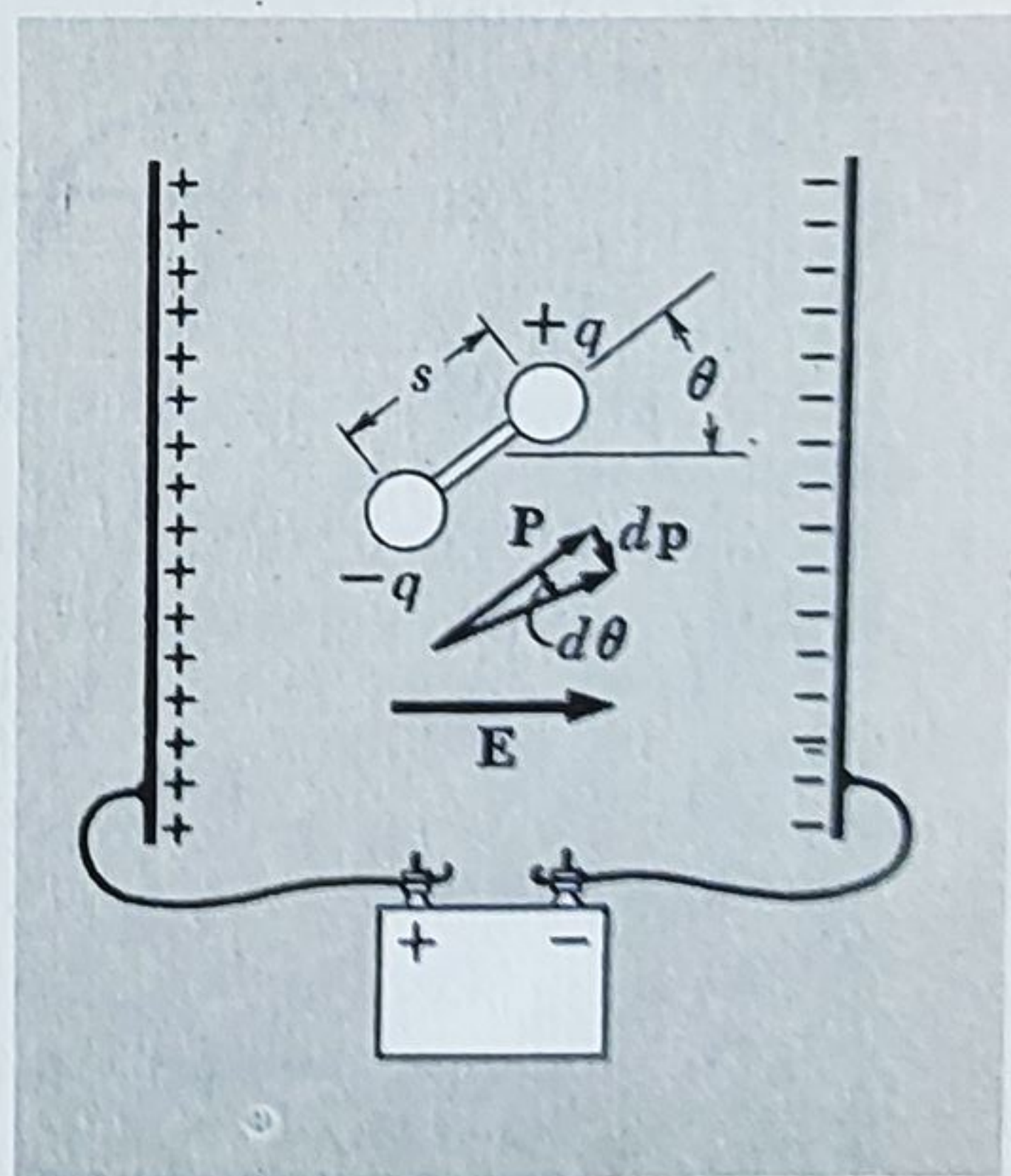


Fig. 9.35. O moleculă polară este ca două sarcini în capetele unei tije rigide. Un câmp  $\mathbf{E}$  exercită un cuplu asupra structurii.

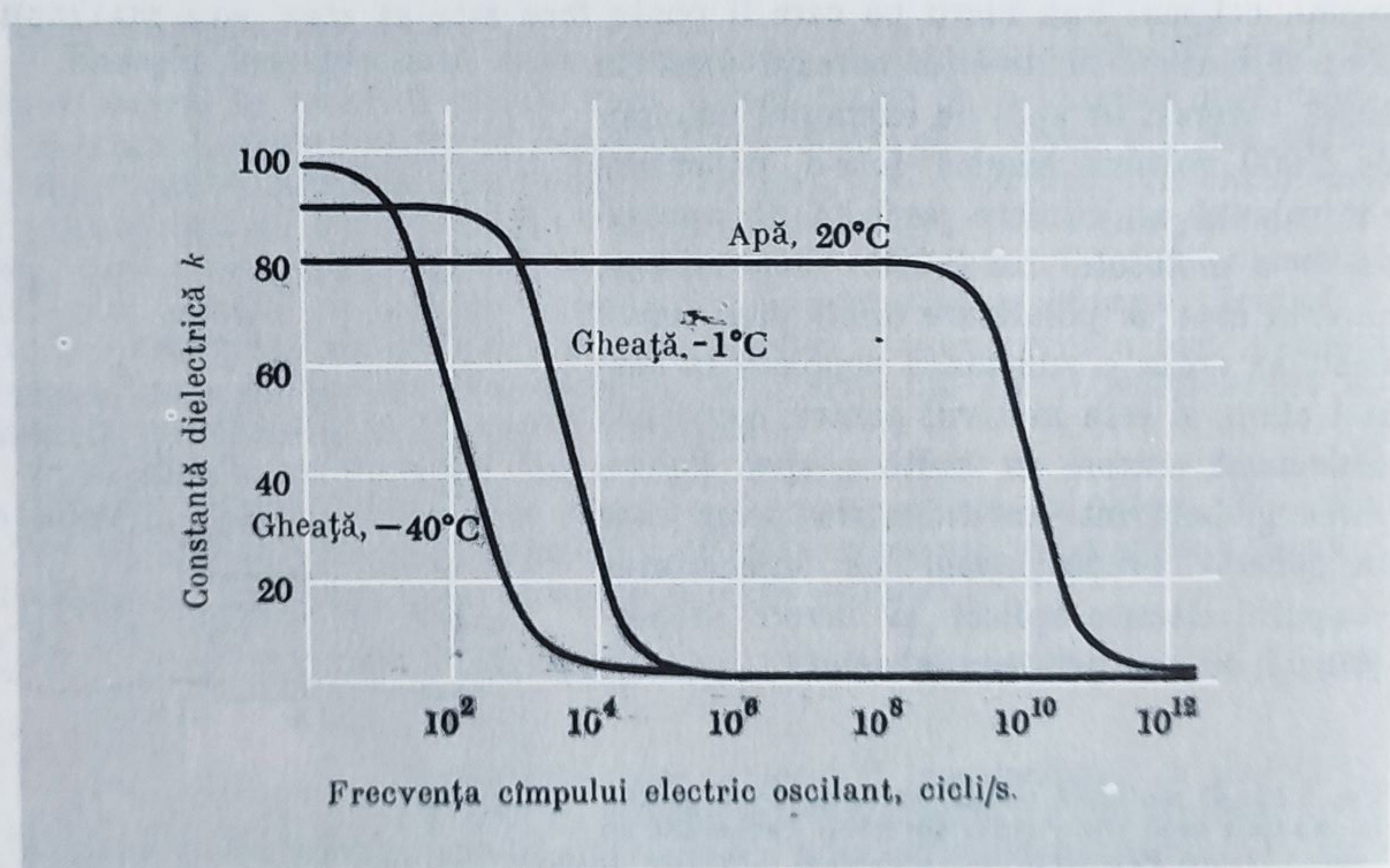


## 9.16. POLARIZAREA ÎN CÎMPURI VARIABILE

Pînă aici am considerat doar cîmpuri electrostatice în materie. Este nevoie să considerăm efectele cîmpurilor electrice care variază în timp, ca de exemplu cîmpul într-un condensator folosit într-un circuit de curent alternativ. Întrebarea importantă este, vor menține variațiile în polarizare pasul cu variațiile în cîmp? Va fi raportul lui  $P$  la  $E$ , la orice moment, același ca și într-un cîmp electric static? Pentru variații foarte lente nu ne-am aștepta la nici o diferență dar, ca întotdeauna, criteriul pentru caracterul lent al variației depinde de procesul fizic particular. Apare că polarizarea indusă și orientarea dipolilor permanenți sînt două procese cu timpi de răspuns cu totul diferiți.

Polarizarea indusă a atomilor și moleculelor apare prin deformarea structurii electronice. Este implicată o masă mică iar structura este foarte rigidă; frecvențele ei naturale de vibrație sînt extrem de înalte. Pentru a formula altfel, mișcările electronilor în atomi și molecule sînt caracterizate prin perioade de ordinul a  $10^{-16}$  secunde — ceva ca perioada undelor de lumină vizibilă. Pentru un atom,  $10^{-14}$  secunde este un timp *lung*. Nu are nici o dificultate în a-și rearanja structura electronică într-un astfel de timp. Din cauza aceasta, substanțele strict nepolare se comportă practic identic de la „curent continuu” pînă la frecvențe apropiate de acelea ale luminii vizibile. Polarizarea se menține în pas cu cîmpul și susceptibilitatea  $\chi_e = P/\epsilon_0 E$  este independentă de frecvență. Ceea ce se întîmplă cînd frecvența de oscilație a cîmpului se apropie de o frecvență naturală a structurii electronice este o întrebare interesantă pe care trebuie să o lăsăm pentru volumul următor (o consecință este curcubeul!).

Fig. 9.36. Variație cu frecvența a constantei dielectrice a apei și a gheții.





Orientarea unei molecule polare este un proces cu totul diferit de simpla deformare a norului electronic. Întreaga structură moleculară trebuie să se rotească. La scară microscopică, este oarecum ca a întoarce o alună cu cîte 180 de grade într-o plasă cu alune. Rezistența de frecare tinde să facă rotația să rămînă în urma cuplului și să reducă amplitudinea polarizării rezultante. Unde pe scara timpului apare acest efect, variază enorm de la o substanță polară la alta. În apă, „timpul de răspuns” pentru reorientarea de dipol este ceva ca  $10^{-11}$  secunde. Constanta dielectrică rămîne în jurul a 80 pînă la frecvențe de ordinul a  $10^{10}$  cicluri pe secundă. Peste  $10^{11}$  cicluri pe secundă  $k$  scade la o valoare modestă tipică pentru un lichid nepolar. Dipolii nu pot pur și simplu urma o atît de rapidă alternare a cîmpului. În alte substanțe, în special solide, timpul caracteristic poate fi mult mai lung. În apă chiar sub punctul de topire timpul de răspuns este în jurul a  $10^{-5}$  secunde. Figura 9.36 arată cîteva curbe experimentale ale constantei dielectrice în funcție de frecvență pentru apă și gheață.

Puteți întreba dacă o moleculă polară se poate într-adevăr roti în interiorul unei substanțe rigide compacte cum este un cristal. Se întîmplă în realitate în multe cristale, unde datorită vibrațiilor vecinilor, o moleculă se poate găsi brusc cu destul loc pentru a se roti ca o unitate. Dar întrebarea este bună, deoarece în unele solide, pot apărea deplasări ale sarcinilor electrice care nu se pot descrie ca rotații ale momentelor dipolare. Ne vom mai ocupa de această problemă.

### 9.17. CURENTUL DE SARCINĂ LEGATĂ

Ori de cîte ori polarizarea din materie variază în timp există un curent electric, o adevărată mișcare de sarcină. Să presupunem că există  $N$  dipoli per unitatea de volum în dielectric, și că în intervalul de timp  $dt$  fiecare variază de la  $p$  la  $p + dp$ . Atunci densitatea de polarizare macroscopică  $P$  variază de la  $P = Np$  la  $P + dP = N(p + dp)$ . Să presupunem că variația  $dp$  a fost efectuată prin deplasarea unei sarcini  $q$  prin distanța  $ds$ , în fiecare atom:  $q ds = dp$ . Atunci în timpul  $dt$  a existat în realitate un nor de sarcină de densitate  $\rho = Nq$ , în mișcare cu viteza  $v = ds/dt$ . Acesta este un curent de conducție de o anumită densitate  $J$  în amper/cm<sup>2</sup>:

$$J = \rho v = Nq \frac{ds}{dt} = N \frac{dp}{dt} = \frac{dP}{dt}. \quad (77)$$

Legătura între rata de variație a polarizării și densitatea de curent,  $J = dP/dt$ , este independentă de detaliile modelului. O polarizare variabilă este un curent de conducție, care nu diferă esențial de oricare altul.

Desigur, un astfel de curent este o sursă de cîmp magnetic. Dacă nu există alți curenți în preajmă, scriem a doua ecuație a lui Maxwell

$$c^2 \operatorname{rot} B = \partial E / \partial t + (1/\epsilon_0) J \quad \text{ca} \quad c^2 \operatorname{rot} B = \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (78)$$

Singura diferență între un curent de conducție „obișnuit” și densitatea de curent  $\partial P / \partial t$  este că unul implică sarcină liberă în mișcare, celălalt sarcină legată în mișcare. Există o distincție practică destul de evidentă



— nu puteți avea un curent de sarcină legată *staționar*, unul care curge neschimbat la nesfârșit. De obicei preferăm să menționăm separat curentul de sarcină legată și curentul de sarcină liberă, reținând  $\mathbf{J}$  drept simbol doar pentru densitatea curentului de sarcină liberă. Atunci pentru a include toți curenții în ecuațiile lui Maxwell, trebuie să o scriem în acest fel:

$$c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \underbrace{\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}}_{\text{Densitatea curentului de sarcină legată}} + \underbrace{\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}}_{\text{Densitatea curentului de sarcină liberă}}. \quad (79)$$

Într-un mediu dielectric,  $\mathbf{E} + (1/\epsilon_0)\mathbf{P} = k\mathbf{E}$ , conducând la o versiune mai scurtă a ecuației 79:

$$c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = k \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}. \quad (80)$$

Mai general, ecuația 79 poate fi de asemenea prescurtată prin introducerea vectorului  $\mathbf{D}$ , definit anterior ca  $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ :

$$c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right). \quad (81)$$

Termenul  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  este menționat în mod obișnuit drept curentul de deplasare. În realitate, partea din el care implică  $\partial \mathbf{P} / \partial t$  reprezintă, cum am văzut, un adevărat curent de conducție, sarcini reale în mișcare. Singura parte a densității de curent total care nu este simplă sarcină în mișcare este partea în  $\partial \mathbf{E} / \partial t$ , adevăratul curent de deplasare în vid pe care l-am discutat la sfârșitul capitolului 7. Incidental, dacă vrem să exprimăm toate componentele densității de curent complete în unități corespunzând acelorale lui  $\mathbf{J}$ , scriem ecuația 79 cum urmează:

$$c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ \underbrace{\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}_{\text{Densitatea curentului de deplasare în vid}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}}_{\text{Densitatea curentului de sarcină legată}} + \underbrace{\mathbf{J}}_{\text{Densitatea curentului de sarcină liberă}} \right]. \quad (82)$$

În distincția dintre sarcină legată și sarcină liberă este implicată o problemă pe care nu am pus-o: se pot totdeauna identifica fără ambiguitate „momentele dipolare moleculare” în materie, în special în materia solidă? Răspunsul este nu. Să luăm o imagine microscopică a unui strat subțire dintr-un cristal de clorură de sodiu. Aranjarea ionilor de sodiu pozitivi și ionilor de clor negativi a fost arătată în figura 1.7. Figura 9.37 este o secțiune transversală prin cristal, care se extinde în afară spre stînga și spre dreapta. Dacă vrem, putem considera o pereche adiacentă de ioni ca o moleculă neutră cu un moment dipolar. Grupînd ca în figura 9.37, a, descriem mediul ca avînd o densitate de polarizare macroscopică uniformă  $\mathbf{P}$ , un vector orientat în jos. În același timp, observăm că există un strat de sarcină pozitivă pe fața de sus a cristalului, și sarcină negativă pe fața



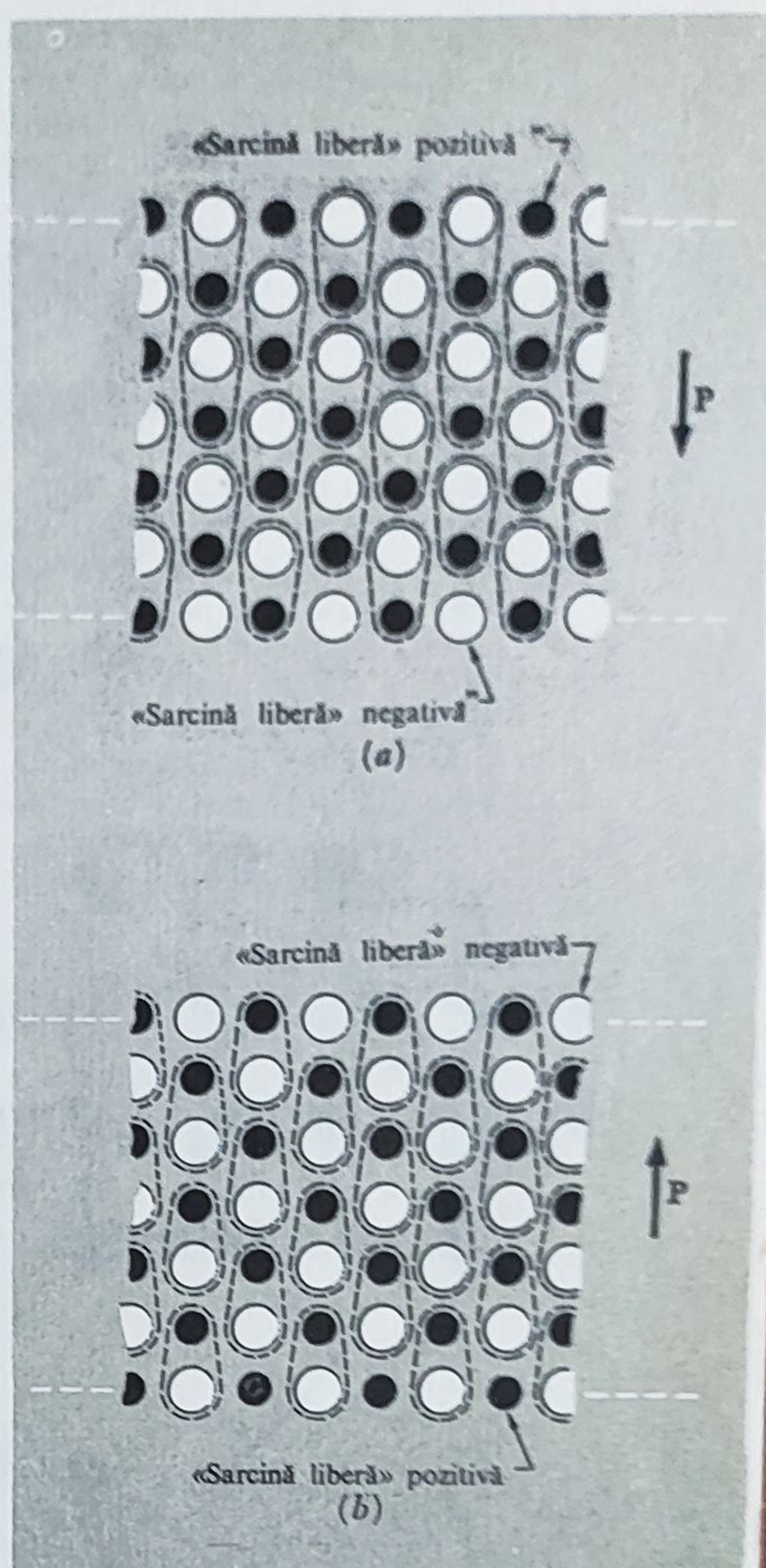
Fig. 9.37. Aceeași rețea ionică, cu sarcinile grupate în perechi ca „molecule” în două moduri: vectorul de polarizare orientat în jos (a), sau în sus (b). Sistemele sînt fizic identice, diferența este doar în descriere.

de jos care, nefiind incluse în moleculele noastre, trebuie socotite *sarcini libere*.

Acum am fi putut alege să grupăm ionii ca în figura 9.37, b. În această descriere,  $\mathbf{P}$  este un vector orientat în sus, dar avem un strat de sarcină liberă negativă pe fața de sus a cristalului și un strat de sarcină liberă pozitivă dedesubt. Fiecare dintre descrieri este corectă. Nu veți avea nici o dificultate în a găsi o alta, de asemenea corectă, în care  $\mathbf{P}$  este zero și nu există sarcină liberă. Fiecare dintre descrieri prezice  $\mathbf{E} = 0$ . Câmpul electric macroscopic  $\mathbf{E}$  este o mărime fizică observabilă. El poate depinde doar de distribuție de sarcină, nu de cum alegem să descriem distribuția de sarcină.

Acest exemplu ne învață că în universul atomic real distincția dintre „sarcină legată” și „sarcină liberă” este mai mult sau mai puțin arbitrară, și tot așa este conceptul de densitate de polarizare  $\mathbf{P}$ . Dipolul molecular este o noțiune bine definită doar cînd moleculele ca atare sînt identificabile — cînd există o oarecare rațiune fizică pentru a spune: „Acest atom aparține la această moleculă și nu aceleia”. În multe cristale o astfel de atribuire nu are înțeles. Un atom sau ion poate interacționa aproximativ la fel de puternic cu toți vecinii săi; se poate vorbi doar despre întreg cristalul ca o singură moleculă.

Orice arbitraritate în distincția dintre sarcina liberă și legată, se menține, desigur, în distincția dintre densitatea de curent a sarcinilor libere  $\mathbf{J}$  și  $\partial\mathbf{P}/\partial t$ . Să considerăm polarizarea unui cristal, cum este gheața. Rețeaua este tridimensională, dar am desenat în figura 9.38 o aranjare bidimensională cu trăsături intrucîtva asemănătoare. Să o numim gheață. În figura 9.38, a identificăm imediat moleculele de  $\text{H}_2\text{O}$ , deoarece observăm că fiecare atom de oxigen are exact doi atomi de H în apropiere. Cristalul așa cum e arătat este polarizat.  $\mathbf{P}$  este orientat în jos deoarece, așa cum s-a observat mai înainte în acest capitol, extremitatea de oxigen a moleculei de apă are un exces de sarcină negativă. Putem gândi părțile de hidrogen negre



87.83.73  
285.257.246.2



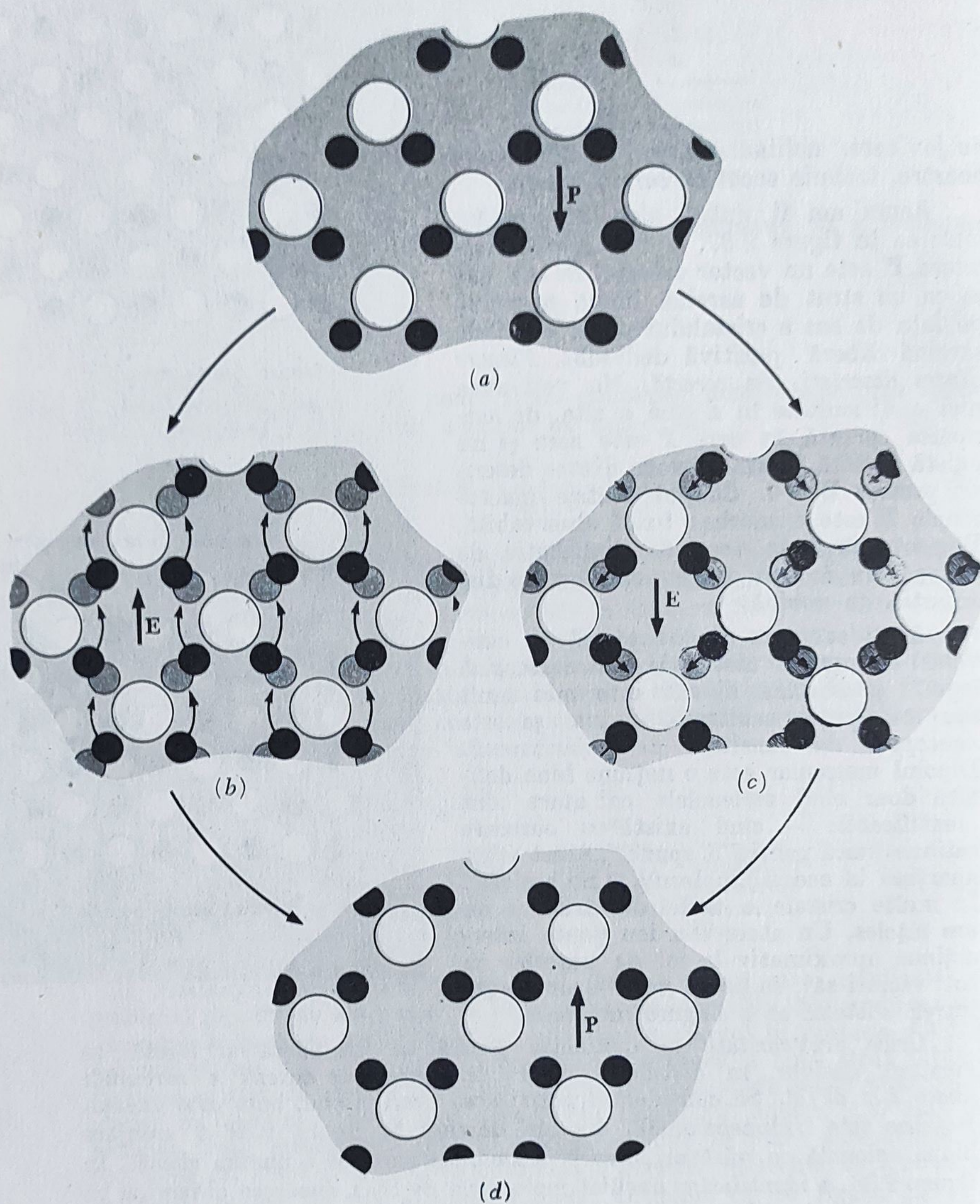


Fig. 9.38. Rețeaua de grupuri moleculare polarizate (a) poate fi schimbată în rețeaua de grupuri polarizate invers (d) în două moduri (b sau c).



în diagramă ca sarcini pozitive. Să presupunem cum că ceva se întâmplă care schimbă condiția internă a acestui cristal la aceea arătată în figura 9.38, *d*, o vedere microscopică a aceleiași regiuni. Acum dipolii sînt inversați, și descriem cristalul drept avînd o polarizare orientată *în sus*.

Schimbarea *ar fi putut* fi efectuată în două moduri esențial diferite, ilustrate în figura 9.38, *b* și *c*. În figura 9.38, *b* un cîmp electric  $E$  orientat în sus a fost aplicat, împingînd în sus extremitatea pozitivă a moleculelor, de fapt întorcînd fiecare moleculă. Există o mișcare *în sus* netă de sarcină pozitivă; curentul pe care îl reprezintă va fi dat de termenul  $\partial P/\partial t$  cum tocmai am învățat.

Figura 9.38, *c* reprezintă un proces cu totul diferit, în care aplicarea unui cîmp electric orientat în jos încurajează hidrogenii să schimbe partenerii. Fiecare se deplasează către cel mai apropiat atom de O de sub el. (Aceasta este mai ușor, în cristalul real, deoarece H-ul care se află între doi atomi O este într-un oarecare grad împărțit de ambii, dînd „legătura de hidrogen” care ține cristalul la un loc.) Configurația finală arată exact la fel. Dipolii sînt toți inversați — dar ceea ce a apărut a fost un curent în jos de sarcină pozitivă. Dacă calculăm curenții din acest proces, pentru a-i introduce în partea dreaptă a ecuației 79, avem de introdus același termen ca înainte,  $\partial P/\partial t$ , care corespunde la un curent în sus, dar trebuie să adăugăm un curent de conducție  $J$  în jos mai mare, corespunzînd mișcării fiecărei sarcini în jos printr-o întreagă constantă de rețea  $d$ . Diferența va fi curentul net adevărat provenind de la deplasarea în jos reală a sarcinii pozitive prin distanța  $s$ .

Observați că în fiecare caz curentul total curge în direcția cîmpului electric aplicat. Doar din măsurători macroscopice nu am putea spune care proces microscopic a avut loc. De fapt, încă se mai discută despre mecanismul de polarizare pentru gheață. Pentru a argumenta, este nevoie a cunoaște suficient despre structura microscopică pentru a fi siguri: ce este mai ușor, a întoarce o moleculă, ori transferul de protoni. Pentru noi, lecția de învățat este simplu aceasta: Mișcarea microscopică reală a *tuturor* sarcinilor determină curentul de conducție total, liber sau legat.

## PROBLEME

*Proiectarea unui condensator practic.*

9.1. Aveți la dispoziție bandă de polietilenă, de constantă dielectrică 2,3, lățime 6,0 cm și grosime 0,0025 cm, și de asemenea foiță de aluminiu cu lățimea 5,0 cm și grosimea 0,001 cm. Vreți să faceți un condensator cu capacitatea de aproximativ 0,05  $\mu F$ , sub forma unei înfășurări cilindrice compacte. Arătați cum ați putea-o face, estimînd cantitatea de bandă de fiecare fel care ar fi necesară, și diametrul complet al condensatorului terminat.

87,83, 73  
285, 257, 246



### Butelia de Leyda

9.2. În 1746 Profesorul Musschenbroek din Leyda a încărcat apa dintr-o sticlă prin atingerea unui fir, ieșind din gîtul sticlei, de mașina sa electrostatică. Cînd asistentul său, care ținea sticla într-o mînă, a încercat să îndepărteze firul cu cealaltă, a fost supus unui șoc violent. Astfel a atras condensatorul atenția oamenilor de știință. Descoperirea „buteliei de Leyda” a revoluționat experiențele din domeniul electricității. Deja în 1747 Benjamin Franklin descria experiențele sale cu „minunata butelie a d-lui Musschenbroek”. Butelia nu era de fapt decît sticlă cu un conductor de fiecare parte a ei. Pentru a vedea de ce a produs o astfel de senzație, estimați capacitatea unei butelii alcătuită dintr-o sticlă de 1 litru cu pereții de 2 mm grosime, sticla avînd constanta dielectrică 4. De ce diametru ar fi sfera care, în aer, ar avea aceeași capacitate?

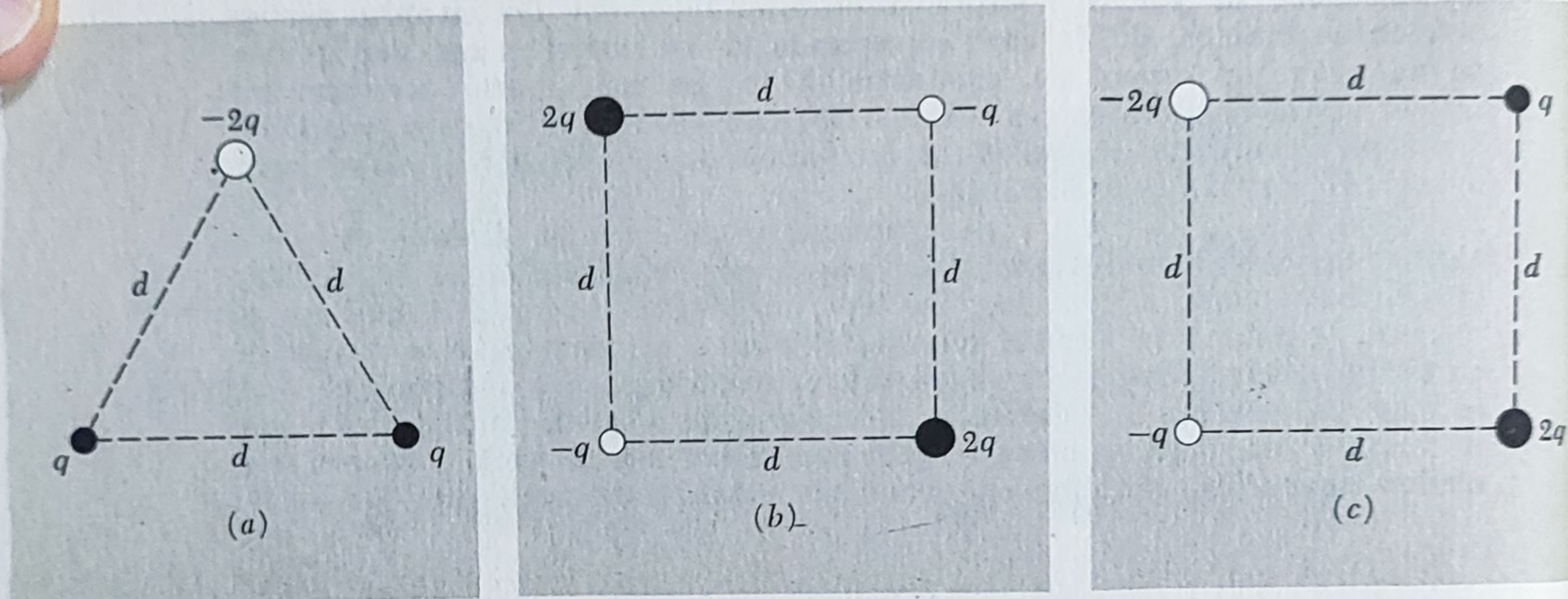


Fig. 1a problema 9.3

9.3. Care este mărimea momentului dipolar a fiecăreia dintre distribuțiile de sarcină în părțile (a), (b) și (c) ale figurii? Care este direcția vectorului moment dipolar  $\mathbf{p}$ ?

*Distribuția de sarcină într-o moleculă*

9.4. În molecula de acid clorhidric distanța dintre nucleul de clor și proton este 1,28 Å. Să presupunem că electronul de la atomul de hidrogen este transferat în întregime la atomul de clor, unindu-se cu ceilalți electroni pentru a forma o sarcină negativă sferic simetrică și centrată pe nucleul de clor. Cum se compară momentul dipolar electric din acest model cu momentul dipolar real al moleculei de HCl dat în fig. 9.16? Unde trebuie să fie localizat adevăratul „centru de gravitate” al distribuției de sarcină negativă în molecula reală? (Nucleul de clor are o sarcină 17 e, nucleul de hidrogen, o sarcină e.)



*Cîmpul unui dipol molecular*

9.5. O moleculă de acid clorhidric este situată în origine cu linia H—Cl de-a lungul axei  $z$  și Cl deasupra. Care este direcția cîmpului electric, și intensitatea sa în V/m, într-un punct cu 10 Å mai sus de origine, pe axa  $z$ ? într-un punct cu 10 Å în afara originii pe axa  $y$ ?

*Cîmpul unui dipol macroscopic*

9.6. Un condensator plan-paralel, cu o capacitate măsurată  $C = 300 \mu\text{F}$  este încărcat la o diferență de potențial de 1800 volți. Plăcile sînt la 1,5 cm depărtare. Sîntem interesați în cîmpul în afara condensatorului, așa-numitul cîmp „de margine” pe care de obicei îl neglijăm. În particular, am dori să știm cîmpul la o distanță de la condensator mare în comparație cu mărimea condensatorului. Acesta poate fi găsit considerînd distribuția de sarcină pe condensator ca drept un dipol. Estimați intensitatea cîmpului electric (a) într-un punct la 3 metri de condensator în planul plăcilor și (b) într-un punct la aceeași depărtare pe direcția perpendiculară plăcilor.

*Condensatorul permeabil*

9.7. În § 4.11 am discutat timpul de relaxare al unui condensator umplut cu un material de rezistivitate  $\rho$ . Dacă priviți în urmă la acea discuție veți observa că am evitat problema constantei dielectrice a materialului. Acum puteți îndrepta omisiunea. Introduceți  $k$  în mod corect în expresia pentru constanta de timp. Un condensator permeabil important pentru noi toți este format din peretele unei celule vii, un izolator (printre multe sale alte funcțiuni!) care separă două fluide conductoare. Proprietățile sale electrice sînt de un interes deosebit în cazul unei celule nervoase, deoarece propagarea unui impuls nervos este însoțită de schimbări rapide în diferența de potențial electrică între interior și exterior. În nota din § 3.5, am menționat că condensatorul de membrană celulară are în mod tipic o capacitate în jurul a  $1 \mu\text{F}/\text{cm}^2$  de arie de membrană. Se crede că membrana este alcătuită din material avînd constanta dielectrică de aproximativ 3. Puteți acum calcula ce grosime implică aceasta. Alte măsurători electrice au indicat că rezistența unui  $\text{cm}^2$  de membrană celulară, măsurată de la fluidul conductor de pe o parte la cealaltă, este în jurul a 1000 ohmi. Arătați că constanta de timp a unui asemenea condensator este independentă de aria condensatorului. Cît este de mare în acest caz? Unde s-ar situa rezistivitatea unei astfel de membrane în diagrama din figura 4.6?

*O sferă polarizată*

9.8. Dacă toți dipolii moleculari dintr-o picătură de apă cu raza de 1 mm ar fi orientați în același fel, care ar fi intensitatea maximă a cîmpului (a) la 10 cm depărtare de picătură? (b) la suprafața picăturii?

*Un conductor sferic într-un cîmp uniform*

9.9. Formula noastră pentru sfera dielectrică poate fi în realitate folosită pentru a descrie o sferă metalică într-un cîmp uniform. Pentru a o demonstra, cercetați cazul limită,  $k \rightarrow \infty$ , și arătați că cîmpul exterior  $A$



ia o formă care satisface condițiile de frontieră de conductor perfect. Ce se întâmplă cu câmpul interior? Faceți o schiță a câtorva linii de câmp în acest caz limită. Cît este de mare momentul dipolar indus într-o sferă conductoare de rază  $a$ , într-un câmp  $E_0$ ? Care ar fi diametrul unei sfere perfect conductoare care ar avea aceeași polarizabilitate ca și atomul de hidrogen?

**9.10.** Cît de mult diferă momentul dipolar indus al unei picături de apă ( $k = 81$ ) de acela al unei bile de rulment de același diametru în același câmp?

*Deducere alternativă a câmpului într-o sferă polarizată*

**9.11.** În § 9.10 faptul că câmpul electric este uniform în interiorul sferei polarizate a fost dedus din forma potențialului pe frontieră. Puteți arăta aceasta de asemenea prin superpunerea câmpurilor interne a două bile de sarcină ale căror centre sînt separate. (a) Arătați că în interiorul unei distribuții uniforme de sarcină  $E$  este proporțional cu  $r$ . (b) Acum luați două distribuții sferice de densități  $\rho$  și  $-\rho$ , centre  $C_1$  și  $C_2$  și arătați că câmpul rezultat este constant și paralel cu linia de la  $C_1$  și  $C_2$ . (c) Analizați în același mod câmpul unei vergele cilindrice circulare care este polarizată perpendicular pe axă.

**9.12.** Figura arată trei condensatori de aceeași arie și distanțare între plăci. Să numim capacitatea condensatorului în vid  $C_0$ . Fiecare din celelalte este pe jumătate umplut cu dielectric, de aceeași constantă dielectrică  $k$ , dar așezat în mod diferit, cum se arată. Găsiți capacitatea fiecăruia dintre acești doi condensatori. (Neglijați efectele de margine.)

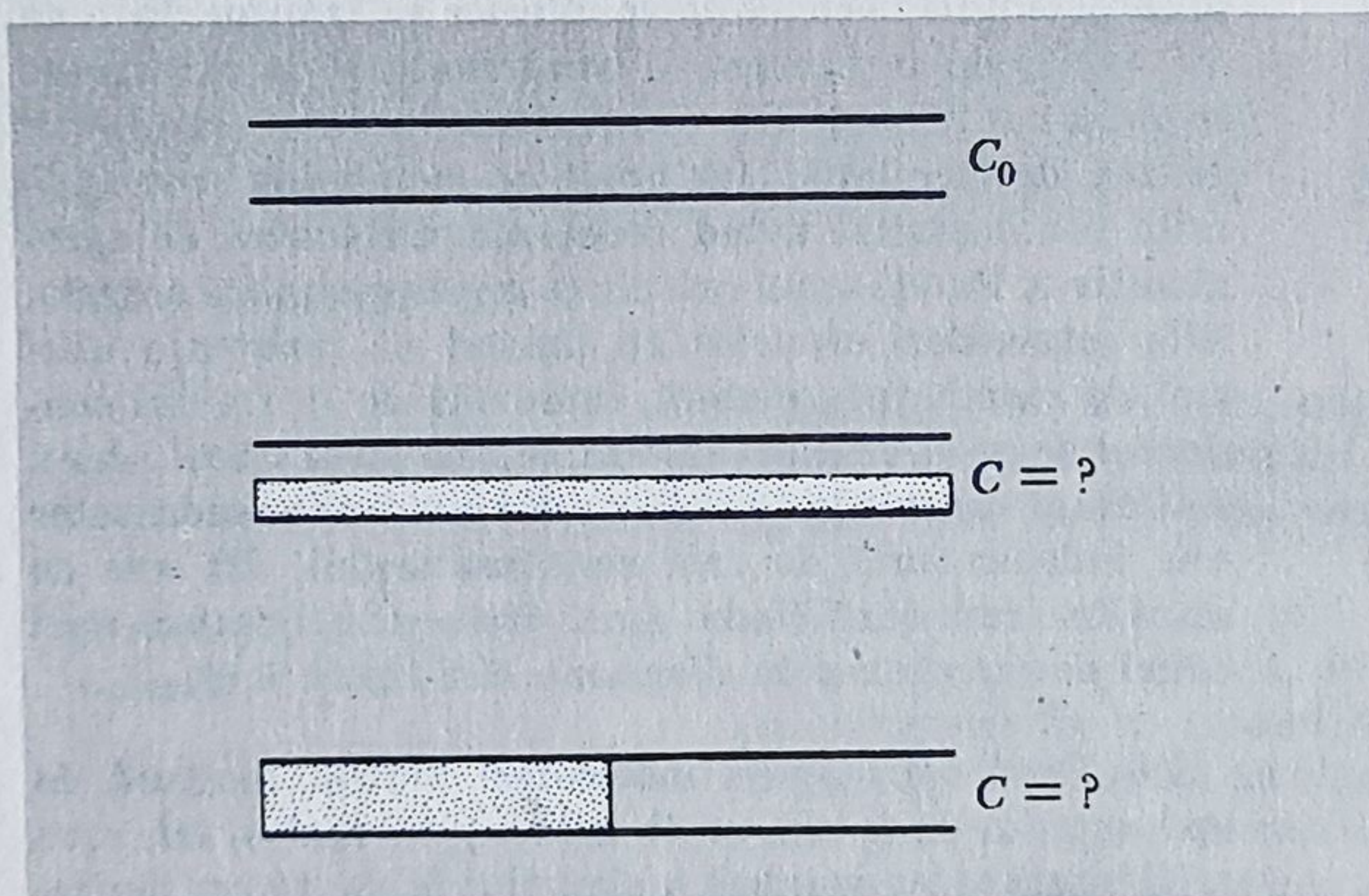


Fig. 1a problema 9.12

*Înmagazinarea energiei într-un condensator; câteva considerațiuni practice.*

**9.13.** Să considerăm condensatorul drept un dispozitiv de înmagazinare a energiei. Limitarea practică asupra diferenței de potențial dintre plăcile unui condensator este „tăria dielectrică” a stratului dielectric, care este intensitatea câmpului maxim care poate exista fără a



se produce o scînteie. Aceasta este în mod tipic  $10^5$  volți/cm, pentru un dielectric lichid bun cu  $k \approx 2,3$  și densitate  $\rho \approx 1$  gram/cm<sup>3</sup>. Neglijînd greutatea electrozilor și carcasei, cîți joule de energie pot fi înmagazinați pe kilogram de condensator? (Observați că aceasta este independent de capacitate, formă, număr de armături etc.). Alegînd joule/kilogram drept „indice de calitate” pentru un rezervor de energie, comparați condensatorul cu o baterie acumuloare de automobil, și cu un volant rotitor. Veți avea de făcut cîteva aprecieri rezonabile asupra greutății și debitului energetic al unei baterii acumuloare, și veți avea de decis ce limitează viteza unui tambur. Care este un avantaj al condensatorului ca rezervor de energie?

9.14. Figura arată schematic două procese diferite, în fiecare din ele o bucată de dielectric este introdusă între

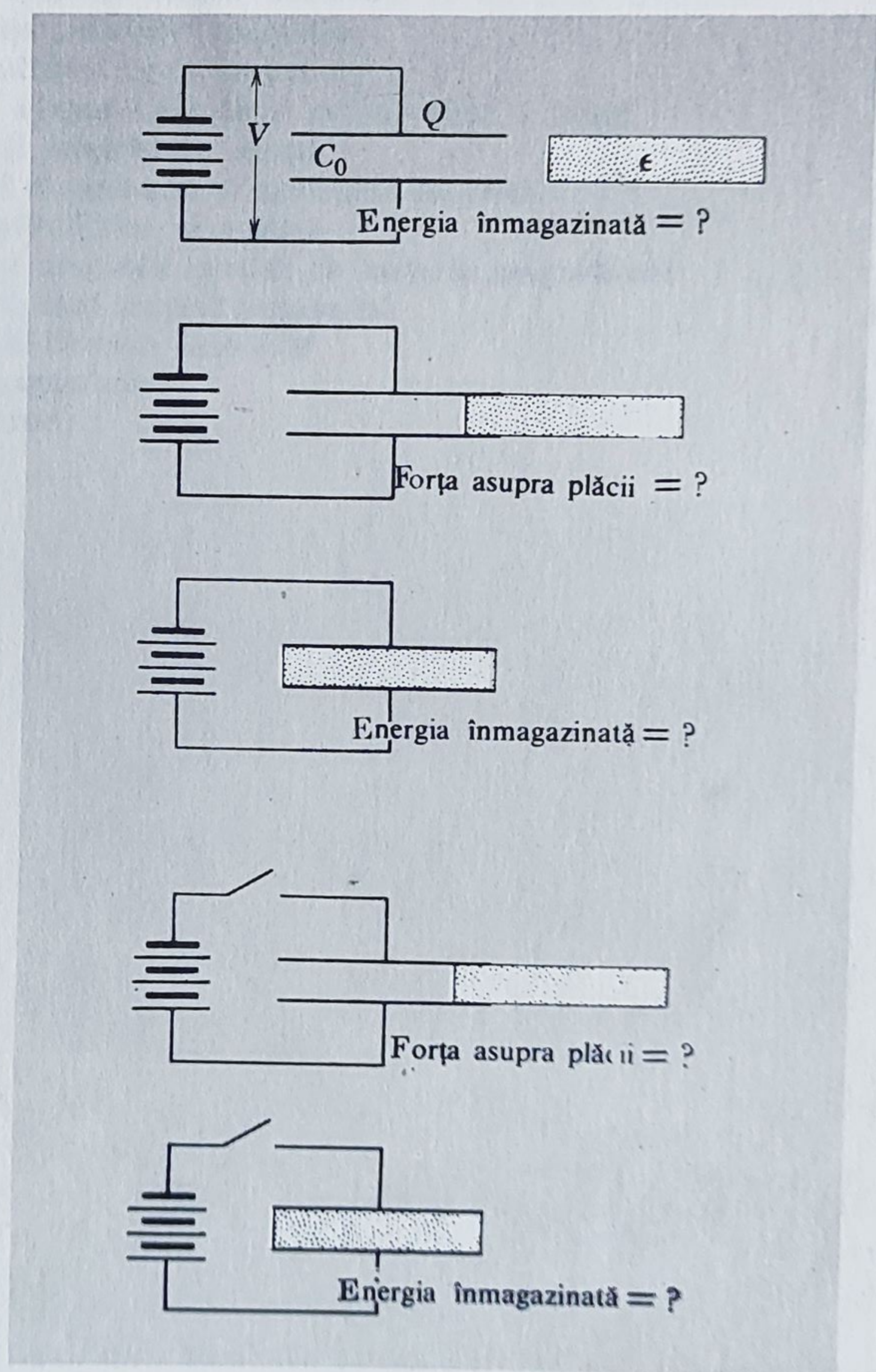


Fig. 1a problema 9.14



plăcile unui condensator încărcat. Urmează să analizați variațiile de energie implicate, cum se sugerează prin întrebările din desene. Ce puteți spune despre forța asupra dielectricului?

**9.15.** O sferă metalică de rază  $a$  este înconjurată printr-o pătură dielectrică groasă de rază interioară  $a$ , rază exterioară  $b$ , și constantă dielectrică  $k$ . Sfera metalică poartă o sarcină liberă  $Q$ . Nu există sarcină liberă pe sau în dielectric. Analizați complet acest sistem, determinând potențialul sferei metalice și distribuția de sarcină legată.



plăcile unui condensator încărcat. Urmează să analizați variațiile de energie implicate, cum se sugerează prin întrebările din desene. Ce puteți spune despre forța asupra dielectricului?

**9.15.** O sferă metalică de rază  $a$  este înconjurată printr-o pătură dielectrică groasă de rază interioară  $a$ , rază exterioară  $b$ , și constantă dielectrică  $k$ . Sfera metalică poartă o sarcină liberă  $Q$ . Nu există sarcină liberă pe sau în dielectric. Analizați complet acest sistem, determinând potențialul sferei metalice și distribuția de sarcină legată.



## Capitolul 10

### Cîmpuri magnetice în substanță

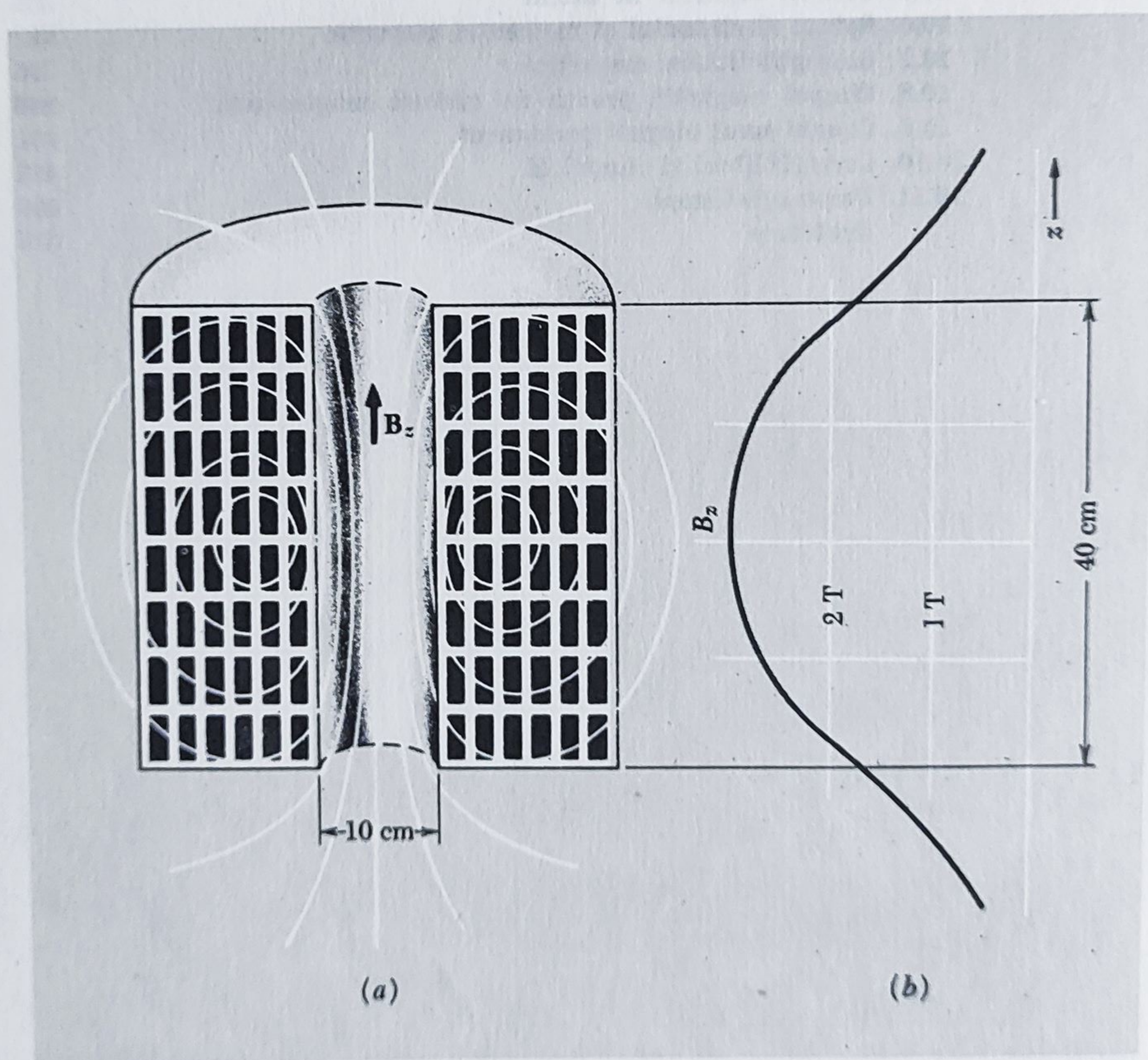
10.1. Cum răspund diferite substanțe la un cîmp magnetic	370
10.2. Absența „sarcinii” magnetice	375
10.3. Cîmpul unei bucle de curent	377
10.4. Forța asupra unui dipol într-un cîmp exterior	383
10.5. Curenți electrici în atomi	385
10.6. Spinul electronului și momentul magnetic	392
10.7. Susceptibilitatea magnetică	395
10.8. Cîmpul magnetic produs de materia magnetizată	396
10.9. Cîmpul unui magnet permanent	401
10.10. Curenții liberi și cîmpul $H$	405
10.11. Feromagnetismul	409
Probleme	415



### 10.1. CUM RĂSPUND DIFERITE SUBSTANȚE LA UN CÎMP MAGNETIC

Să ne gîndim că facem niște experiențe cu un cîmp magnetic foarte intens. Mai precis, să presupunem că am construit un solenoid de diametru interior 10 cm, lungime 40 cm, ca acela arătat în figura 10.1. Diametrul său exterior este 40 cm, cea mai mare parte din spațiu fiind umplută cu înfășurarea de cupru. Această bobină dă un cîmp staționar de 3 tesla

Fig. 10.1. (a) O bobină proiectată să producă un cîmp magnetic intens. Înfășurarea răcită cu apă este arătată în secțiune. (b) Un grafic al inducției magnetice  $B_z$ , pe axa bobinei.





la centru dacă este alimentat cu 400 kilowatt de putere electrică — și circa 150 de litri de apă pe minut, pentru a îndepărta căldura. Menționăm aceste detalii practice pentru a arăta că dispozitivul nostru, deși cu nimic extraordinar, este totuși un magnet de laborator întru totul respectabil. Intensitatea câmpului este de aproape  $10^5$  ori câmpul terestru, și probabil de 5 sau 10 ori mai puternic decât câmpul lângă orice bară magnetizată de fier sau magnet în formă de potcoavă cu care ați fi putut lucra. Câmpul va fi cu totul uniform în vecinătatea centrului solenoidului, scăzând, pe axă la fiecare din capete, la aproximativ jumătate din valoarea sa centrală. Câmpul acesta va fi mai puțin uniform decât câmpul solenoidului din figura 6.18, deoarece bobina noastră este echivalentă cu o superpoziție de bobine cu raportul lungime-diametru variind de la 4/1 la 1/1. De fapt, dacă analizăm bobina noastră în acel mod și folosim formula (ec. 6.44) pe care am dedus-o pentru câmpul pe axa unui solenoid cu o înfășurare într-un singur strat, nu este greu să calculăm câmpul central în mod exact. Un grafic al intensității câmpului pe axă, cu câmpul central luat ca 3 tesla este cuprins în figura 10.1. Intensitatea chiar la capetele bobinei este 1,8 tesla, și în acea regiune câmpul variază cu un gradient de aproximativ 17 tesla/metru.

Să introducem diferite substanțe în acest câmp și să vedem dacă acționează vreo forță asupra lor. În general, detectăm o forță. Ea se anulează când curentul în bobină este întrerupt. Descoperim îndată că forța este cea mai intensă nu când mostra din substanță este la centrul bobinei unde câmpul magnetic  $B_z$  este cel mai puternic, dar când este localizată în vecinătatea capătului bobinei unde gradientul,  $dB_z/dz$ , este mare. Să suspendăm fiecare mostră chiar la capătul de sus al bobinei. Figura 10.2 arată o astfel de mostră, conținută într-un tub de încercare suspendat printr-un resort care poate fi calibrat pentru a indica extra-forța produsă de câmpul magnetic. Desigur avem de făcut o experiență „de referință” doar cu tubul de încercare și suspensia, pentru a ține seama de forța magnetică asupra oricărui altceva decât mostra.

Găsim într-un astfel de experiment că forța asupra unei substanțe particulare — aluminiu metalic, de exemplu — este proporțională cu masa probei și independentă de forma ei cîtă vreme proba nu este prea mare. (Experiențe cu probe mici în această bobină arată că forța rămîne practic

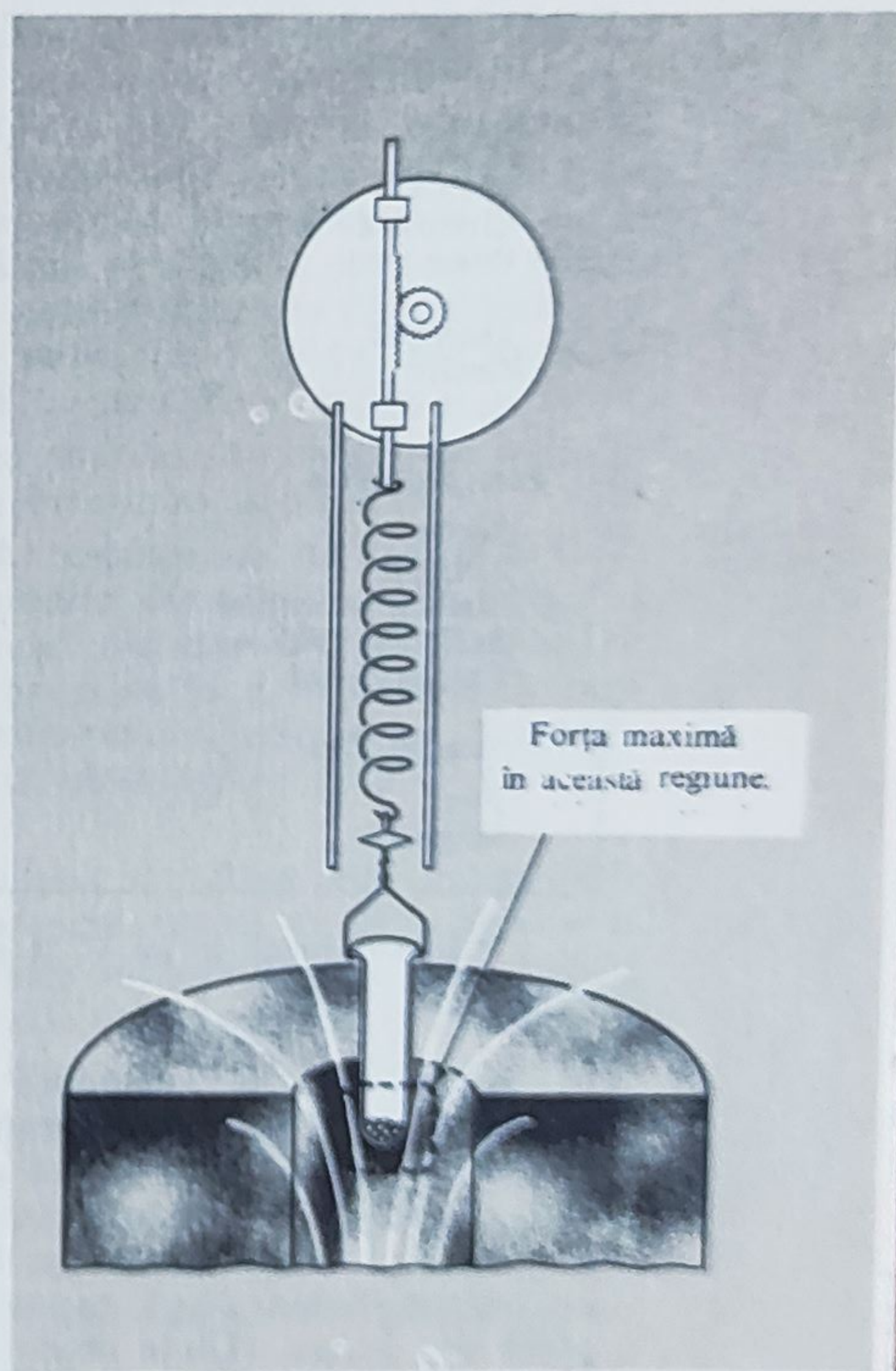


Fig. 10.2. Montaj pentru măsurarea forței asupra unei substanțe într-un câmp magnetic.

81,83,73  
285,257



constantă pe o regiune de câțiva centimetri întindere, la capătul bobinei; dacă folosim probe nu mai mari de 1 sau 2 cm<sup>3</sup> în volum ele pot fi bine ținute în interiorul acestei regiuni.) Putem exprima rezultatele noastre cantitative, pentru o substanță dată, ca atîția newton forță pe gram de probă, în condițiile  $B_z = 1,8$  tesla,  $dB_z/dz = 17$  tesla/metru.

Dar mai întii rezultatele calitative, care sînt puțin deconcertante: Pentru un mare număr de substanțe pure cu totul obișnuite forța observată, deși ușor măsurabilă, pare după întreg efortul nostru de a obține un cîmp magnetic intens, ridicol de mică. Ea este de  $10^{-4}$  sau  $2 \times 10^{-4}$  newton pe gram, în mod tipic, nu mai mult decît cîteva procente din greutatea probei. Forța este orientată în sus pentru unele substanțe, și în jos pentru alte substanțe. Aceasta nu are nimic de-a face cu *sensul* cîmpului magnetic, după cum putem verifica inversînd curentul în bobină. În schimb, apare că unele substanțe sînt totdeauna atrase în sensul inducției *crescătoare*, altele în direcția intensității de cîmp *descrescătoare*, independent de direcția cîmpului.

Forța care acționează asupra unui gram de probă aflată în cîmp magnetic, cu  $B_z = 1,8$  tesla,  $dB_z/dz = 17$  tesla/metru

Substanța	Formula	Forța* (10 <sup>-5</sup> N)
Diamagnetice		
Apă	H <sub>2</sub> O	-22
Cupru	Cu	-2,6
Plumb	Pb	-37
Clorură de sodiu	NaCl	-15
Cuarț	SiO <sub>2</sub>	-16
Sulf	S	-16
Diamant	C	-16
Grafit	C	-110
Azot lichid	N <sub>2</sub>	-10 (78K)
Paramagnetice		
Sodiu	Na	+20
Aluminiu	Al	+17
Clorură de cupru	CuCl <sub>2</sub>	+280
Sulfat de nichel	NiSO <sub>4</sub>	+830
Oxigen lichid	O <sub>2</sub>	+7 500 (90K)
Feromagnetice		
Fier	Fe	+400 000
Magnetit	Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	+120 000

\* Sensul forței: în jos +, în sus —. Toate măsurătorile făcute la 20° (cu excepțiile notate).

Găsim cîteva substanțe care sînt atrase în bobină cu o forță considerabil mai mare. De exemplu, cristalele de clorură de cupru sînt atrase în jos cu o forță de  $2,8 \cdot 10^{-3}$  newtoni pe gram de probă. Oxigenul lichid se comportă spectaculos în această experiență; el este atras în bobină cu o forță de opt ori greutatea sa. De fapt, dacă am fi adus un balon neacoperit de oxigen lichid lîngă capătul de jos al bobinei, lichidul ar fi ridicat în afară din balon. (Unde credeți că s-ar opri?) Azotul lichid, de altă parte,



se dovedește a fi cu totul neinteresant; un gram de azot lichid este împins în afară din bobină cu forța slabă de  $10^{-4}$  newtoni. În tabelul precedent am trecut câteva rezultate care s-ar putea obține într-o astfel de experiență. Substanțele, incluzându-le pe cele deja amintite, au fost alese pentru a sugera, cît se poate mai bine cu câteva exemple, domeniul larg de comportare magnetică pe care îl întîlnim în materiale obișnuite.

După cum știți, câteva substanțe, dintre care cea mai familiară este fierul, par mult mai „magnetice” decît oricare altele. În tabel dăm forța care ar acționa asupra unei bucăți de 1 gram de fier așezată în aceeași poziție în cîmp ca și celelalte probe. Forța este aproape 5 N! (Nu vom fi fost atît de naivi încît să ne apropiem de magnetul nostru cu mai multe grame de fier suspendate într-un tub de probă pe o spirală delicată — trebuie folosită o suspensie diferită.) Observați că există un factor de mai mult de  $10^5$  între forța care acționează asupra unui gram de fier și forța asupra unui gram de cupru, elemente altfel nu radical diferite. Incidental, aceasta sugerează că măsurători magnetice demne de încredere asupra unei substanțe cum este cuprul pot să nu fie ușoare. O contaminare de câteva părți la milion prin particule de fier metalic vor falsifica cu totul rezultatul.

Există o altă diferență esențială între comportarea fierului și a magnetitei și aceea a celorlalte substanțe din tabel. Să presupunem că facem încercarea simplă, prin variere a intensității cîmpului magnetului, pentru a vedea dacă forța asupra probei este proporțională cu cîmpul. De exemplu, am putea reduce curentul în bobină la jumătate, prin aceasta înjumătățind atît intensitatea cîmpului cît și gradientul  $dB_z/dz$ . Am găsi, în cazul fiecărei substanțe deasupra fierului în tabelă, că forța este redusă la o *pătrime* din valoarea sa precedentă, în timp ce forța asupra probei de fier și aceea asupra magnetitei, ar fi reduse doar la jumătate sau poate ceva mai puțin. Evident forța, cel puțin în aceste condiții, este proporțională cu pătratul intensității cîmpului pentru toate celelalte substanțe listate, dar aproape proporțională intensității însăși a cîmpului pentru Fe și  $Fe_3O_4$ .

Apare că am putea avea de a face cu mai multe fenomene diferite aici. Ca un mic pas către înțelegere, putem introduce o clasificare.

Mai întîi, acele substanțe care sînt slab respinse de magnetul nostru, apă, clorură de sodiu, cuarț etc., sînt numite *diamagnetice*. Majoritatea compușilor anorganici și practic toți compușii organici sînt diamagnetici. Apare, de fapt, că diamagnetismul este o proprietate a *fiecărui* atom sau molecule. Cînd comportarea opusă este observată, aceasta se întîmplă deoarece diamagnetismul este întrecut de un efect diferit și mai puternic, unul care conduce la atracție.

Substanțele care sînt atrase către regiunea de cîmp mai intens sînt numite *paramagnetice*. În unele cazuri, paramagnetismul nu este mult mai puternic decît diamagnetismul comun. În alte materiale cum este  $NiSO_4$  și  $CuCl_2$  din lista noastră, efectul paramagnetic este mult mai puternic. În aceste substanțe de asemenea, efectul *crește* cînd temperatura este coborîtă, conducînd la efecte deosebit de mari la temperaturi îngă zero absolut. Creșterea paramagnetismului cu scăderea temperaturii este responsabilă în parte pentru forța mare măsurată pentru oxigenul lichid. Dacă gîndiți că toate acestea se pot explica simplu, observați că cuprul este diamagnetic în timp ce clorura de cupru este paramagnetică, dar sodiul este paramagnetic în timp ce clorura de sodiu este diamagnetică.

85,83,72  
285,25



În fine, substanțele care se comportă ca fierul și magnetita sînt numite *feromagnetice*. Pe lîngă metalele comune din această clasă, fier, cobalt și nichel, sînt cunoscute multe aliaje feromagnetice și compuși cristalini. De fapt cercetarea curentă în feromagnetism mărește în mod constant lista.

În acest capitol avem două sarcini. Una este să dezvoltăm o tratare de scară largă a fenomenelor implicînd materiale magnetizate, în care materialul însuși este caracterizat prin cîțiva parametri și relațiile determinate experimental între ei. Este ca o tratare a dielectricilor bazată pe cîteva relații observate între cîmpul electric și polarizarea globală. Uneori numim o astfel de teorie *fenomenologică*. A doua noastră sarcină este să încercăm să înțelegem, cel puțin într-un mod general, originea atomică a diferitelor efecte magnetice. Chiar mai mult decît fenomenele dielectrice efectele magnetice, odată înțelese, dezvăluie cîteva trăsături de bază ale structurii atomice.

Un fapt general se desprinde din tabel. Foarte puțină energie, în scara energiilor moleculare, este implicată în diamagnetism și paramagnetism. Să luăm exemplul extrem al oxigenului lichid. Pentru a scoate 1 gram de oxigen lichid în afara cîmpului magnetului nostru, am avea nevoie de o cantitate de lucru de ordinul de mărime a  $7,5 \times 10^{-2}$  newton ori o distanță de cîțiva centimetri (deoarece intensitatea cîmpului descrește substanțial pe o distanță de cîțiva centimetri). Să spunem, în mare,  $5 \times 10^{-3}$  joule. Acum este nevoie de 300 de ori acea energie (0,4 calorii, sau 1,6 joule) pentru a ridica temperatura a 1 gram de  $O_2$  lichid cu un grad, și este nevoie de mai mult de 30 000 ori atîta energie pentru a evapora lichidul, adică, pentru a separa moleculele una de alta. Orice s-ar putea întîmpla în oxigen lichid la un nivel molecular, drept rezultat al cîmpului magnetic, este aparent un lucru foarte minor în termeni energetici.

Știm că fie și cîmpuri magnetice intense nu au practic nici o influență asupra proceselor chimice, și aceasta se petrece pentru biochimie, de asemenea. Vă puteți pune mina și brațul (nu acela cu ceasul!) într-un solenoid de 3 tesla, fără nici o senzație semnificativă sau consecință. Este greu de prezis dacă brațul dumneavoastră va fi paramagnetic sau diamagnetic, dar forța asupra lui nu va fi în orice caz mai mult de  $10^{-1}$  N. Generații de șoareci au fost născuți și crescuți în cîmpuri magnetice intense fără schimbări semnificative. Nici alte experiențe biologice nu au adus nimic remarcabil în sensul unor efecte magnetice asupra proceselor chimice\*. Aceasta nu este surprinzător. În interacția cu materia, cîmpul magnetic joacă un rol complet diferit de acela al cîmpului electric. Deoarece atomii și moleculele sînt alcătuiți din sarcini electrice în mișcare lentă, forțele electrice domină întru totul scena moleculară.

\* Aceasta nu înseamnă că efectele mici sînt totdeauna fără consecință. La urmă, un argument ca acela pe care tocmai l-am folosit ar arăta că gravitatea este energetic neimportantă la scară moleculară, totuși pomii pe coasta unui deal cresc vertical. Aceasta probabil implică forța globală asupra unei unități biologice mai mari decît dimensiunile moleculare. Într-adevăr, un „tropism” instructiv asemănător a fost demonstrat experimental în cazul puieților crescînd într-un cîmp magnetic puternic neomogen. Nici nu sugerăm că proprietățile magnetice ale moleculelor nu sînt interesante pentru biochimist. Din contră, intermediarii în reacții chimice sînt cîteodată detectabili, chiar identificabili, prin comportarea lor magnetică. Dar acesta este un lucru cu totul diferit de influența unui cîmp extern asupra unui proces chimic. În treacăt, dacă vă așezați capul într-un cîmp magnetic intens și îl scuțurați, veți „gusta” curenții electrolitici în gura dumneavoastră — simplă manifestare a forței electromotoare induse.



În fine, substanțele care se comportă ca fierul și magnetita sînt numite *feromagnetice*. Pe lîngă metalele comune din această clasă, fier, cobalt și nichel, sînt cunoscute multe aliaje feromagnetice și compuși cristalini. De fapt cercetarea curentă în feromagnetism mărește în mod constant lista.

În acest capitol avem două sarcini. Una este să dezvoltăm o tratare de scară largă a fenomenelor implicînd materiale magnetizate, în care materialul însuși este caracterizat prin cîțiva parametri și relațiile determinate experimental între ei. Este ca o tratare a dielectricilor bazată pe cîteva relații observate între cîmpul electric și polarizarea globală. Uneori numim o astfel de teorie *fenomenologică*. A doua noastră sarcină este să încercăm să înțelegem, cel puțin într-un mod general, originea atomică a diferitelor efecte magnetice. Chiar mai mult decît fenomenele dielectrice efectele magnetice, odată înțelese, dezvăluie cîteva trăsături de bază ale structurii atomice.

Un fapt general se desprinde din tabel. Foarte puțină energie, în scara energiilor moleculare, este implicată în diamagnetism și paramagnetism. Să luăm exemplul extrem al oxigenului lichid. Pentru a scoate 1 gram de oxigen lichid în afara cîmpului magnetului nostru, am avea nevoie de o cantitate de lucru de ordinul de mărime a  $7,5 \times 10^{-2}$  newton ori o distanță de cîțiva centimetri (deoarece intensitatea cîmpului descrește substanțial pe o distanță de cîțiva centimetri). Să spunem, în mare,  $5 \times 10^{-3}$  joule. Acum este nevoie de 300 de ori acea energie (0,4 calorii, sau 1,6 joule) pentru a ridica temperatura a 1 gram de  $O_2$  lichid cu un grad, și este nevoie de mai mult de 30 000 ori atîta energie pentru a evapora lichidul, adică, pentru a separa moleculele una de alta. Orice s-ar putea întîmpla în oxigen lichid la un nivel molecular, drept rezultat al cîmpului magnetic, este aparent un lucru foarte minor în termeni energetici.

Știm că fie și cîmpuri magnetice intense nu au practic nici o influență asupra proceselor chimice, și aceasta se petrece pentru biochimie, de asemenea. Vă puteți pune mîna și brațul (nu acela cu ceasul!) într-un solenoid de 3 tesla, fără nici o senzație semnificativă sau consecință. Este greu de prezis dacă brațul dumneavoastră va fi paramagnetic sau diamagnetic, dar forța asupra lui nu va fi în orice caz mai mult de  $10^{-1}$  N. Generații de șoareci au fost născuți și crescuți în cîmpuri magnetice intense fără schimbări semnificative. Nici alte experiențe biologice nu au adus nimic remarcabil în sensul unor efecte magnetice asupra proceselor chimice\*. Aceasta nu este surprinzător. În interacția cu materia, cîmpul magnetic joacă un rol complet diferit de acela al cîmpului electric. Deoarece atomii și moleculele sînt alcătuiți din sarcini electrice în mișcare lentă, forțele electrice domină întru totul scena moleculară.

\* Aceasta nu înseamnă că efectele mici sînt totdeauna fără consecință. La urmă, un argument ca acela pe care tocmai l-am folosit ar arăta că gravitatea este energetic neimportantă la scară moleculară, totuși pomii pe coasta unui deal cresc vertical. Aceasta probabil implica forța globală asupra unei unități biologice mai mari decît dimensiunile moleculare. Într-adevăr, un „tropism“ intrucîtva asemănător a fost demonstrat experimental în cazul puieților crescînd într-un cîmp magnetic puternic neomogen. Nici nu sugerăm că proprietățile magnetice ale moleculelor nu sînt interesante pentru biochimist. Din contră, intermediarii în reacții chimice sînt cîteodată detectabili, chiar identificabili, prin comportarea lor magnetică. Dar acesta este un lucru cu totul diferit de influența unui cîmp extern asupra unui proces chimic. În treacăt, dacă vă așezați capul într-un cîmp magnetic intens și îl scuturați, veți „gusta“ curenții electrolitici în gura dumneavoastră — simplă manifestare a forței electromotoare induse.

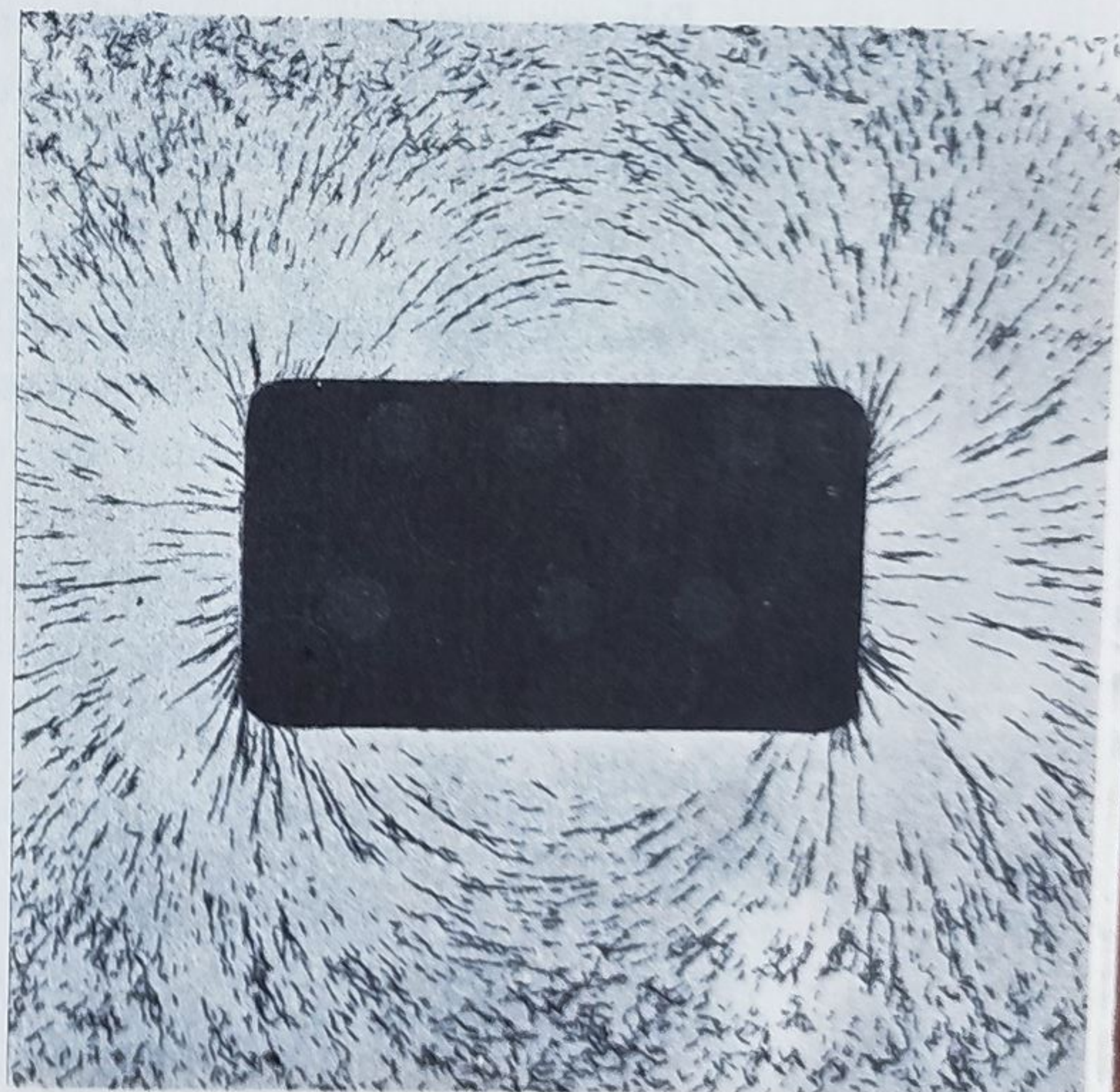
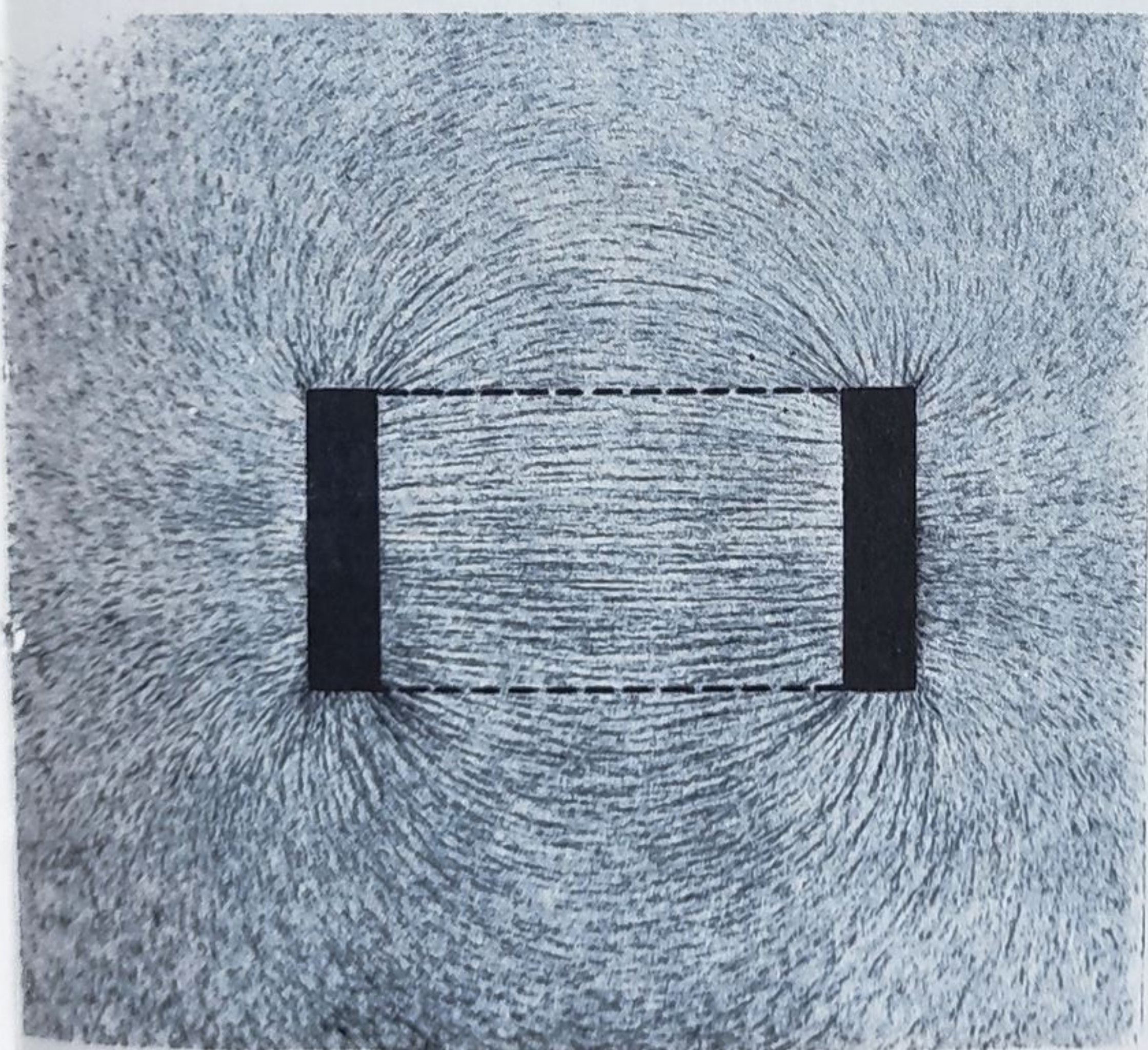


## 10.2. ABSENȚA „SARCINII” MAGNETICE

Cîmpul magnetic în exteriorul unei bare magnetizate ca de exemplu un ac de busolă arată foarte mult ca și cîmpul electric în exteriorul unei bare polarizate electric, o bară care are un exces de sarcină pozitivă la un capăt, sarcină negativă la celălalt (fig. 10.3). Se poate imagina că cîmpul magnetic are surse care îi sînt corelate în modul în care sarcina electrică este legată de cîmpul electric. Atunci „polul nord” al acului de busolă ar fi localizarea unui exces al unui fel de „sarcină magnetică” și polul sud ar fi localizarea unui exces de felul opus. Am putea numi „sarcina nordică” pozitivă și „sarcina sudică” negativă, cu cîmpul magnetic orientat de la pozitiv la negativ, o regulă ca aceea adoptată pentru cîmpul electric și

Fig. 10.3. (a) Două discuri încărcate cu sarcină de semn contrar (electrozii arătînd în secțiune ca bare negre continue) au un cîmp electric care este identic cu acela al unei vergele polarizate. Aceasta înseamnă că, dacă vă imaginați o astfel de vergea ocupînd regiunea în interiorul frontierei punctate, cîmpul ei exterior ar fi ca acela desenat. Cîmpul electric de aici a fost vizualizat printr-o mulțime de fibre negre minuscule, suspendate în ulei, care se orientează de-a lungul direcției cîmpului. Această metodă elegantă de a demonstra configurații de cîmp electric\* este datorată lui Harold M. Waage, Palmer Physical Laboratory, Princeton University, care a avut amabilitatea să pregătească fotografia originală pentru această ilustrație. (b) Cîmpul magnetic în jurul unui cilindru magnetizat, arătat prin orientarea de mici bucăți de sîrmă de nichel, cufundate în glicerină. (Această încercare de a îmbunătăți demonstrarea cu tradiționala „pilitură de fier” printr-o adaptare a metodei lui Waage nu a fost prea reușită — firele de nichel tind să se unească în corzi lungi care sînt apoi atrase spre magnet.) Diagramele construite teoretic ale cîmpurilor în cele două sisteme sînt arătate în figura 10.21.

\* H.M. Waage, Am J. Phys. 32, 388/1964.





sarcina electrică. În mod istoric, acesta este modul în care a fost stabilită\* convenția noastră despre sensul pozitiv al cîmpului magnetic. Ceea ce am numit sarcină magnetică a fost numit în mod obișnuit intensitate de pol magnetic.

Această idee este perfect rezonabilă pînă aici. Ea devine încă mai plauzibilă cînd ne reamintim că ecuațiile fundamentale ale cîmpului electromagnetic sînt cu totul simetrice în  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$ . De ce, atunci, să nu ne așteptăm să găsim simetrie în sursele cîmpului? Cu sarcină magnetică drept sursă posibil a cîmpului magnetic static, am avea din  $\mathbf{B} = \eta/\mu_0$ , unde  $\eta$  desemnează densitatea de sarcină magnetică iar  $\mu_0$  permeabilitatea magnetică a spațiului vid, în completă analogie cu densitatea de sarcină electrică  $\rho$ . Două sarcini magnetice pozitive (sau poli nord) de intensitate unitate, la o unitate de distanță depărtare, s-ar respinge unul pe altul cu o forță de o unitate, și așa mai departe.

Dificultatea este că lucrurile nu arată astfel. Dintr-un oarecare motiv, natura nu s-a folosit de această posibilitate. Lumea din jurul nostru apare cu totul asimetrică în sensul că nu găsim de loc sarcini magnetice. Nimeni nu a observat vreodată un exces local al unui fel de sarcină magnetică — un pol nord izolat de exemplu. Dacă un astfel de obiect exista ar fi putut fi recunoscut în mai multe feluri. El ar fi dat naștere unui cîmp magnetic orientat radial înspre exterior de la obiect și descrescînd ca  $1/r^2$  la distanțe mari. Poate încă mai izbitor, un astfel de obiect ar simți o forță dacă se află într-un cîmp magnetic *uniform*. Introdus într-un solenoid, polul magnetic ar simți forța maximă la centrul bobinei mai degrabă decît la capete. Și spre deosebire de forța asupra unei particule încărcate *electric* aflată în mișcare într-un cîmp magnetic, forța asupra unui pol magnetic în repaus ar fi paralelă cu cîmpul în loc să-i fie perpendiculară.

Dintr-o regiune a spațiului conținînd un pol magnetic izolat ar exista un flux net al lui  $\mathbf{B}$ . Absența aparentă a unor astfel de obiecte poate fi deci rezumată prin afirmația că, în loc de  $\text{div } \mathbf{B} = \eta/\mu_0$ , găsim simplu că

$$\boxed{\text{div } \mathbf{B} = 0 \text{ peste tot}} \quad (1)$$

În realitate *peste tot*? Se poate să existe poli nord și sud uniți în mod inseparabil în perechi de intensitate egală și opusă, și atît de aproape împreună încît să nu putem explora fizic regiunea dintre membrii perechii? Nu avem nici un motiv să gîndim astfel, dar nu ar apărea nici o diferență deoarece formularea din ecuația 1 încă ar fi corectă ori de cîte ori  $\mathbf{B}$  însuși ar avea înțeles. Au existat speculații foarte serioase, totuși, că perechi de poli, asemenea perechilor de particule elementare, ar putea fi create și

\* În cap. 6, vă amintiți, am stabilit sensul pozitiv la lui  $\mathbf{B}$  prin referire la un sens de curent (sensul de mișcare a sarcinii pozitive) și o regulă de mînă dreaptă. Acum „pol nord” înseamnă „polul care caută nordul” al acului de busolă. Astăzi nu înțelegem de ce polaritatea magnetică a Pămîntului este într-un sens și nu în celălalt. Alegerea de către Franklin a electricității „pozitive” nu a avut nimic de-a face cu acestea. Astfel încît dacă se ia o „regulă de mînă dreaptă” în locul unei „reguli de mînă stîngă”, pentru a face teoria mai „consistentă”, este cel mai pur accident.



separate în reacții nucleare foarte energetice. Mai multe căutări după astfel de particule, numite monopoli magnetici, nu au detectat nici unul.\* Dacă ele *nu pot* exista, și dacă e așa de ce nu, rămâne o întrebare deschisă. Dacă va descoperi cineva un monopol acela va fi îndreptățit să adauge triumfător după ecuația 1 calificarea: „...cu excepția localizării acestui monopol magnetic nord (sau sud) care apare în placa mea fotografică (sau imagine de la camera cu bule, sau înregistrare de pulsuri etc.)”. Dar chiar aceasta nu ar afecta concluzia majoră: Materia obișnuită este alcătuită din sarcini electrice, și nu din sarcini magnetice.

Sintem nevoiți să tragem concluzia că singurele surse ale câmpului magnetic sînt curenții electrice. Aceasta ne duce înapoi la ipoteza lui Ampère, ideea sa că magnetismul în materie este explicat printr-o multitudine de inele minuscule de curent electric răspîndite în substanță.

### 10.3. CÎMPUL UNEI BUCLE DE CURENT

O buclă conductoare închisă se află în planul  $xy$  înconjurînd originea, ca în figura 10.4, *a*. Un curent staționar  $I$ , măsurat în amperi, curge prin buclă. Ne interesează cîmpul magnetic pe care îl creează acest curent — nu în apropierea buclei, dar într-un punct depărtat ca  $P_1$  din figură. Vom presupune că  $r_1$ , distanța la  $P_1$ , este mult mai mare decît orice dimensiune a buclei. Pentru a simplifica diagrama am situat  $P_1$  în planul  $yz$ ; va apareea că aceasta nu reprezintă o particularizare. Avem acum un bun prilej de a folosi potențialul vector. Vom calcula mai întîi potențialul vector  $A$  în punctul  $P_1$ , adică  $A(0, y_1, z_1)$ . Din aceasta va fi evident care este potențialul vector în orice alt punct  $(x, y, z)$  departe de buclă. Apoi luînd rotorul lui  $A$  vom obține cîmpul magnetic  $B$ .

Pentru un curent limitat într-un fir, am avut, ca în ecuația 6.35:

$$A(0, y_1, z_1) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{\text{bucle}} \frac{dl_2}{r_{12}}. \quad (2)$$

Atunci ne-am preocupat doar de contribuția unui mic segment de circuit; acum avem de integrat în jurul întregii bucle. Să considerăm variația în numitorul lui  $r_{12}$  cînd parcurgem bucla. Dacă  $P_1$  este departe, variația de ordinul întîi în  $r_{12}$  depinde doar de coordonata  $y_2$  a segmentului  $dl_2$  și nu de  $x_2$ . Aceasta devine clar din vederea laterală schițată în figura 10.4, *b*.

\* Pentru o relatare a cercetărilor asupra monopolilor magnetici, vezi articolul lui Kenneth Ford, Monopoli Magnetici, *Sci. American* 209, 30 (December, 1963). „Asimetria” evidentă în absența sarcinii magnetice este cu totul diferită de asimetria electrică cu care sîntem familiarizați, diferența în caracter între particulele pozitive și negative. Electronii sînt particulele negative stabile; sarcina pozitivă se află sub forma protonului, o particulă mult mai grea. Dar știm că aceasta nu trebuie să fie universal, deoarece se știe că există *antiparticulele*. Toate faptele indică posibilitatea materiei alcătuite din electroni pozitivi și protoni negativi; această „antimaterie” ar fi perechea geamănă a materiei pe care o găsim în partea noastră a universului. Am văzut ingredientele unei antimaterii în laborator — dar ingredientele unui „dublet magnetic” nu au fost văzute. Există o îndoială serioasă că ele există; și există un motiv puternic că dacă ele există trebuie să fie cu totul diferite, în anumite alte privințe, de particulele încărcate electric.

87,83,73  
285,257,24



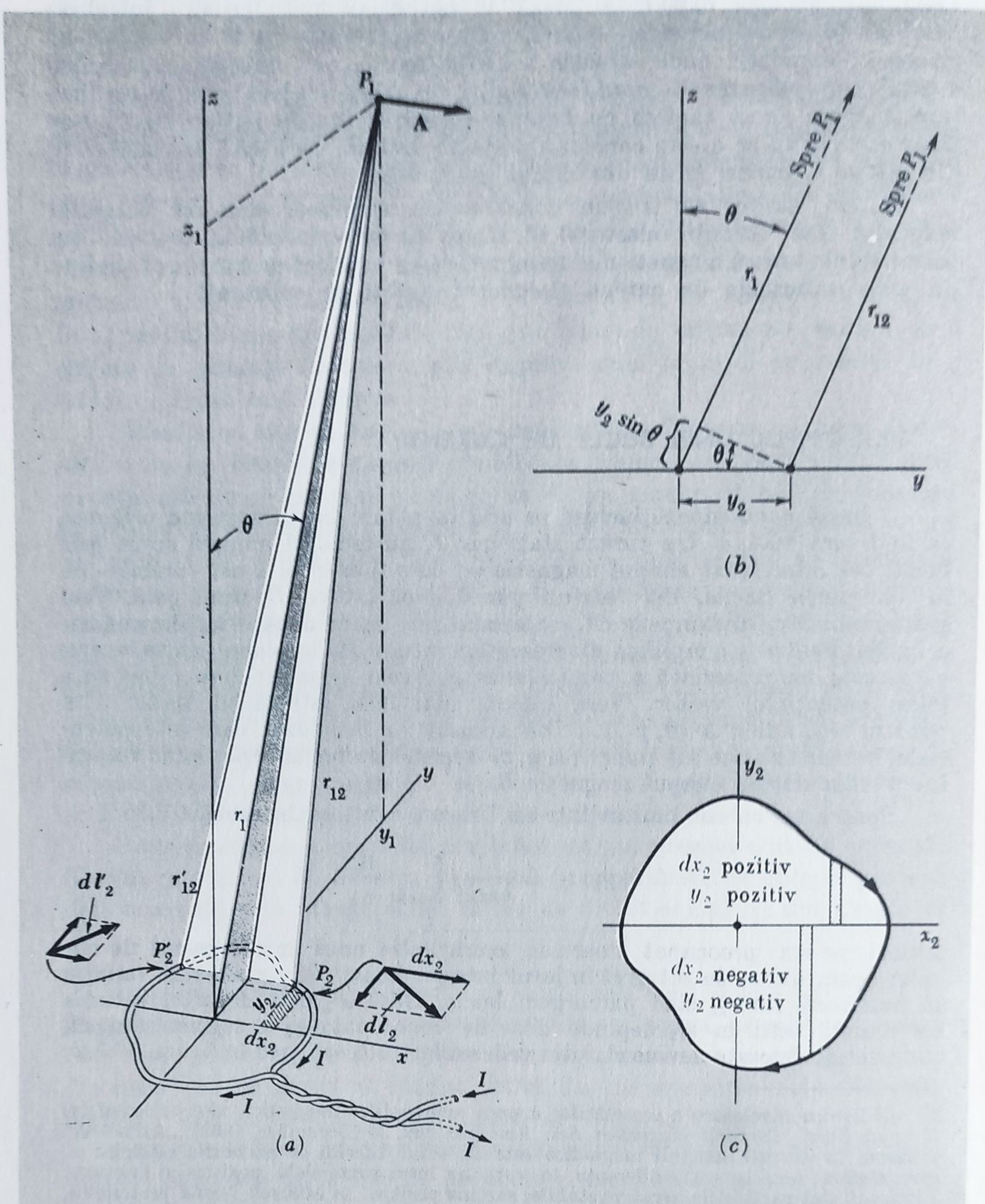


Fig. 10.4. (a) Calcularea potențialului vector  $A$  într-un punct departe de spira de curent. (b) Vedere laterală, privind de-a lungul axei  $x$ , arătînd că  $r_{12} \approx r_1 - y_2 \sin \theta$  dacă  $r_1 \gg y_2$ . (c) Vedere de sus, pentru a arăta că  $\oint_{\text{bucle}} y_2 dx_2$  este aria buclei.



Astfel, neglijind cantități proporționale cu  $(x_2/r_{12})^2$ , putem considera  $r_{12}$  și  $r'_{12}$ , care se află una peste cealaltă în vederea laterală, ca fiind egale. Și în general, în primul ordin în raportul (dimensiunea buclei/distanța la  $P_1$ ) avem

$$r_{12} \approx r_1 - y_2 \sin \theta. \quad (3)$$

Să privim acum la cele două elemente de curbă  $dl_2$  și  $dl'_2$ , arătate în figura 10.4, a. Pentru acestea  $dy_2$ -i sînt egali și opuși, după cum am și observat, iar  $r_{12}$ -i sînt egali în primul ordin. În acest ordin atunci, contribuțiile lor la integrala curbilinie se vor simplifica, și aceasta va fi adevărat pentru întreagă bucla. Deci  $A$  în  $P_1$  nu va avea componenta  $y$ . Evident nu va avea componenta  $z$ , deoarece curba de curent nu are nici unde o componentă  $z$ . Componenta  $x$  a potențialului vector provine de la partea în  $dx$  a integralei curbilinii. Astfel

$$A(0, y_1, z_1) = \hat{x} \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{dx_2}{r_{12}}. \quad (4)$$

Fără a strica aproximația de ordinul întâi, putem transforma ecuația 3 în

$$\frac{1}{r_{12}} \approx \frac{1}{r_1} \left( 1 + y_2 \frac{\sin \theta}{r_1} \right) \quad (5)$$

și folosind aceasta pentru integrare avem

$$A(0, y_1, z_1) = \hat{x} \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_1} \int \left( 1 + \frac{y_2 \sin \theta}{r_1} \right) dx_2. \quad (6)$$

În integrare  $r_1$  și  $\theta$  sînt constante. Evident  $\int dx_2$  în jurul buclei se anulează. Acum  $\int y_2 dx_2$  în jurul buclei este chiar aria buclei, indiferent de forma sa (vezi fig. 10.4, c). Astfel obținem în final

$$A(0, y_1, z_1) = \hat{x} \frac{I \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_1^2} \cdot (\text{aria buclei}). \quad (7)$$

Acum avem un pas simplu dar crucial: deoarece forma buclei nu a avut importanță, situarea lui  $P_1$  în planul  $yz$  nu poate produce nici o diferență esențială. De aceea avem în ecuația 7 rezultatul general pe care îl căutăm, dacă îl formulăm în mod general. Potențialul vector al unei bucle de curent de orice formă, la o distanță  $r$  de la buclă care este mult mai mare decît dimensiunea buclei, este un vector perpendicular pe planul care conține  $r$  și normal pe planul buclei, de mărime

$$A = \frac{Ia \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} \quad (8)$$

unde  $a$  înseamnă aria buclei.

Acest potențial vector este simetric în jurul axei buclei, ceea ce implică că cîmpul  $B$  va fi de asemenea simetric. Explicația este că noi considerăm regiuni atît de îndepărtate de buclă încît detaliile formei buclei au o influență neglijabilă. Toate buclele cu același produs intensitatea curentului, arie produc același cîmp de distanțe mari. Numim produsul  $I_a$  momentul dipolar magnetic al buclei de curent, și îl notăm prin  $m$ . Momentul dipolar



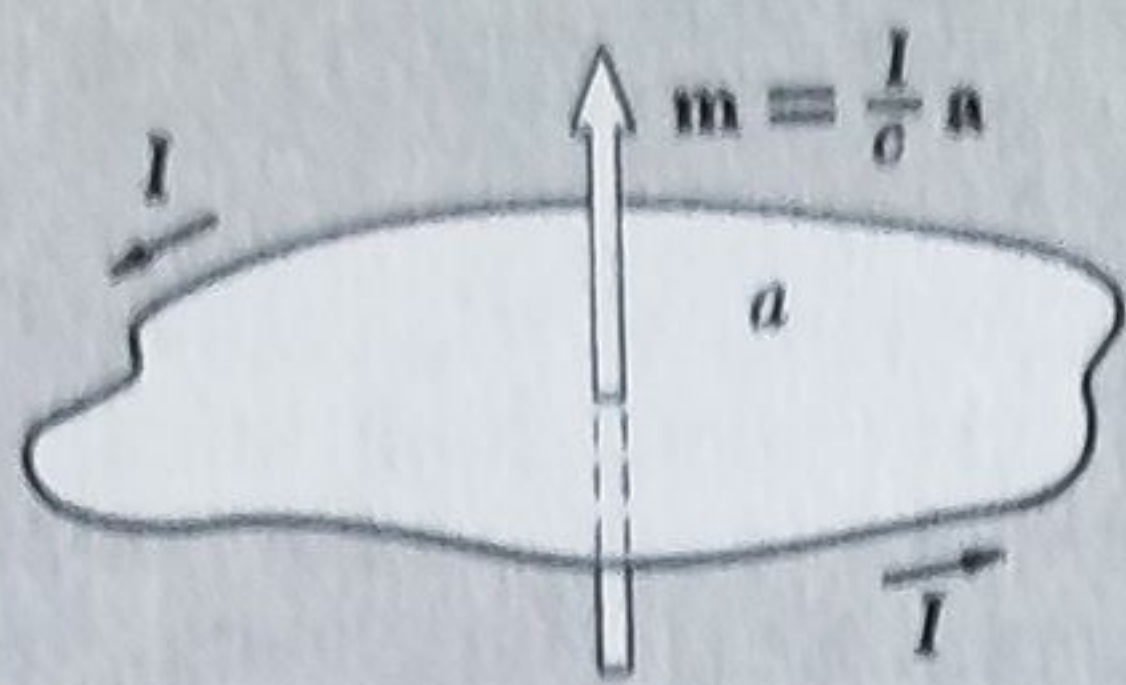


Fig. 10.5. Prin definiție, vectorul moment magnetic este legat de curent printr-o regulă de șurub drept, cum se arată aici.

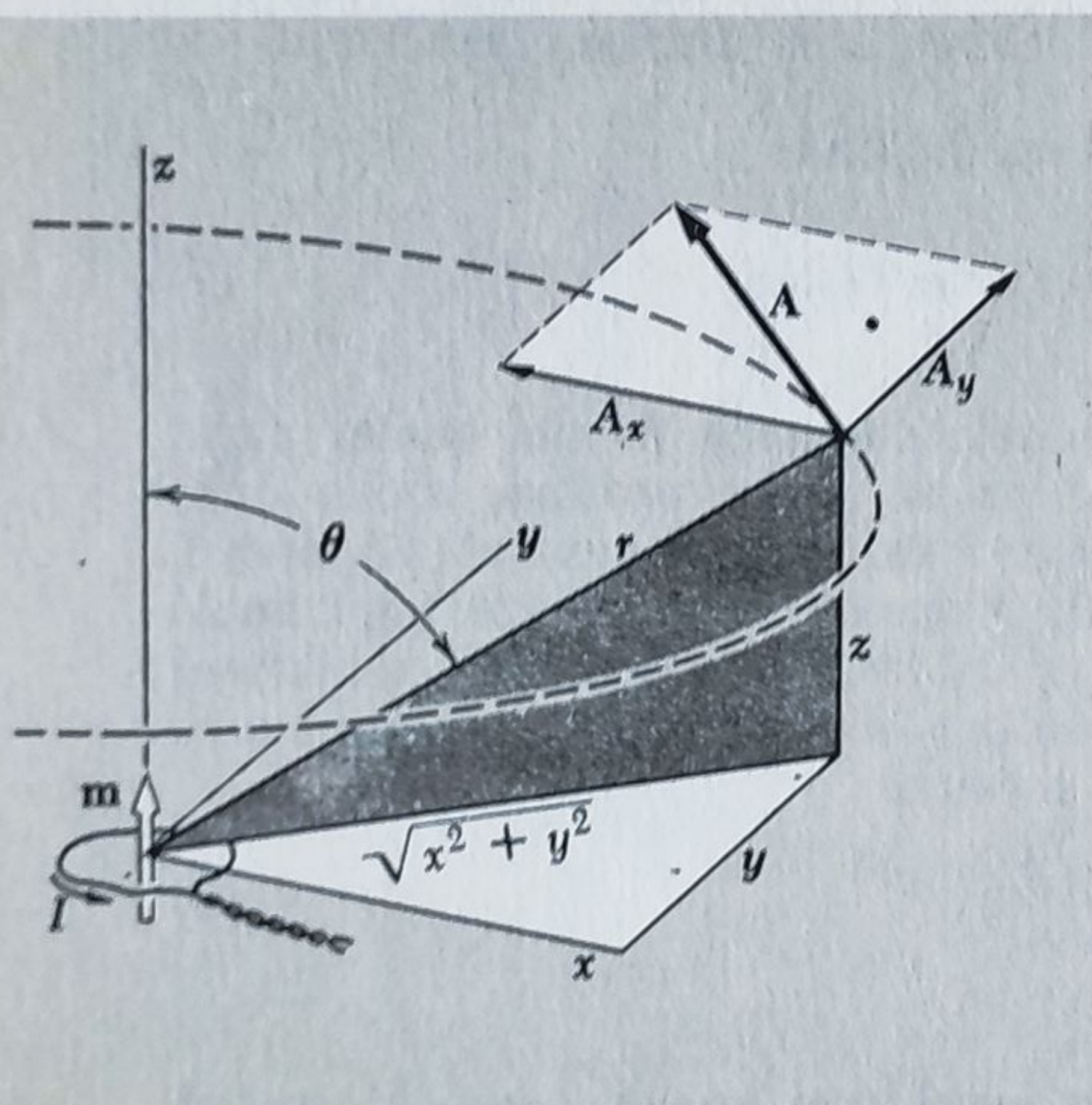


Fig. 10.6. Un dipol magnetic localizat în origine. În orice punct departe de buclă,  $A$  este un vector paralel la planul  $xy$ , tangent la un cerc în jurul axei  $z$ .

magnetic este evident un vector, direcția sa fiind după normala la buclă, sau aceea a vectorului  $a$ , aria orientată a suprafeței înconjurată de către buclă

$$m = I a. \quad (9)$$

Cît pentru semn, convenim că direcția lui  $m$  și sensul curgerii de curent pozitiv în buclă urmează să fie corelate printr-o regulă de șurub drept, ilustrată în figura 10.5. (Momentul dipolar al buclei în figura 10.4,  $a$  este orientat în jos, după această regulă.) Potențialul vector al câmpului unui dipol magnetic  $m$  se poate scrie acum cu vectori:

$$A = \frac{m \times \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} \quad (10)$$

unde  $\hat{r}$  este un vector unitate în direcția de la buclă către punctul în care  $A$  este calculat. Puteți verifica că aceasta este în acord cu convenția noastră despre semn. Observați că direcția lui  $A$  trebuie totdeauna să fie aceea a curentului în partea mai apropiată a buclei.

Figura 10.6 arată un dipol magnetic localizat în origine, cu vectorul moment dipolar  $m$  orientat în direcția  $z$  pozitivă. Pentru a exprima potențialul vector în orice punct  $(x, y, z)$  observăm că  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  și  $\sin \theta = \sqrt{x^2 + y^2}/r$ . Mărimea  $A$  a potențialului vector în acel punct este

$$A = \frac{m \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} = \frac{m \sqrt{x^2 + y^2}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3}. \quad (11)$$

Deoarece  $A$  este tangent la un cerc orizontal în jurul axei  $z$ , componentele sale sînt:

$$\begin{aligned} A_x &= A \left( \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{-my}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \\ A_y &= A \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{mx}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \\ A_z &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$



Să evaluăm  $\mathbf{B}$  într-un punct din planul  $xz$ , găsind componentele lui rot  $\mathbf{A}$  și apoi (nu înaintea!) punând  $y = 0$ .

$$\begin{aligned} B_x &= (\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{mx}{4\pi\epsilon_0 c^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{3mxz}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^5} \\ B_y &= (\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{-my}{4\pi\epsilon_0 c^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{3myz}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^5} \\ B_z &= (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{m}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right] = \\ &= \frac{m}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(3z^2 - r^2)}{r^5}. \end{aligned} \quad (13)$$

În planul  $xz$ ,  $y = 0$ ,  $\sin \theta = x/r$  și  $\cos \theta = z/r$ . Componentele câmpului în orice punct din acel plan sînt astfel date de

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{3m \sin \theta \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3}; \\ B_y &= 0; \\ B_z &= \frac{m(3 \cos^2 \theta - 1)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3}. \end{aligned} \quad (14)$$

Să ne întoarcem acum înapoi la § 9.3, unde în ecuația 9.14 am exprimat componentele în planul  $xz$  al câmpului  $\mathbf{E}$  ale unui dipol electric  $\mathbf{p}$ , care a fost situat exact ca și dipolul nostru magnetic  $\mathbf{m}$ . Expresiile sînt identice. Am găsit astfel că câmpul magnetic al unei mici bucle de curent are în puncte îndepărtate aceeași formă ca și câmpul electric a două sarcini separate. Știm deja cum arată acel câmp, câmpul de dipol electric. Figura 10.7 este o încercare de a sugera forma tridimensională a câmpului magnetic  $\mathbf{B}$  provenind de la bucla noastră de curent cu moment dipolar  $\mathbf{m}$ .

Câmpul magnetic în apropierea unei bucle de curent este complet diferit de câmpul electric în apropierea sarcinilor separate pozitivă și negativă, după cum

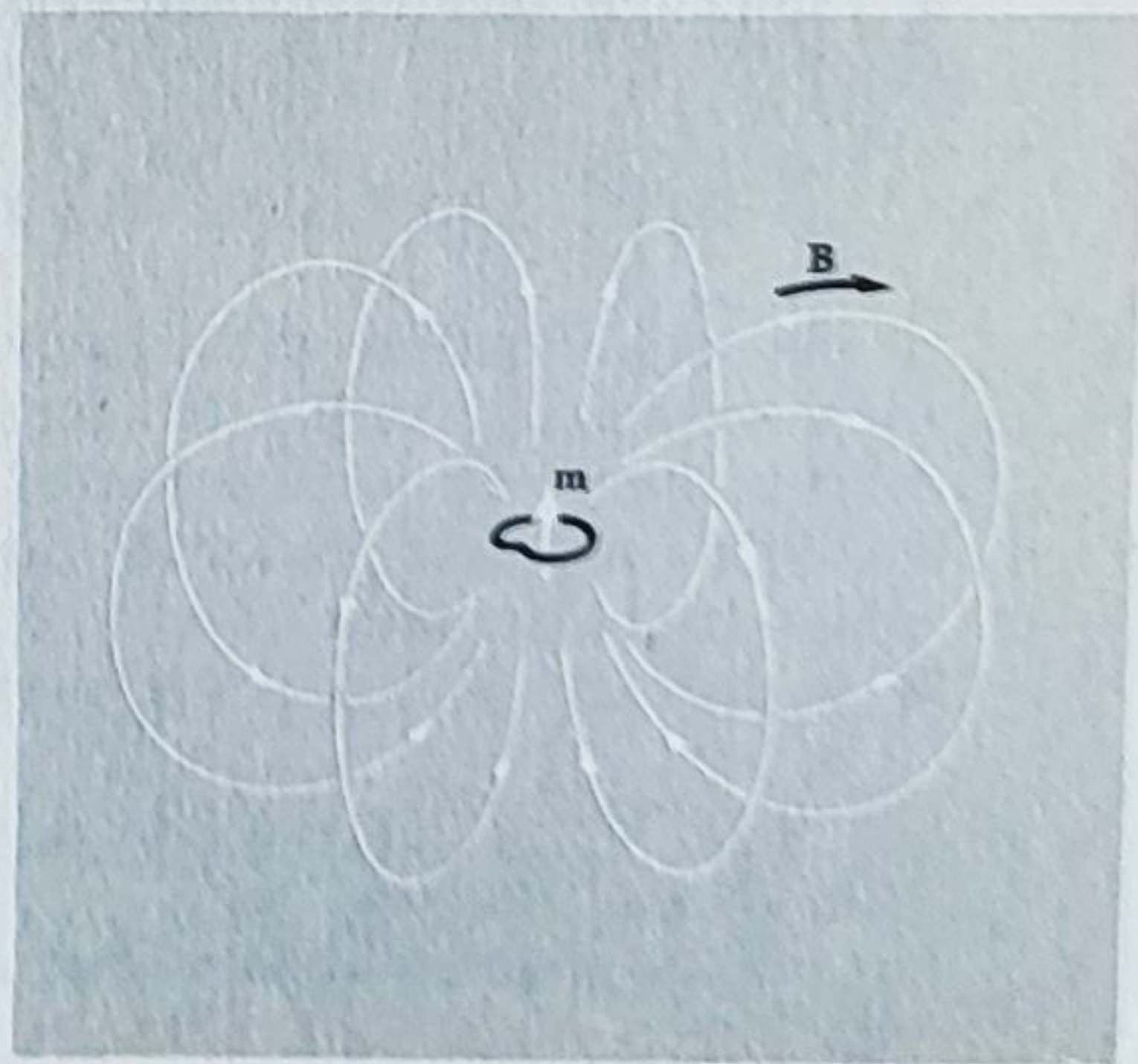
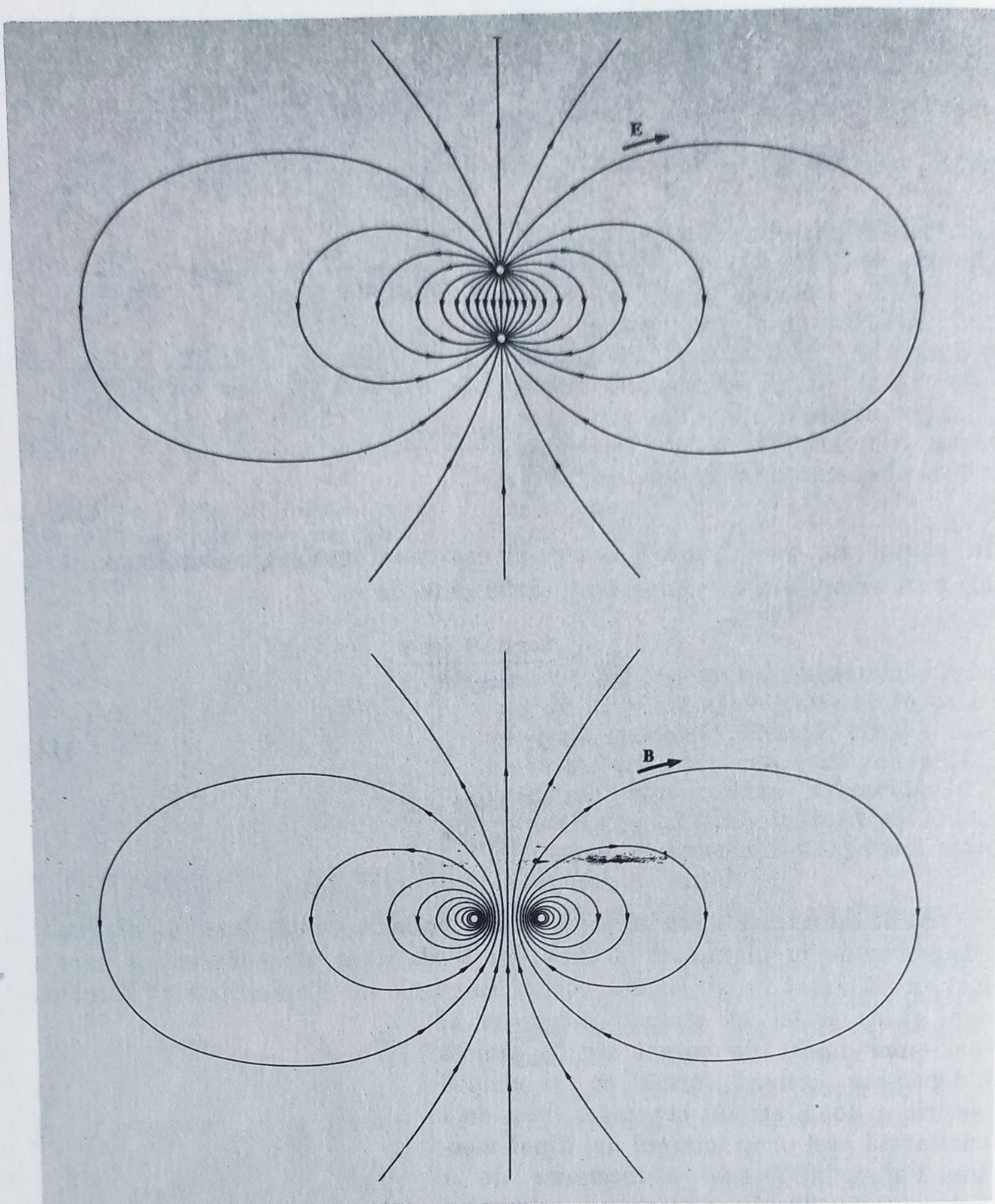


Fig. 10.7. Cîteva linii de câmp magnetic în câmpul unui dipol magnetic, adică, o mică buclă de curent.





arată comparația din figura 10.8. Observați că între sarcini câmpul electric este orientat în jos, în timp ce în interiorul inelului de curent câmpul magnetic este orientat în sus, deși câmpurile la distanță sînt asemănătoare. Aceasta reflectă faptul că câmpul magnetic satisface  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  peste tot, *chiar și în interiorul sursei*. Liniile de câmp magnetic nu se termină. Prin aproape și departe înțelegem, desigur, relativ la dimensiunea curentului

Fig. 10.8. (a) Câmpul electric al unei perechi de sarcini egale și opuse. La depărtare el devine câmpul unui dipol electric.  
(b) Câmpul magnetic al unui inel de curent. La depărtare el devine câmpul unui dipol magnetic.



sau separarea dintre sarcini. Dacă ne imaginăm că inelul de curent se micșorează în dimensiune, în timp ce curentul crește astfel încît momentul dipolar  $m = Ia$  să rămînă constant, ne apropiem de dipolul magnetic infinitesimal, care corespunde la dipolul electric infinitesimal descris în capitolul 9.

#### 10.4. FORȚA ASUPRA UNUI DIPOL ÎNTR-UN CÎMP EXTERIOR

Să considerăm o mică buclă de curent circulară de rază  $r$ , situată în cîmpul magnetic al unui oarecare alt sistem de curenți, ca de exemplu un solenoid. În figura 10.9 este desenat un cîmp  $\mathbf{B}$  care este în general în sensul lui  $z$ . Acela nu este un cîmp uniform. Din contră, el devine mai slab pe măsură ce înaintăm în sensul lui  $z$ ; aceasta este evident din răspîndirea liniilor de cîmp. Să presupunem, pentru simplitate, că cîmpul este simetric în jurul axei  $z$ . Atunci el se aseamănă cu cîmpul lîngă capătul de sus al solenoidului în figura 10.1. Cîmpul reprezentat în figura 10.9 *nu* include cîmpul magnetic al însuși inelului de curent. Vrem să găsim forța asupra inelului de curent produsă de celălalt cîmp, pe care îl vom numi, din lipsa unui nume mai bun, cîmpul extern. Forța netă asupra inelului de curent datorată propriului său cîmp este cu siguranță zero, astfel încît sîntem liberi să neglijăm propriul său cîmp în această discuție.

Dacă studiați situația în figura 10.9 veți trage curînd concluzia că există o forță netă asupra inelului de curent. Ea apare deoarece cîmpul extern  $\mathbf{B}$  are o componentă *spre în afară*  $B_r$ , peste tot în jurul inelului. De aceea dacă curentul curge în direcția indicată, fiecare element al buclei,  $dl$ , trebuie să fie supus unei forțe de mărime  $IB_r dl$ . Dacă  $B_r$  are aceeași mărime în toate punctele inelului, cum trebuie să fie în cîmpul simetric divergent presupus, forța totală în jos va avea mărimea

$$F = 2\pi r I B_r. \quad (15)$$

Acum  $B_r$  poate fi legat de gradientul lui  $B_z$ . Deoarece  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  în toate punctele, fluxul net de cîmp magnetic din orice volum este zero. Să considerăm micul cilindru de rază  $r$  și înălțime  $\Delta z$  (fig. 10.10). Fluxul exterior lateral este  $2\pi r(\Delta z)B_r$  iar fluxul exterior de la suprafețele de capăt este

$$\pi r^2 [-B_z(z) + B_z(z + \Delta z)]$$

Fig.10.9. Un inel de curent într-un cîmp magnetic neomogen. (Cîmpul inelului însuși nu este arătat.) Din cauza componentei radiale  $B_r$  a cîmpului, există o forță asupra inelului ca un întreg.

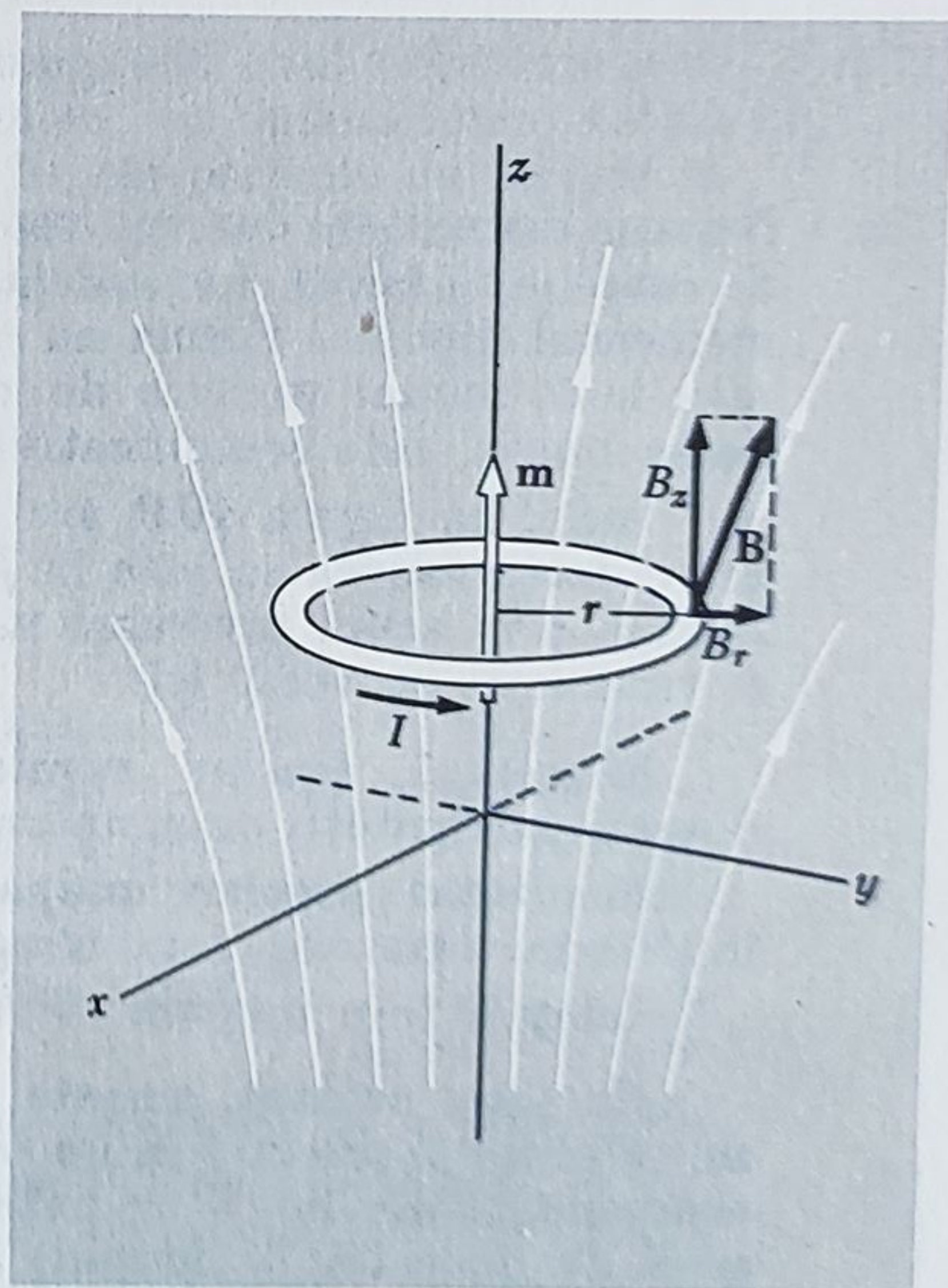
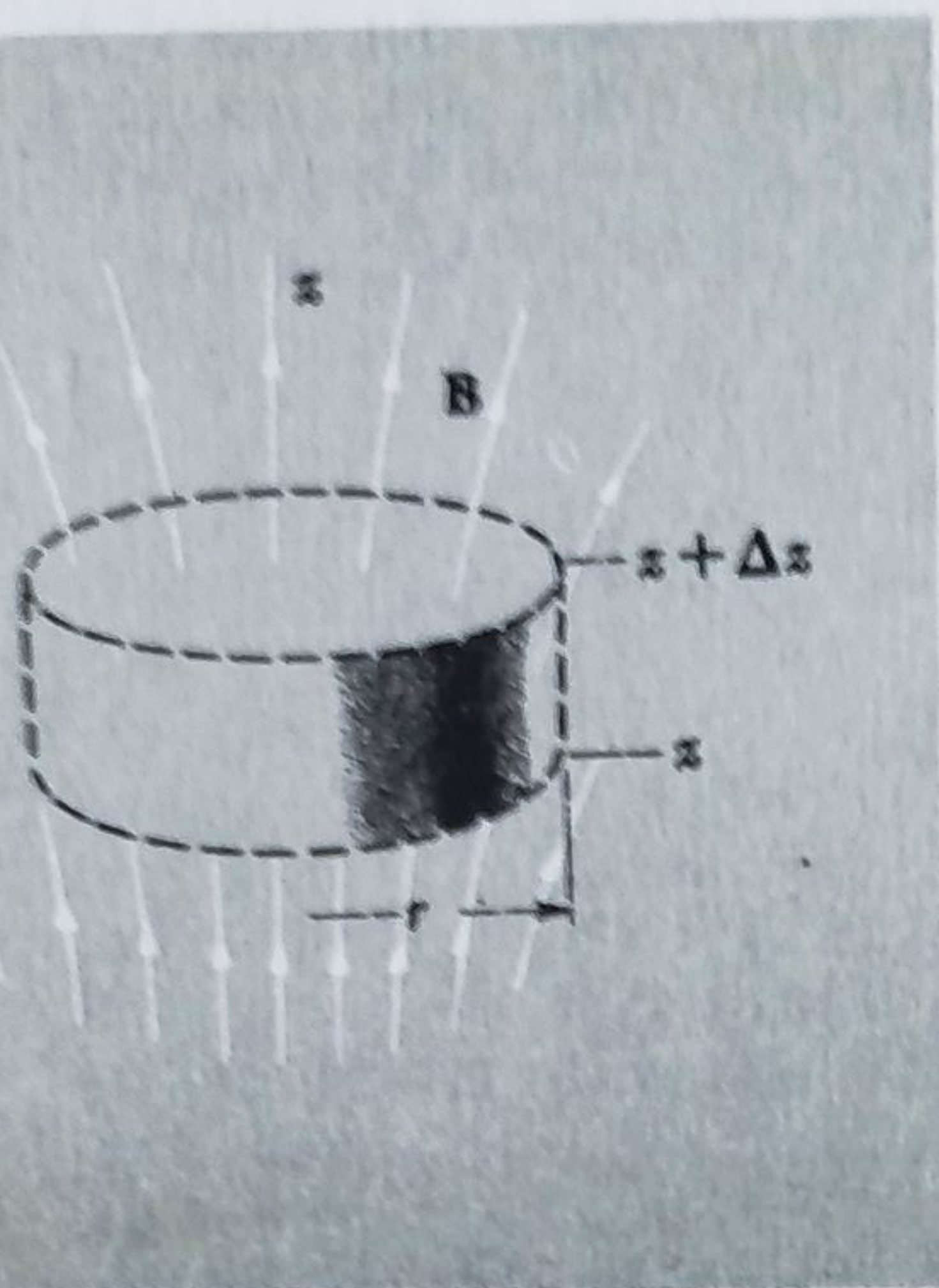




Fig. 10.10. Teorema lui Gauss poate fi folosită pentru a lega  $B_r$  și  $\partial B_z / \partial z$ , conducînd la ecuația 16.



care în primul ordin în distanța mică  $\Delta z$  este  $\pi r^2 (\partial B_z / \partial z) \Delta z$ . Punînd fluxul total egal cu zero:

$$0 = \pi r^2 (\partial B_z / \partial z) \Delta z + 2\pi r B_r \Delta z,$$

care ne dă relația,

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (16)$$

Ca o verificare a semnului, observați că după ecuația 16,  $B_r$  este pozitiv cînd  $B_z$  descrește în sus; o privire asupra figurii arată că acesta este corect.

Forța asupra dipolului poate fi exprimată acum în funcție de gradientul componentei  $B_z$  a cîmpului extern:

$$F = 2\pi r I \cdot \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \pi r^2 I \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (17)$$

În factorul  $\pi r^2 I$  recunoaștem mărimea  $m$  a momentului dipolar magnetic a inelului nostru de curent. Astfel că forța asupra inelului se poate exprima foarte simplu prin momentul dipolar:

$$F = m \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (18)$$

Nu am dovedit-o, dar nu veți fi surprinși să auziți că pentru bucle mici de orice altă formă forța depinde doar de produsul curent-arie, adică, de momentul dipolar. Forma nu contează. Desigur, discutăm bucle destul de mici încît numai variația de ordinul întîi a cîmpului exterior, pe întinderea buclei, este semnificativă.

Inelul în figura 10.9 are un moment dipolar magnetic  $m$  orientat în sus și forța asupra sa este în jos. Evident, dacă am putea inversa curentul în inel, prin aceea inversînd  $m$ , forța și-ar schimba direcția. Situația poate fi rezumată în acest fel:

Momentul dipolar *paralel* cu cîmpul exterior: Forța acționează în direcția intensității de cîmp *crescătoare*.

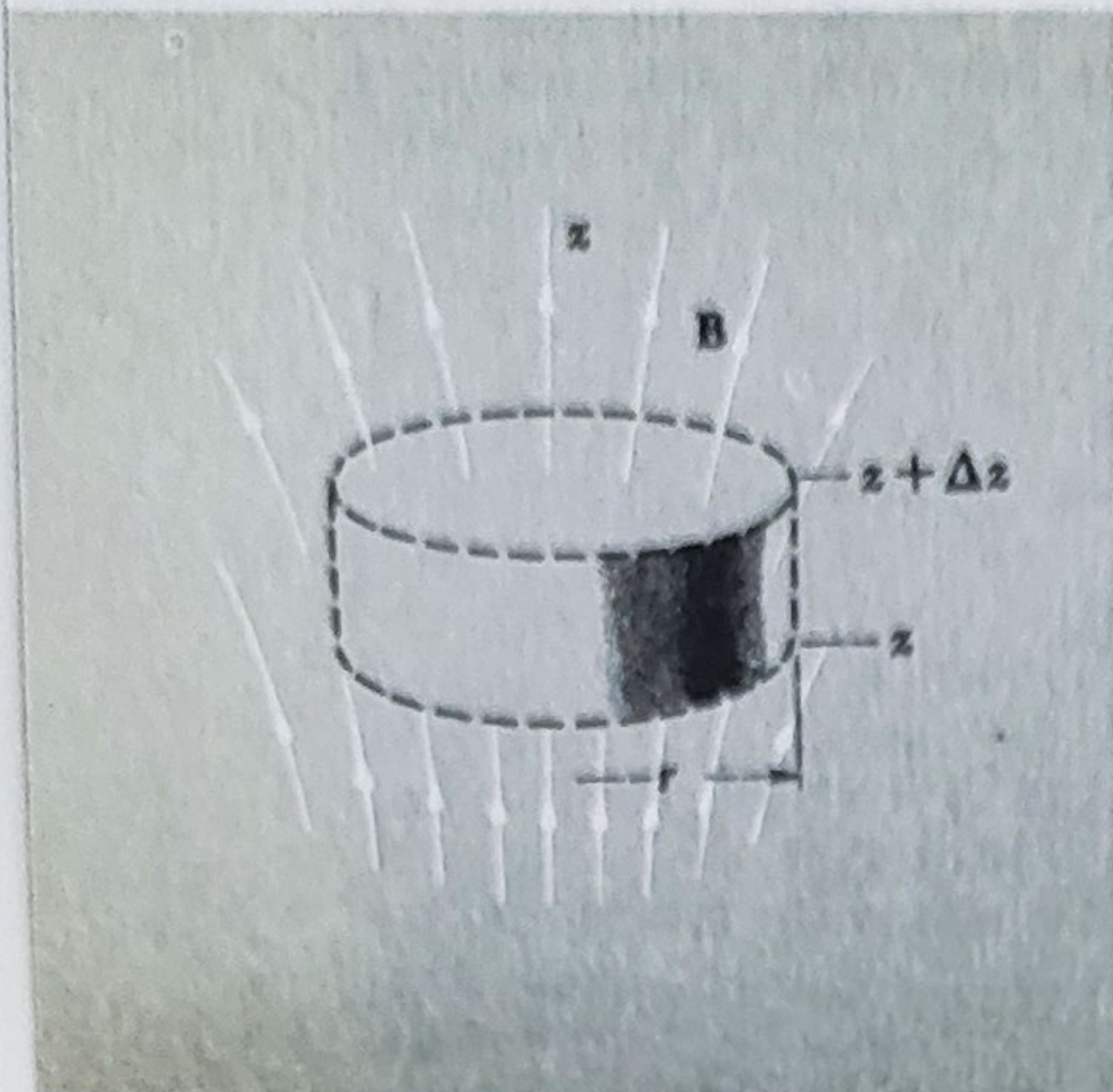
Momentul dipolar *antiparalel* cu cîmpul exterior: Forța acționează în direcția intensității de cîmp *descrescătoare*.

Cîmp extern *uniform*: Forță *zero*.

Cu totul evident, aceasta nu este situația cea mai generală. Momentul  $m$  ar putea fi orientat la un unghi oarecare față de cîmpul  $B$ , iar diversele componente ale lui  $B$  ar putea varia, spațial, în diverse moduri. Nu este greu de dezvoltat o formulă pentru forța  $F$  care este simțită în cazul



Fig. 10.10. Teorema lui Gauss poate fi folosită pentru a lega  $B_r$  și  $\partial B_z/\partial z$ , conducînd la ecuația 16.



care în primul ordin în distanța mică  $\Delta z$  este  $\pi r^2 (\partial B_z / \partial z) \Delta z$ . Punînd fluxul total egal cu zero:

$$0 = \pi r^2 (\partial B_z / \partial z) \Delta z + 2\pi r B_r \Delta z,$$

care ne dă relația,

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (16)$$

Ca o verificare a semnului, observați că după ecuația 16,  $B_r$  este pozitiv cînd  $B_z$  descrește în sus; o privire asupra figurii arată că acesta este corect.

Forța asupra dipolului poate fi exprimată acum în funcție de gradientul componentei  $B_z$  a cîmpului extern:

$$F = 2\pi r I \cdot \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \pi r^2 I \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (17)$$

În factorul  $\pi r^2 I$  recunoaștem mărimea  $m$  a momentului dipolar magnetic a inelului nostru de curent. Astfel că forța asupra inelului se poate exprima foarte simplu prin momentul dipolar:

$$F = m \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (18)$$

Nu am dovedit-o, dar nu veți fi surprinși să auziți că pentru bucle mici de orice altă formă forța depinde doar de produsul curent-arie, adică, de momentul dipolar. Forma nu contează. Desigur, discutăm bucle destul de mici încît numai variația de ordinul întîi a cîmpului exterior, pe întinderea buclei, este semnificativă.

Inelul în figura 10.9 are un moment dipolar magnetic  $m$  orientat în sus și forța asupra sa este în jos. Evident, dacă am putea inversa curentul în inel, prin aceea inversînd  $m$ , forța și-ar schimba direcția. Situația poate fi rezumată în acest fel:

Momentul dipolar *paralel* cu cîmpul exterior: Forța acționează în direcția intensității de cîmp *crescătoare*.

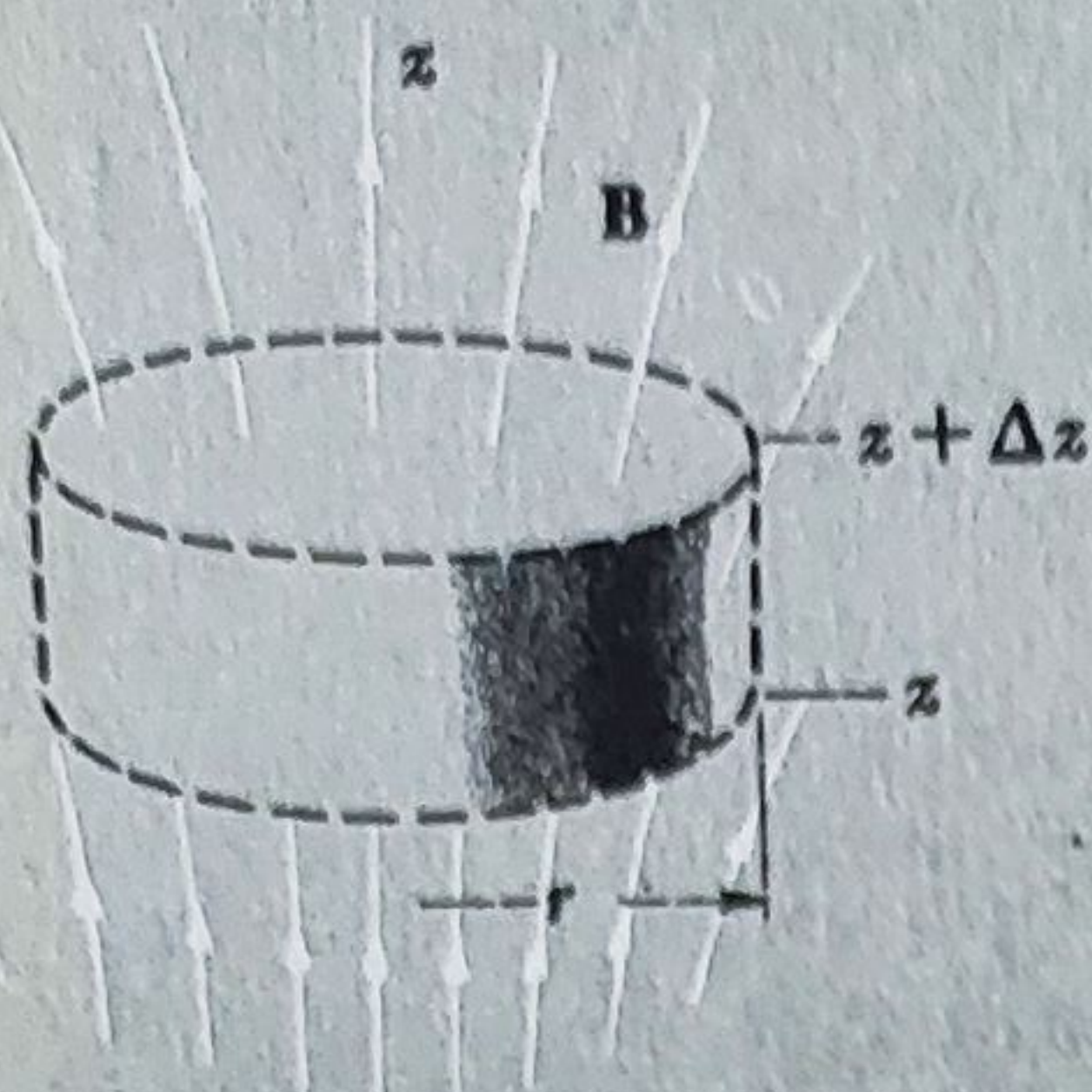
Momentul dipolar *antiparalel* cu cîmpul exterior: Forța acționează în direcția intensității de cîmp *descrescătoare*.

Cîmp extern *uniform*: Forță zero.

Cu totul evident, aceasta nu este situația cea mai generală. Momentul  $m$  ar putea fi orientat la un unghi oarecare față de cîmpul  $B$ , iar diversele componente ale lui  $B$  ar putea varia, spațial, în diverse moduri. Nu este greu de dezvoltat o formulă pentru forța  $F$  care este simțită în cazul



Fig. 10.10. Teorema lui Gauss poate fi folosită pentru a lega  $B_r$  și  $\partial B_z / \partial z$ , conducînd la ecuația 16.



care în primul ordin în distanța mică  $\Delta z$  este  $\pi r^2 (\partial B_z / \partial z) \Delta z$ . Punînd fluxul total egal cu zero:

$$0 = \pi r^2 (\partial B_z / \partial z) \Delta z + 2\pi r B_r \Delta z,$$

care ne dă relația,

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (16)$$

Ca o verificare a semnului, observați că după ecuația 16,  $B_r$  este pozitiv cînd  $B_z$  descrește în sus; o privire asupra figurii arată că acesta este corect.

Forța asupra dipolului poate fi exprimată acum în funcție de gradientul componentei  $B_z$  a cîmpului extern:

$$F = 2\pi r I \cdot \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \pi r^2 I \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (17)$$

În factorul  $\pi r^2 I$  recunoaștem mărimea  $m$  a momentului dipolar magnetic a inelului nostru de curent. Astfel că forța asupra inelului se poate exprima foarte simplu prin momentul dipolar:

$$F = m \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (18)$$

Nu am dovedit-o, dar nu veți fi surprinși să auziți că pentru bucle mici de orice altă formă forța depinde doar de produsul curent-arie, adică, de momentul dipolar. Forma nu contează. Desigur, discutăm bucle destul de mici încît numai variația de ordinul întîi a cîmpului exterior, pe întinderea buclei, este semnificativă.

Inelul în figura 10.9 are un moment dipolar magnetic  $m$  orientat în sus și forța asupra sa este în jos. Evident, dacă am putea inversa curentul în inel, prin aceea inversînd  $m$ , forța și-ar schimba direcția. Situația poate fi rezumată în acest fel:

Momentul dipolar *paralel* cu cîmpul exterior: Forța acționează în direcția intensității de cîmp *crescătoare*.

Momentul dipolar *antiparalel* cu cîmpul exterior: Forța acționează în direcția intensității de cîmp *descrescătoare*.

Cîmp extern *uniform*: Forță zero.

Cu totul evident, aceasta nu este situația cea mai generală. Momentul  $m$  ar putea fi orientat la un unghi oarecare față de cîmpul  $B$ , iar diversele componente ale lui  $B$  ar putea varia, spațial, în diverse moduri. Nu este greu de dezvoltat o formulă pentru forța  $F$  care este simțită în cazul



general. Ar fi exact ca formula generală pe care am dat-o, ecuația 9.22, pentru forța asupra unui dipol electric într-un câmp electric neuniform. Adică, componenta  $x$  a forței asupra oricărui dipol magnetic  $m$  este dată de

$$F_x = m \cdot \text{grad } B_x \quad (19)$$

cu formula corespunzătoare pentru  $F_y$  și  $F_z$ .

În ecuațiile 18 și 19 forța este în newton, cu gradientul câmpului magnetic în tesla/metru și momentul dipolar magnetic  $m$  dat de ecuația 9,  $m = Ia$  unde  $I$  este în amperi și  $a$  în metri pătrați. Există mai multe moduri echivalente de a exprima unitățile lui  $m$ . Noi vom adopta „joule/tesla”. După cum puteți vedea din ecuația 18,

$$m = \frac{\text{newton}}{(\text{tesla}/\text{metru})} = \frac{\text{newton} \cdot \text{metru}}{\text{tesla}} = \frac{\text{joule}}{\text{tesla}}.$$

Acum putem începe să vedem ce trebuie să se întâmple în experiențele descrise la începutul acestui capitol. O substanță localizată în poziția probei din figura 10.2 ar fi atrasă în interiorul solenoidului dacă ar conține dipoli magnetici paraleli cu câmpul  $B$  al bobinei. Ea ar fi fost împinsă în afară din solenoid dacă ar fi conținut dipoli orientați în direcția opusă, antiparaleli cu câmpul. Forța ar depinde de gradientul intensității câmpului axial, și ar fi zero în punctul median al solenoidului. De asemenea, dacă intensitatea totală a momentelor dipolare din probă era proporțională cu intensitatea  $B$  a câmpului, atunci într-o poziție dată forța ar fi proporțională cu  $B$  ori  $\partial B/\partial z$ , și deci cu pătratul curentului din solenoid. Aceasta este comportarea observată în cazul substanțelor diamagnetice și paramagnetice. Se pare că probele feromagnetice trebuie să fi avut un moment magnetic aproape independent de intensitatea câmpului, dar trebuie să le lăsăm deoparte pentru o discuție specială în orice caz.

Cum se întâmplă că aplicarea unui câmp magnetic unei substanțe provoacă în substanță momente dipolare magnetice cu intensitatea totală proporțională câmpului aplicat? Și de ce să fie ele paralele cu câmpul în unele substanțe, și orientate opus în altele? Dacă putem răspunde acestor întrebări vom fi pe calea către înțelegerea fizicii diamagnetismului și paramagnetismului.

## 10.5. CURENȚI ELECTRICI ÎN ATOMI

Știm că un atom este alcătuit dintr-un nucleu pozitiv înconjurat de electroni negativi. Pentru a-l descrie complet am avea nevoie de conceptele fizicii cuantice pe care o veți studia mai târziu în acest curs. Din fericire, un model simplu și ușor de vizualizat al unui atom poate explica diamagnetismul foarte bine. Este un model planetar cu electroni pe orbite în jurul nucleului, ca modelul în prima teorie cuantică a lui Bohr a atomului de hidrogen.

Începem cu un electron în mișcare cu viteză constantă pe o traiectorie circulară. Deoarece nu încercăm aici să explicăm structura atomică, nu ne vom interesa de motivul pentru care electronul are această orbită particulară. Întrebăm doar, dacă electronul se mișcă pe o astfel de orbită, ce



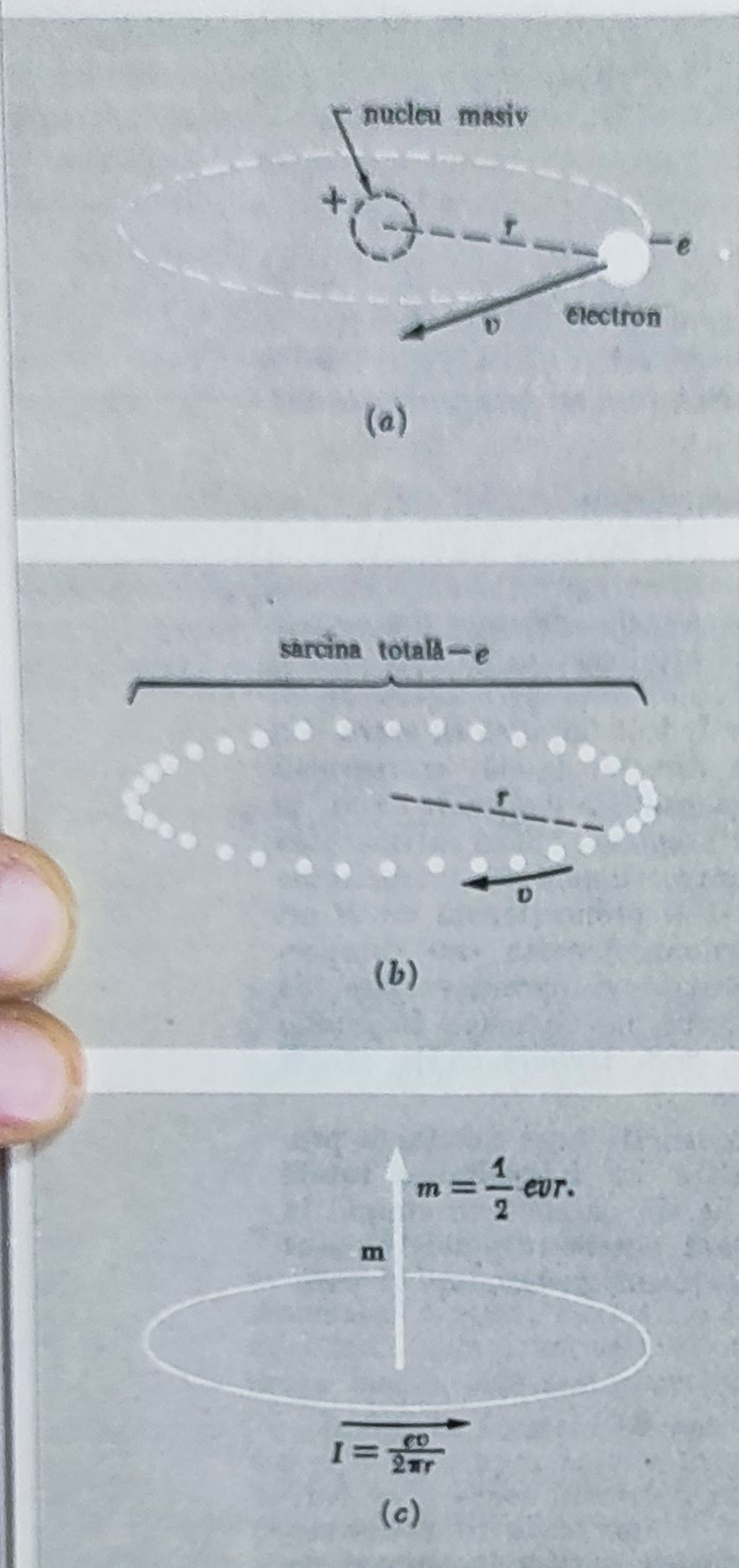


Fig. 10.11. (a) Un model de atom în care un electron se mișcă cu viteza  $v$  pe o orbită circulară.

(b) Distribuție echivalentă de sarcină. Curentul electric mediu este același dacă sarcina  $-e$  ar fi împărțită în mici bucăți, formând un inel rotitor de sarcină.

(c) Momentul magnetic este produsul curentului și ariei.

efecte magnetice sînt de așteptat? În figura 10.11 vedem electronul, vizualizat drept o particulă purtînd o sarcină electrică concentrată  $-e$ , în mișcare cu viteza  $v$  pe o traiectorie circulară de rază  $r$ . În mijloc este o sarcină nucleară pozitivă, care face sistemul electric neutru, dar nucleul, din cauza masei sale relativ mare, se mișcă atît de încet încît efectele sale magnetice pot fi neglijate.

În orice moment, electronul și sarcina pozitivă vor apărea ca un dipol electric, dar în medie temporală momentul dipolar electric este zero, care nu produce nici un cîmp electric staționar la distanță. Am discutat aceasta în § 9.5. Cîmpul *magnetic* al sistemului, la depărtare, *nu* este zero în medie temporală. Din contră, este tocmai cîmpul unui inel de curent. Deoarece, în ceea ce privește media temporală, nu poate apare nici o diferență dacă avem toată sarcina negativă strînsă într-o bucată, în mișcare pe traiectorie, sau distribuită în bucăți, ca în figura 10.11, b, pentru a alcătui o procesiune uniformă fără sfîrșit. Curentul este cantitatea de sarcină care trece printr-un punct dat de pe inel, pe secundă. Deoarece electronul face  $v/2\pi r$  revoluții pe secundă, curentul, în amperi, este

$$I = \frac{ev}{2\pi r}. \quad (20)$$

Electronul în rotație este echivalent cu un curent inelar de această mărime cu direcția de trecere pozitivă opusă lui  $v$ , cum se arată în figura 10.11, c. Cîmpul de distanțe mari este deci acela al unui dipol magnetic, de intensitate

$$m = \pi r^2 I = \frac{1}{2} e v r. \quad (21)$$

Să observăm în trecere o relație simplă între momentul magnetic  $m$  asociat cu orbita electronului, și momentul unghiular orbital  $L$ . Momentul unghiular este un



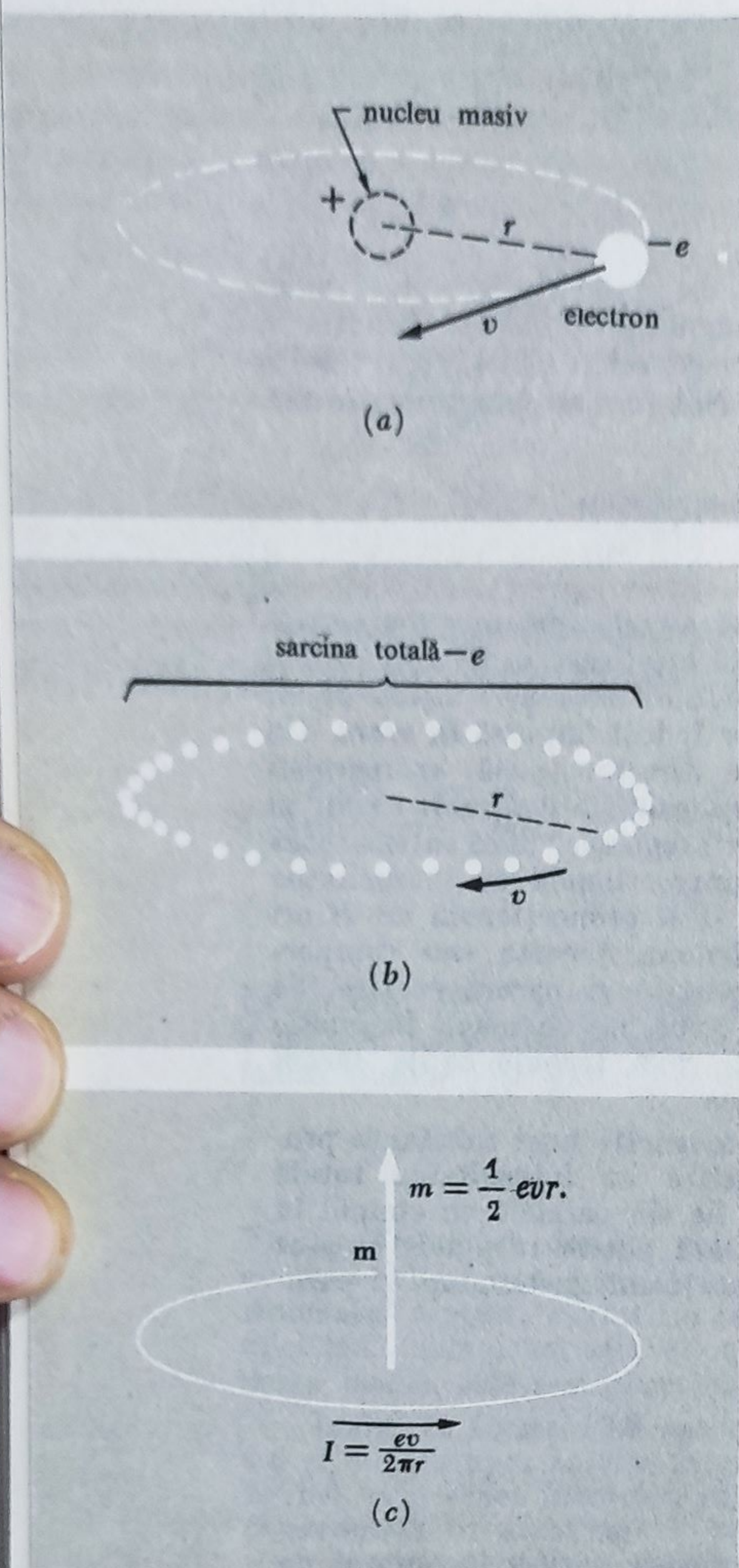


Fig. 10.11. (a) Un model de atom în care un electron se mișcă cu viteza  $v$  pe o orbită circulară.

(b) Distribuție echivalentă de sarcină. Curentul electric mediu este același dacă sarcina  $-e$  ar fi împărțită în mici bucăți, formând un inel rotitor de sarcină.

(c) Momentul magnetic este produsul curentului și ariei.

efecte magnetice sînt de așteptat? În figura 10.11 vedem electronul, vizualizat drept o particulă purtînd o sarcină electrică concentrată  $-e$ , în mișcare cu viteza  $v$  pe o traiectorie circulară de rază  $r$ . În mijloc este o sarcină nucleară pozitivă, care face sistemul electric neutru, dar nucleul, din cauza masei sale relativ mare, se mișcă atît de încet încît efectele sale magnetice pot fi neglijate.

În orice moment, electronul și sarcina pozitivă vor apărea ca un dipol electric, dar în medie temporală momentul dipolar electric este zero, care nu produce nici un cîmp electric staționar la distanță. Am discutat aceasta în § 9.5. Cîmpul *magnetic* al sistemului, la depărtare, *nu* este zero în medie temporală. Din contră, este tocmai cîmpul unui inel de curent. Deoarece, în ceea ce privește media temporală, nu poate apare nici o diferență dacă avem toată sarcina negativă strînsă într-o bucată, în mișcare pe traiectorie, sau distribuită în bucăți, ca în figura 10.11, *b*, pentru a alcătui o procesiune uniformă fără sfîrșit. Curentul este cantitatea de sarcină care trece printr-un punct dat de pe inel, pe secundă. Deoarece electronul face  $v/2\pi r$  revoluții pe secundă, curentul, în amperi, este

$$I = \frac{ev}{2\pi r}. \quad (20)$$

Electronul în rotație este echivalent cu un curent inelar de această mărime cu direcția de trecere pozitivă opusă lui  $v$ , cum se arată în figura 10.11, *c*. Cîmpul de distanțe mari este deci acela al unui dipol magnetic, de intensitate

$$m = \pi r^2 I = \frac{1}{2} evr. \quad (21)$$

Să observăm în trecere o relație simplă între momentul magnetic  $m$  asociat cu orbita electronului, și momentul unghiular orbital  $L$ . Momentul unghiular este un

masa  
magne  
nului.  
capitol  
unghi  
densita  
\*

Noi pr



vector de mărime  $L = m_e v r$ , unde  $m_e$  desemnează masa electronului\* și este orientat în jos dacă electronul se rotește în sensul arătat în figura 10.11, a. Observați că produsul  $vr$  apare în ambii  $m$  și  $L$ . Cu atenția datorată direcției, putem scrie

$$m = \frac{-e}{2m_e} L. \quad (22)$$

Această relație nu implică decât constante fundamentale, care v-ar face să bănuți că ea are loc în mod cu totul general. Într-adevăr acesta este cazul, deși nu o vom dovedi aici. Ea este corectă pentru orbite eliptice, și are loc chiar pentru orbite în formă de rozetă care apar într-un câmp central care nu este invers-pătratic. Amintiți-vă proprietatea importantă a oricărei orbite într-un câmp central: momentul unghiular este o integrală a mișcării, adică o constantă. Urmează atunci, din relația generală exprimată prin ecuația 22 (dedusă de noi doar într-un caz particular), că ori de câte ori momentul unghiular este conservat, momentul magnetic rămâne de asemenea constant în mărime și direcție. Factorul

$$\frac{-e}{2m_e}$$

este numit *raport magneto-mecanic orbital* pentru electron\*\*. Legătura intimă dintre momentul magnetic și momentul unghiular este centrală în orice explicare a magnetismului atomic.

De ce nu observăm câmpurile magnetice ale tuturor electronilor rotitori din toți atomii oricărei substanțe? Răspunsul trebuie să fie că există o anulare mutuală. Într-o bucată obișnuită de materie trebuie să fie tot atîția electroni mergînd într-un sens ca și în celălalt. Aceasta este de așteptat, deoarece nu există nimic care să facă un sens de rotație intrinsec mai ușor decât celălalt, sau altfel spus de a distinge o direcție axială unică. Ar trebui să fie ceva în structura materialului care să individualizeze nu numai o axă, dar un *sens de rotație în jurul acelei axe!*

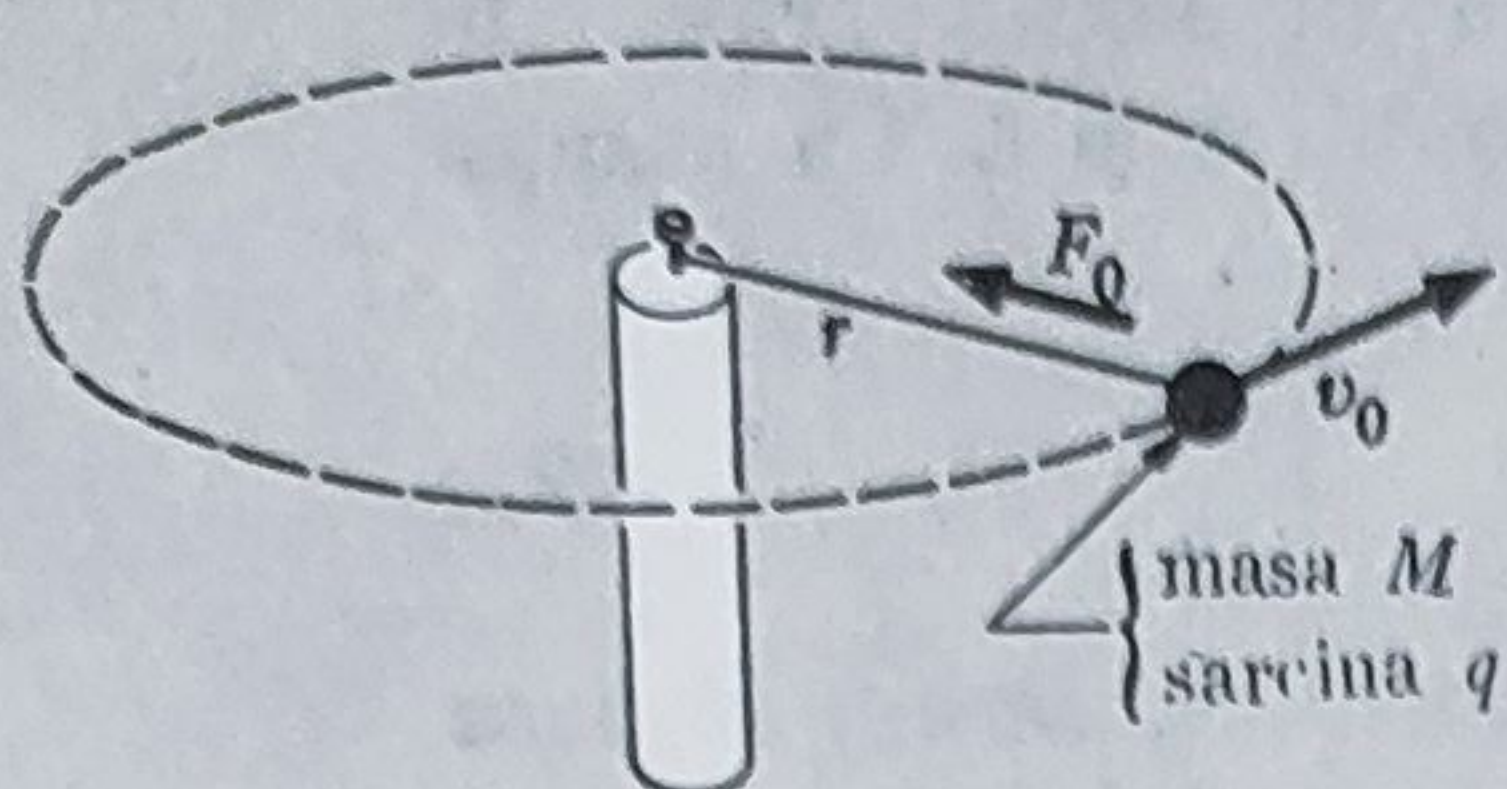
Putem imagina o bucată de materie, în absența oricărui câmp magnetic exterior, drept conținînd electroni pe orbite cu diverșii lor vectori moment, unghiular orbital și moment magnetic orbital asociate distribuite în mod egal după toate direcțiile spațiului. Să considerăm acele orbite care se întîmplă să aibă planele lor aproximativ paralele cu planul  $xy$ , din care vor exista numere egale cu  $m$  în sus și  $m$  în jos. Să aflăm ce se întîmplă cu una dintre aceste orbite cînd comutăm un câmp magnetic exterior în direcția  $z$ .

\* Vom avea de-a face cu viteze  $v$  mult mai mici decât  $c$ , astfel încît  $m_e$  reprezintă masa de repaus,  $9,1 \times 10^{-31}$  kg. Alegerea noastră a simbolului  $m$  pentru momentul magnetic face necesară, în acest capitol, folosirea unui simbol diferit pentru masa electronului. Pentru momentul unghiular alegem simbolul  $L$ , în locul lui  $J$  folosit în volumul I, capitolul 6, deoarece  $L$  este folosit în mod tradițional în fizica atomică pentru moment unghiular orbital, care este ceea ce considerăm aici, și deoarece am folosit  $J$  pentru densitatea de curent.

\*\* De multe ori se folosește termenul raport *giromagnetic* pentru această cantitate. Noi preferăm raport magneto-mecanic, cum s-a folosit în volumul I, capitolul 8.

84,83,73  
285,257

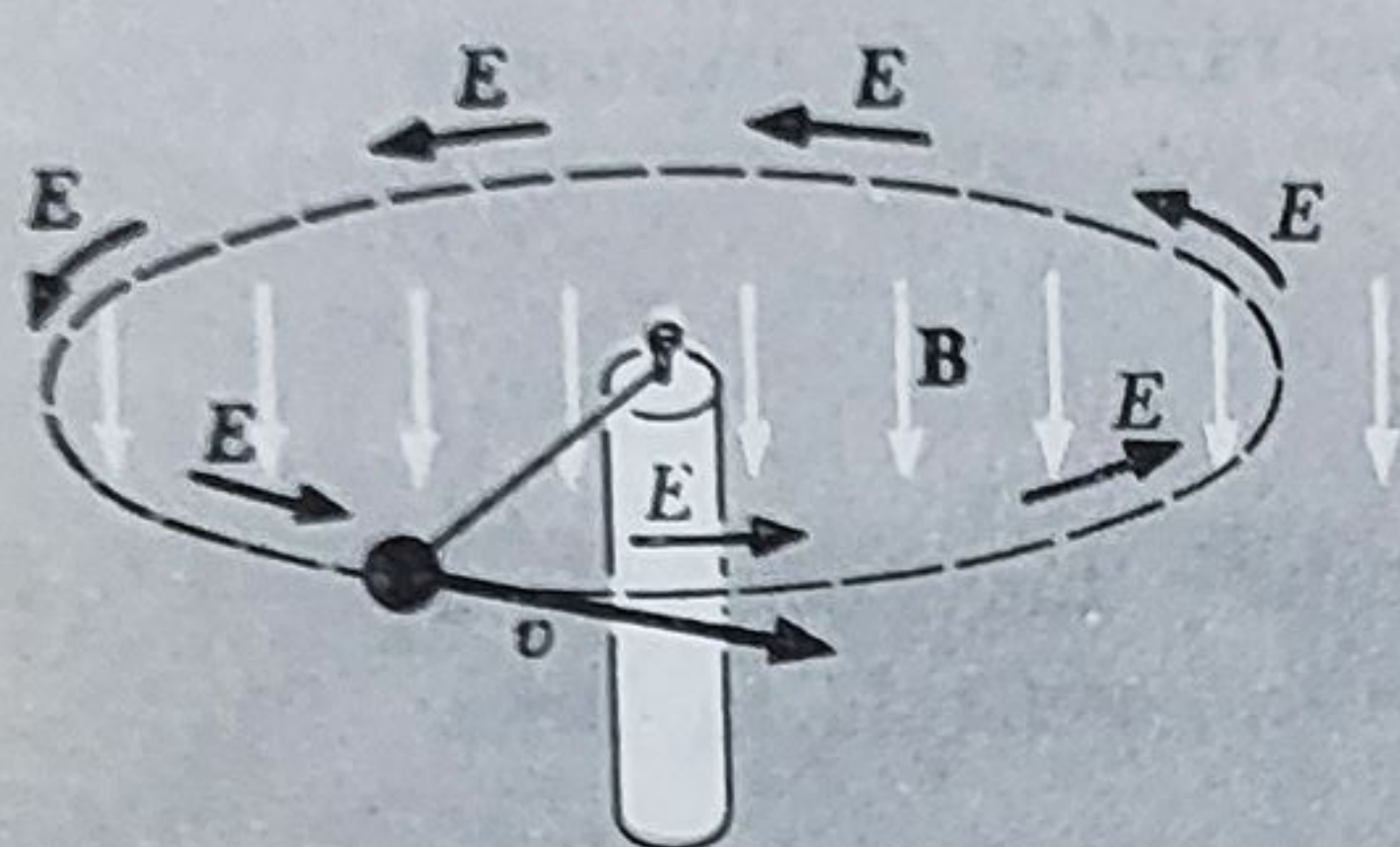




a) starea inițială

$$\mathbf{B} = 0$$

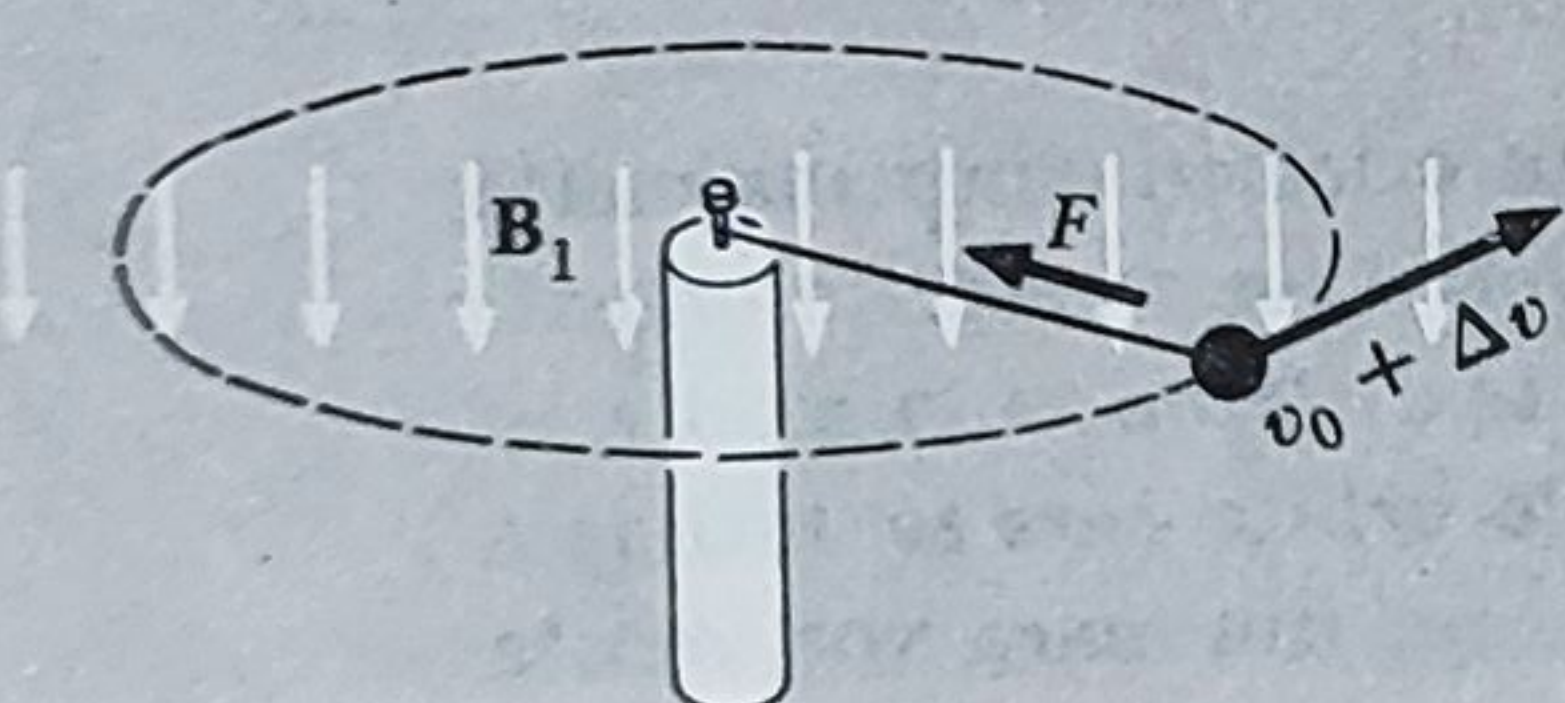
$$F_0 = \frac{Mv_0^2}{r}$$



b) starea intermediară

$\mathbf{B}$  crescător în jos

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$



c) starea finală

după timpul  $\Delta t$

$$\mathbf{B} = B_1$$

$$\Delta v = \frac{qE \Delta t}{M} = \frac{qrB_1}{2M}$$

Fig. 10.12. Creșterea inducției magnetice  $\mathbf{B}$  induce un câmp electric de intensitate  $\mathbf{E}$  care accelerează corpul încărcat de pe orbită.

Vom analiza mai întâi un sistem electro-mecanic care nu arată prea mult ca un atom. În figura 10.12 există un obiect de masă  $M$  și sarcină electrică  $q$ , legat la un punct fix printr-o coardă de lungime fixă  $r$ . Această coardă dă forța centripetă care ține obiectul pe orbita sa circulară. Mărimea acelei forțe  $F_0$  este dată, după cum știm, de

$$F_0 = \frac{Mv_0^2}{r}. \quad (23)$$

În starea inițială, figura 10.12, a, nu există nici un câmp magnetic extern. Acum, prin intermediul unui oarecare solenoid mare, convenabil, începem să creăm un câmp de inducție  $\mathbf{B}$  în direcția  $z$  negativă, uniform peste întreaga regiune la orice moment dat. În timp ce câmpul crește cu rata  $dB/dt$ , va exista un câmp electric indus  $\mathbf{E}$  peste tot în jurul traiectoriei, cum se arată în figura 10.12, b. Pentru a găsi mărimea acestui câmp  $\mathbf{E}$  observăm că rata de variație a fluxului prin traiectoria circulară este

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}. \quad (24)$$

Aceasta determină integrala curbilinie a câmpului electric, care este de fapt tot ceea ce contează (presupunem doar pentru simplitate și simetrie că este identic pe toată traiectoria).

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} = 2\pi r E. \quad (25)$$

Găsim astfel că

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}. \quad (26)$$



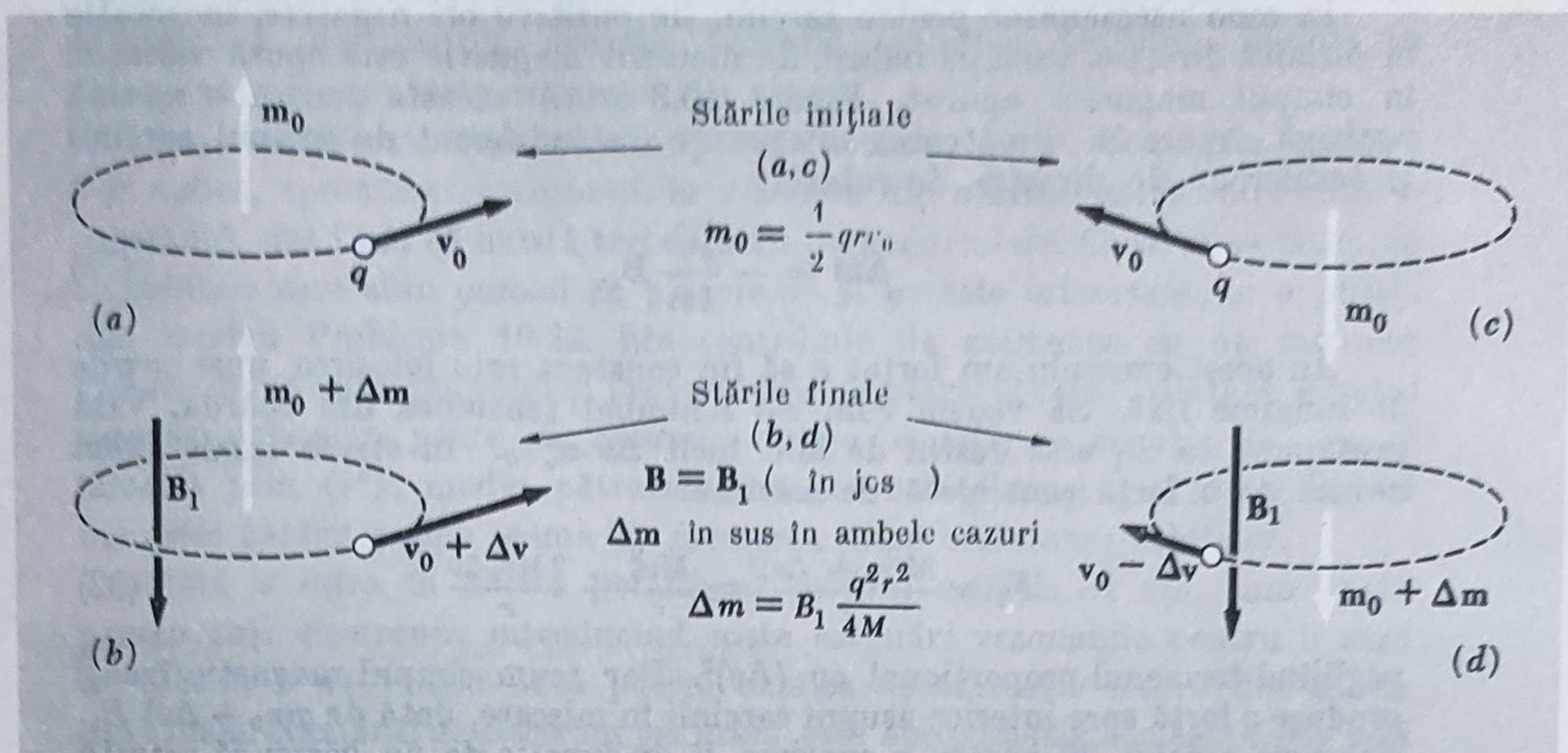


Fig. 10.13. Variația vectorului moment magnetic este opusă sensului lui  $\vec{B}$ , pentru ambele sensuri de mișcare.

Am neglijat semnele pînă aici, dar dacă aplicați la figura 10.12 regula dumneavoastră preferată de a găsi direcția unei forțe electromotoare induse, veți vedea că  $\vec{E}$  trebuie să fie într-o direcție în care să accelereze corpul, dacă  $q$  este o sarcină pozitivă. Accelerația de-a lungul traiectoriei,  $dv/dt$ , este determinată de forța  $qE$ :

$$M \frac{dv}{dt} = qE = \frac{qr}{2} \frac{dB}{dt} \quad (27)$$

astfel încît avem o relație între variația în  $v$  și variația în  $B$ :

$$dv = \frac{qr}{2M} dB. \quad (28)$$

Raza  $r$  fiind fixată de lungimea corzii, factorul  $(qr/2M)$  este constant. Fie  $\Delta v$  variația totală în  $v$  în întreg procesul de aducere a cîmpului pînă la valoarea finală  $B_1$ . Atunci:

$$\Delta v = \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v} dv = \frac{qr}{2M} \int_0^{B_1} dB = \frac{qr B_1}{2M}. \quad (29)$$

Observați că timpul a dispărut — viteza finală este aceeași dacă variația este făcută încet sau repede.

Viteza crescută a sarcinii în starea finală înseamnă o creștere în momentul magnetic  $m$  orientat în sus. Un corp încărcat *negativ* ar fi frînat în împrejurări asemănătoare, ceea ce ar fi descrescut momentul orientat în jos. În fiecare din cazuri, atunci, aplicarea cîmpului  $B_1$  a produs o variație în momentul magnetic opusă cîmpului. Mărimea variației de moment magnetic  $\Delta m$ , este

$$\Delta m = \frac{qr}{2} \Delta v = \frac{q^2 r^2}{4M} B_1. \quad (30)$$



În mod asemănător pentru sarcini, fie pozitive ori negative, în rotație în cealaltă direcție, variația indusă de moment magnetic este opusă variației în câmpul magnetic aplicat. Figura 10.3 arată aceasta pentru o sarcină pozitivă. Apare că următoarea relație are loc indiferent de semnul sarcinii și indiferent de direcția de rotație:

$$\Delta m = - \frac{q^2 r^2}{4M} B_1. \quad (31)$$

În acest exemplu am forțat  $r$  să fie constant prin folosirea unei coarde de lungime fixă. Să vedem cum s-a schimbat tensiunea din coardă. Vom presupune că  $B_1$  este destul de mic încît  $\Delta v \ll v_0$ . În starea finală avem nevoie de o forță centripetă de mărime:

$$F_1 = \frac{M(v_0 + \Delta v)^2}{r} \approx \frac{Mv_0^2}{r} + \frac{2Mv_0\Delta v}{r} \quad (32)$$

neglijînd termenul proporțional cu  $(\Delta v)^2$ . Dar acum câmpul magnetic însuși produce o forță spre interior asupra sarcinii în mișcare, dată de  $q(v_0 + \Delta v) B_1$ . Folosind ecuația 29 pentru a exprima  $B_1$  în funcție de  $\Delta v$ , găsim că această forță suplimentară orientată spre interior are mărimea  $q(v_0 + \Delta v) \cdot \frac{2M\Delta v}{qr}$  care, în primul ordin în  $\Delta v/v_0$ , este  $2Mv_0\Delta v/r$ . Aceasta este tocmai ceea ce este necesar, după ecuația 32, pentru a evita orice extrasolicitare asupra coardei noastre! Deci tensiunea în coardă rămîne neschimbată, la valoarea  $F_0$ .

Aceasta ne aduce la o concluzie surprinzătoare: rezultatul nostru, ecuația 31, trebuie să fie adevărat pentru orice fel de forță de legătură care variază cu raza. Coarda noastră ar putea fi înlocuită printr-un resort elastic fără a afecta concluzia — raza încă ar fi neschimbată în starea finală. Sau ca să trecem imediat la un sistem care ne interesează, ar putea fi înlocuit prin atracția Coulomb a unui nucleu pentru un electron. Ori ar putea fi forța efectivă care acționează asupra unui electron într-un atom care conține mulți electroni, care are o dependență diferită de rază. Dintr-o relație atît de generală cum pare a fi ecuația 31 putem spera că unele rezultate rezonabile chiar fără o bună teorie a structurii atomice. Singura trăsătură a atomului care apare explicit este  $r^2$ . Desigur, trebuie să observăm limitarea  $\Delta v/v_0 \ll 1$ , de fapt o limitare asupra lui  $B_1$ , care a permis această aplicabilitate generală.

Efectul asupra orbitelor electronice al comutării unui câmp magnetic  $B$  poate fi vizualizat în acest mod: fiecare electron continuă să se rotească la aceeași rază, dar viteza sa unghiulară, care era  $\pm v_0/r$ , depinzînd de sensul de rotație, și-a adăugat o mică creștere  $\Delta\omega = \Delta v/r$ . După ecuația 29 valoarea acestei creșteri este

$$\Delta\omega = \frac{\Delta v}{r} = \frac{eB}{2m_e} \quad (33)$$

o viteză unghiulară care depinde doar de intensitatea câmpului aplicat și de raportul sarcină-masă al electronului. Toate rotațiile într-un sens sînt accelerate prin aceeași cantitate, exprimată în radiani pe secundă, iar acelea în cealaltă direcție încetinite prin aceeași cantitate. Noul sistem arată exact ca și vechiul sistem văzut dintr-un sistem de referință în rotație. Viteza unghiulară  $eB/2m_e$  în ecuația 33 este numită „viteză unghiulară



Larmor" sau „frecvență Larmor". Sir Joseph Larmor, fizicianul-matematician britanic, a demonstrat această teoremă generală în 1895, înainte ca cineva să știe cum este construit un atom.

Am considerat doar orbite perpendiculare pe **B**. Concluzia noastră s-ar aplica, aproximativ vorbind, la o treime din orbitele electronice dintr-o substanță, dat fiind că există trei direcții perpendiculare. Ceea ce se întâmplă cu orbitele care stau paralel cu planele  $xz$  și  $yz$  este interesant, și o puteți afla lucrând Problema 10.22. Ele contribuie de asemenea cu un moment dipolar indus opus câmpului și proporțional cu pătratul razei orbitale. Efectul tuturor orbitelor poate fi rezumat într-o ecuație ca ecuația 31, cu  $r^2$  înlocuit prin  $\langle r^2 \rangle$ , media pătratelor razelor orbitale, și cu niște factori numerici pentru a ține seama de medierea după orientarea orbitelor.

Fără a intra în aceste detalii, să folosim ecuația 31 așa cum arată pentru toți electronii, introducând niște estimări rezonabile pentru o rază de orbită, și să vedem dacă putem explica aproximativ câteva din datele din tabelă. Numărul de electroni per gram este aproximativ același în cele mai multe substanțe, deoarece există un proton în nucleu pentru fiecare electron în atom, și în mare un neutron pe proton. Astfel numărul de electroni pe gram,  $n$ , este aproximativ același ca în substanța de greutate atomică 2 și număr atomic 1, anume:

$$n \approx \frac{6 \cdot 10^{23}}{2} = 3 \cdot 10^{23}. \quad (34)$$

Pentru  $r$  vom lua  $0,5 \cdot 10^{-8}$  cm, o distanță cu care veți deveni foarte familiarizați ca o rază atomică „tipică". În atomi cu mai mulți electroni, desigur, unii electroni au orbite mari iar alții mici. Pentru  $M$  înlocuim masa electronului  $m_e$ . Intensitatea câmpului magnetic la poziția probei era 1,8 tesla. Atunci momentul magnetic total indus într-un gram de substanță este, în mare:

$$\begin{aligned} n\Delta m &= \frac{ne^2 r^2 B}{4m_e} = \frac{(3 \cdot 10^{23}) (1,6 \cdot 10^{-19})^2 (0,5 \cdot 10^{-10})^2 (1,8)}{4(9 \cdot 10^{-31})} = \\ &= 0,96 \cdot 10^{-5} \text{ (joule/tesla)/gram} \end{aligned} \quad (35)$$

Gradientul câmpului  $\partial B_z / \partial z$  a fost 17 T/m. Folosind ecuația 18 pentru a calcula forța, am prezice o forță în mărime de  $17 \cdot 0,96 \cdot 10^{-5}$  newtoni, sau aproximativ  $1,6 \cdot 10^{-4}$  newtoni. Aceasta este apropiată de cifrele date pentru un număr de substanțe în tabelă. De fapt, este mai aproape decît am fi avut dreptul să ne așteptăm, astfel încît acordul este de aceea accidental.\*

\* Formulă exactă, obținută prin medierea peste orbite orientate în mod izotrop, înlocuiește factorul  $\frac{1}{4}$  din ecuația 31 prin  $\frac{1}{6}$ , înlocuind  $r^2$  prin  $\langle r^2 \rangle$ . O teorie cuantomecanică riguroasă conduce la exact același rezultat, și concordanța cu experiența este excelentă. Într-adevăr, pentru mulți atomi diamagnetici măsurările magnetice dau cea mai precisă cale de a determina  $\langle r^2 \rangle$ .



Avem de verificat că presupunerea noastră  $\Delta v \ll v_0$  este îndeplinită în această situație. Introducând aceleași valori în ecuația 29, putem estima  $\Delta v$ :

$$\Delta v = \frac{e\hbar B}{2m_e} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19}) (0,5 \cdot 10^{-10}) (1,8)}{2(9 \cdot 10^{-31})} \approx 10 \text{ m/sec.} \quad (36)$$

Nu aveți nevoie să cunoașteți multă fizică atomică pentru a realiza că 10 m/sec este mic în comparație cu viteza unui electron într-un atom. Aceasta se poate calcula repede! O viteză tipică pentru un electron atomic este mai degrabă  $10^6$  m/sec, sau mai mare. Aceasta arată că fie și magnetul nostru destul de puternic aplică un câmp care este foarte slab, din punctul de vedere al unui electron atomic, producând doar mici variații în vitezele de revoluție.

Putem vedea acum de ce diamagnetismul este un fenomen universal, și destul de puțin manifest. Este aproximativ același în molecule ca și în atomi. Faptul că o moleculă poate fi o structură mult mai mare decât un atom — ea poate fi construită din sute sau mii de atomi — nu crește în general raza orbitală pătratică medie efectivă. Motivul este că într-o moleculă orice electron dat este destul de bine localizat pe un atom. Există unele excepții interesante și am inclus una în tabel — grafitul. Diamagnetismul anormal al grafitului este datorat unei structuri neuzuale care permite unora dintre electroni să circule destul de liber în interiorul unui grup planar de atomi din rețeaua cristalină.

## 10.6. SPINUL ELECTRONULUI ȘI MOMENTUL MAGNETIC

Electronul posedă moment unghiular care nu are nimic de-a face cu mișcarea sa orbitală. El se comportă în multe privințe ca și când ar fi în continuă rotație în jurul unei axe proprii. Această proprietate este numită *spin*. Când mărimea momentului unghiular de spin este măsurată, totdeauna este obținut același rezultat:  $\hbar/4\pi$ , unde  $\hbar$  este constanta lui Planck. Spinul electronului este un fenomen cuantic. Veți auzi mai multe despre descoperirea și implicațiile sale în volumul IV al acestui curs. Semnificația sa pentru noi stă acum în faptul că există un *moment magnetic* asociat cu acest moment unghiular intrinsec, de asemenea de mărime invariabilă. Acest moment magnetic este orientat în direcția la care v-ați așteptat dacă vizualizați electronul drept o bilă de sarcină negativă rotindu-se în jurul axei sale. Aceasta înseamnă că vectorul moment magnetic este orientat antiparalel cu vectorul moment unghiular de spin, cum se indică în figura 10.14. Momentul magnetic, totuși, este de două ori mai mare, relativ la momentul unghiular, decât în cazul mișcării orbitale.

Nu are sens să încercăm să facem un model clasic al acestui obiect; proprietățile sale sînt esențialmente cuanto-mecanice. Nici măcar nu avem nevoie să mergem atît de departe încît să spunem că este o buclă de curent. Ceea ce contează este numai că se comportă astfel în următoarele privințe: (i) produce un câmp magnetic care, la distanță, este acela al unui dipol magnetic; (ii) într-un câmp extern  $\mathbf{B}$  el este supus unui cuplu egal cu acela care ar acționa asupra unei bucle de curent de moment dipolar echivalent; (iii) în interiorul sursei,  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  peste tot, ca în sursele obișnuite de câmp magnetic cu care sîntem deja familiarizați.



Deoarece mărimea momentului magnetic de spin este totdeauna aceeași, singurul lucru pe care îl poate influența un câmp extern este direcția. Un moment magnetic într-un câmp extern simte un cuplu. Dacă ați rezolvat Problema 6.22, ați demonstrat că cuplul  $N$  asupra unei bucle de curent de orice formă, de moment dipolar  $m$ , într-un câmp  $B$ , este dată de

$$N = m \times B. \quad (37)$$

Pentru aceia care nu au trecut prin acea demonstrație, să calculăm cuplul într-un caz special simplu. În figura 10.15 vedem o buclă dreptunghiulară de sîrmă care poartă un curent  $I$ . Buclea are un moment magnetic  $m$ , de mărime  $m = Iab$ . Cuplul asupra buclei provine de la forțele  $F_1$  și  $F_2$  care acționează asupra firelor orizontale. Fiecare dintre aceste forțe are mărimea  $F = IbB$  și brațul corespunzător al momentului este distanța  $(a/2) \sin \theta$ . Vedem că mărimea cuplului asupra buclei este

$$N = 2 IbB \cdot \frac{a}{2} \sin \theta = (Iab)B \sin \theta = mB \sin \theta. \quad (38)$$

Cuplul acționează într-o direcție încît să aducă  $m$  paralel cu  $B$ ; el este reprezentat printr-un vector  $N$  în direcția  $x$  pozitivă, în situația arătată. Toate acestea sînt în acord cu formula generală, ecuația 37. Observați că ecuația 37 corespunde exact la formula pe care am dedus-o în capitolul 9 pentru cuplul asupra unui dipol electric  $p$  într-un câmp exterior  $E$ , anume  $N = p \times E$ . Orientarea cu  $m$  în direcția lui  $B$ , ca și aceea a dipolului electric paralel cu  $E$ , este poziția de cea mai joasă energie. În mod asemănător, lucrul necesar pentru a roti un dipol  $m$  de la paralel la antiparalel este  $2mB$ . (Vezi ec. 9.18; pur și simplu putem să preluăm acest rezultat pentru cazul magnetic.)

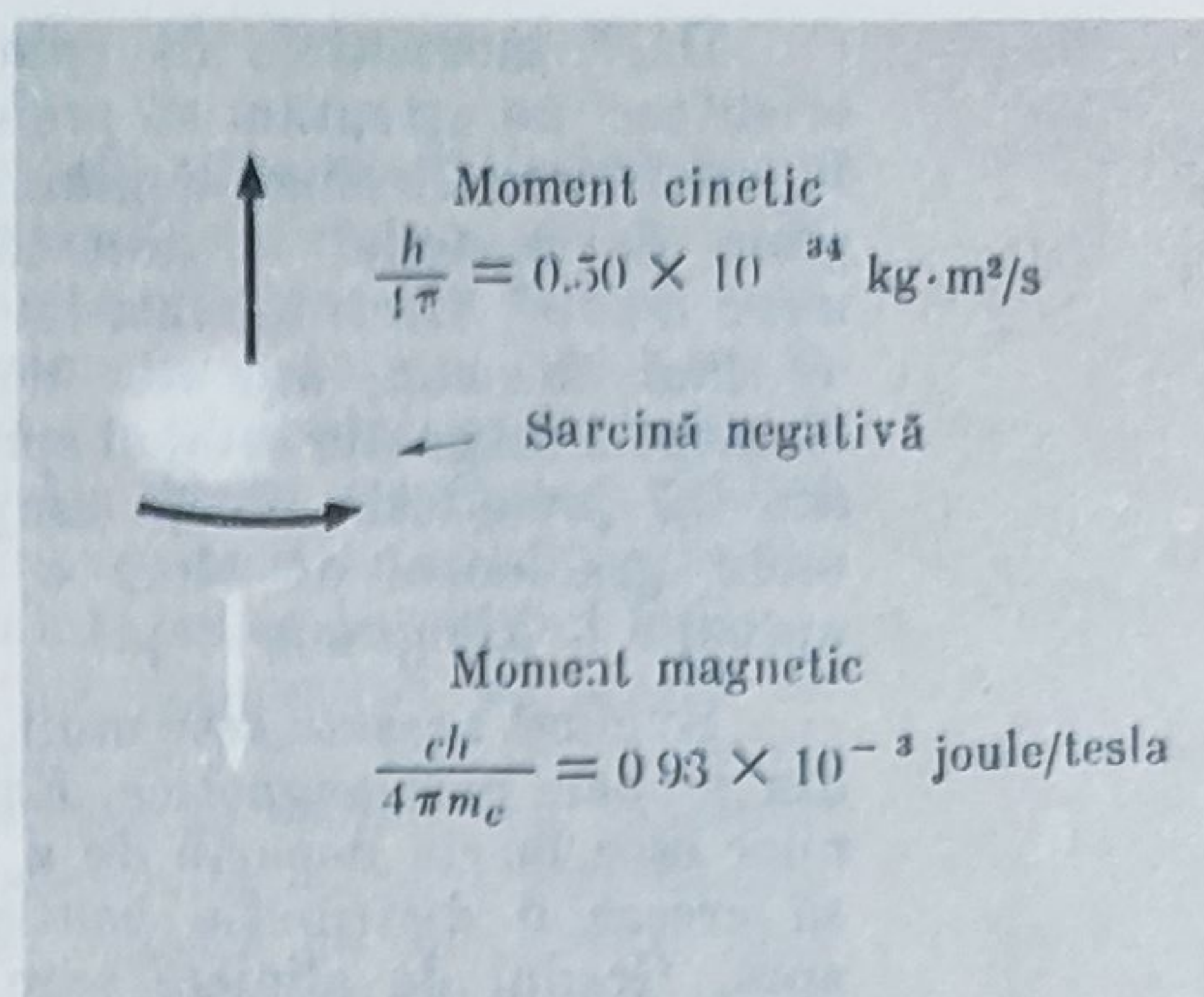


Fig. 10.14. Momentul cinetic intrinsec, sau spinul, și momentul magnetic asociat al electronului.

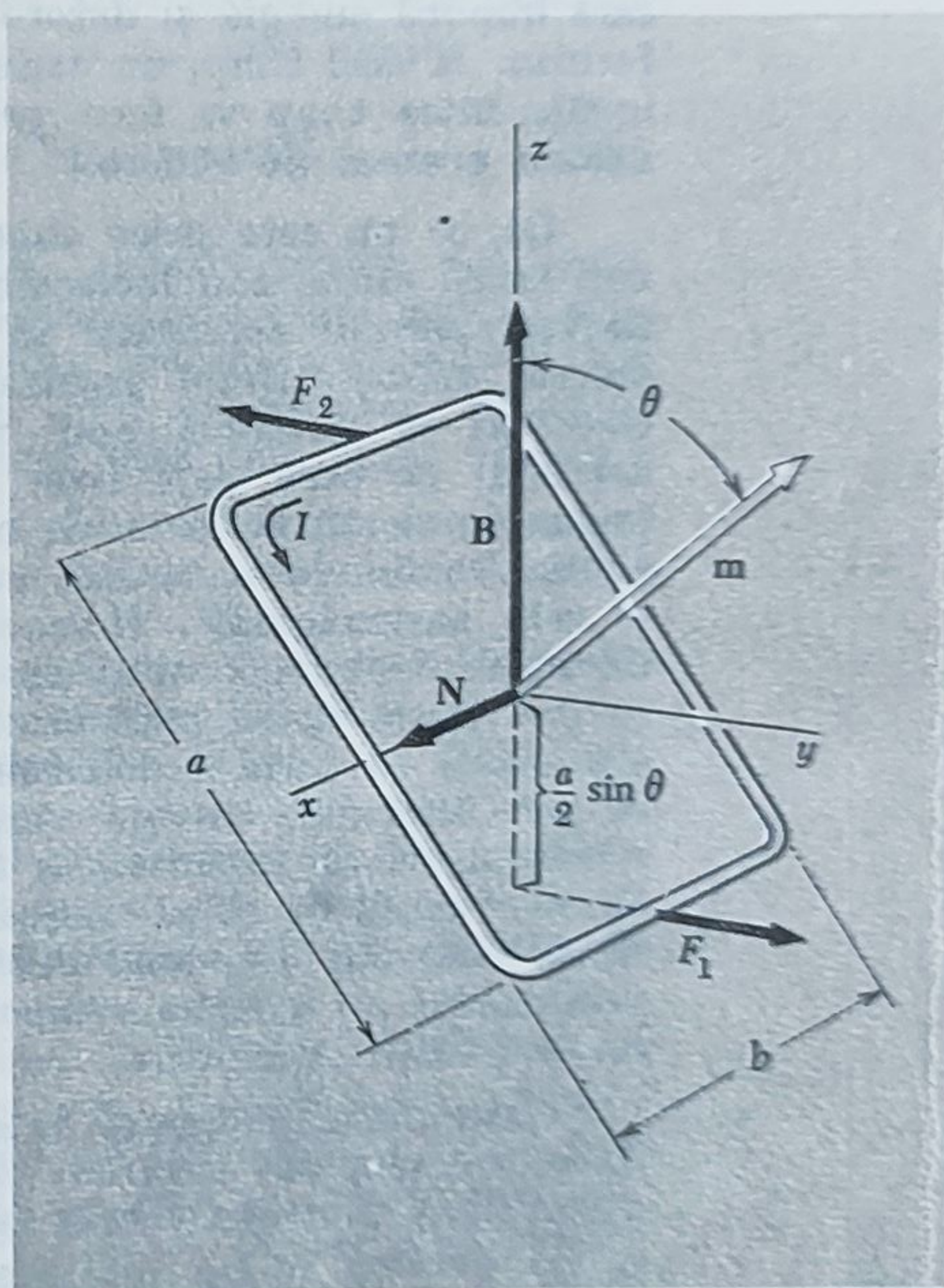


Fig. 10.15. Calcularea cuplului asupra unei spire într-un câmp magnetic de inducție  $B$ . Momentul magnetic al buclei de curent este  $m$ .

81,83,43  
285,257



Dacă momentele de spin electronic într-o substanță sînt libere să se orienteze, ne așteptăm să prefere orientarea în direcția oricărui cîmp aplicat  $B$ , orientarea de energie minimă. Să presupunem că fiecare electron dintr-un gram de material ia această orientare. Am calculat deja că se află în mare  $3 \cdot 10^{23}$  electroni într-un gram din orice. Momentul magnetic de spin al unui electron,  $m_s$ , este dat în figura 10.14 ca  $0,93 \cdot 10^{-23}$  joule/tesla. Momentul magnetic total al spinilor noștri aliniați va fi  $(3 \cdot 10^{23}) \times (0,9 \cdot 10^{-23})$ , sau 2,7 joule/tesla. Forța asupra unei astfel de probe, în bobina noastră unde gradientul de cîmp a fost 17 tesla/metru, ar fi 46 newton, sau aproape 5 kilograme-forță!

Evident aceasta este mult mai mare decît forța observată pentru oricare din probele paramagnetice. Explicația este că alinierea momentelor electronilor este foarte departe de a fi perfectă. Agitația termică tinde totdeauna să creeze o distribuție haotică, sau la întîmplare, a direcțiilor axelor de spin. Gradul de aliniere care apare în realitate reprezintă un compromis între preferința pentru direcția de cea mai joasă energie și influența desorientantă a mișcării termice. Apare că momentul magnetic total este în general proporțional cu cîmpul aplicat  $B$ , și invers proporțional cu temperatura absolută  $T$ . Cum se obține aceasta trebuie să lăsăm pentru volumul  $V$  al acestui curs, tema căruia ar putea fi descrisă drept competiția care implică energia și dezordinea. Paramagnetismul spinilor electronici va furniza, la acel timp, un exemplu instructiv. Fizica cuantică pe care o veți învăța între timp va face problema *mai simplă* decît apare din punctul nostru prezent de vedere.

De ce nu este orice substanță paramagnetică? Motivul este că în cei mai mulți atomi sau molecule, electronii sînt grupați în perechi, cu spinii fiecărei perechi constrînși să fie orientați în direcții opuse indiferent de cîmpul aplicat. Drept rezultat, momentele magnetice ale unei perechi de electroni se anulează unul pe celălalt. Tot ceea ce rămîne este diamagnetismul pe care deja l-am explorat. Unele molecule conțin un număr impar de electroni, și în ele anularea totală în perechi este evident imposibilă. Oxidul de azot,  $\text{NO}$ , cu 15 electroni în moleculă este un exemplu; el este paramagnetic. Molecula de oxigen  $\text{O}_2$  conține un număr par de electroni, dar structura sa electronică se întîmplă să favorizeze neanularea a doi dintre spinii electronici. În anumite grupe de elemente, mai ales elementele în jurul gadoliniului în sistemul periodic, și de asemenea acelea în jurul fierului, atomii conțin spini electronici neîmperecheați care sînt relativ liberi să se orienteze într-un cîmp magnetic. (Momentul magnetic al unui astfel de atom adesea include și o oarecare contribuție de la mișcarea orbitală.) În conductori metalici, electronii „liberi” care rătăcesc prin metal au o slabă comportare paramagnetică proprie. Toate acestea au la bază fizica cuantică.

Chiar diamagnetismul, în mod fundamental, implică mecanică cuantică. Să considerăm doi electroni rotindu-se în direcții opuse într-un atom. Am explicat că diamagnetismul provine din aceea că un cîmp aplicat  $B$  face ca un electron să fie ușor accelerat iar celălalt să fie încetinit. Dar de ce nu se deplasează ambele orbite astfel încît momentele lor magnetice să fie orientate în aceeași direcție, paralelă cu cîmpul? Răspunsul este că celor doi electroni, în cele mai multe cazuri, li se impune prin legi cuantomecanice să-și mențină direcțiile opuse de revoluție orbitală, în mare parte asemănător cu cazul spinilor electronici grupați doi oște doi.



## 10.7. SUSCEPTIBILITATEA MAGNETICĂ

Am văzut că atât substanțele diamagnetice cât și substanțele paramagnetice dezvoltă un moment magnetic proporțional cu câmpul aplicat. Cel puțin, aceasta este adevărat în cele mai multe situații. La temperaturi foarte joase, în câmpuri deosebit de puternice, momentul paramagnetic indus se apropie de o valoare limită când intensitatea câmpului este crescută. Lăsând la o parte acest efect de „saturare” relația dintre moment și câmpul aplicat este lineară, astfel încât putem caracteriza proprietățile magnetice ale unei substanțe prin raportul momentului indus la câmpul aplicat. Raportul este numit susceptibilitate magnetică. Depinzând de faptul că alegem momentul unei unități de masă, volum, sau a 1 mol de material, definim susceptibilitatea *specifică*, susceptibilitatea *de volum*, sau susceptibilitatea *molară*. Discuția noastră din § 10.5 sugerează că pentru substanțe diamagnetice susceptibilitatea specifică, care se bazează pe momentul indus pe unitatea de masă, ar trebui să fie aproape același de la o substanță la alta. Totuși, susceptibilitatea de volum, care se bazează pe momentul magnetic indus per centimetru cub, este mai relevant pentru preocupările noastre de acum.

Momentul magnetic pe unitate de volum îl vom numi polarizarea magnetică, sau *magnetizarea*, folosind pentru ea simbolul  $M$ . Dacă definim acum susceptibilitatea magnetică de volum, notată  $\chi_m$ , prin relația

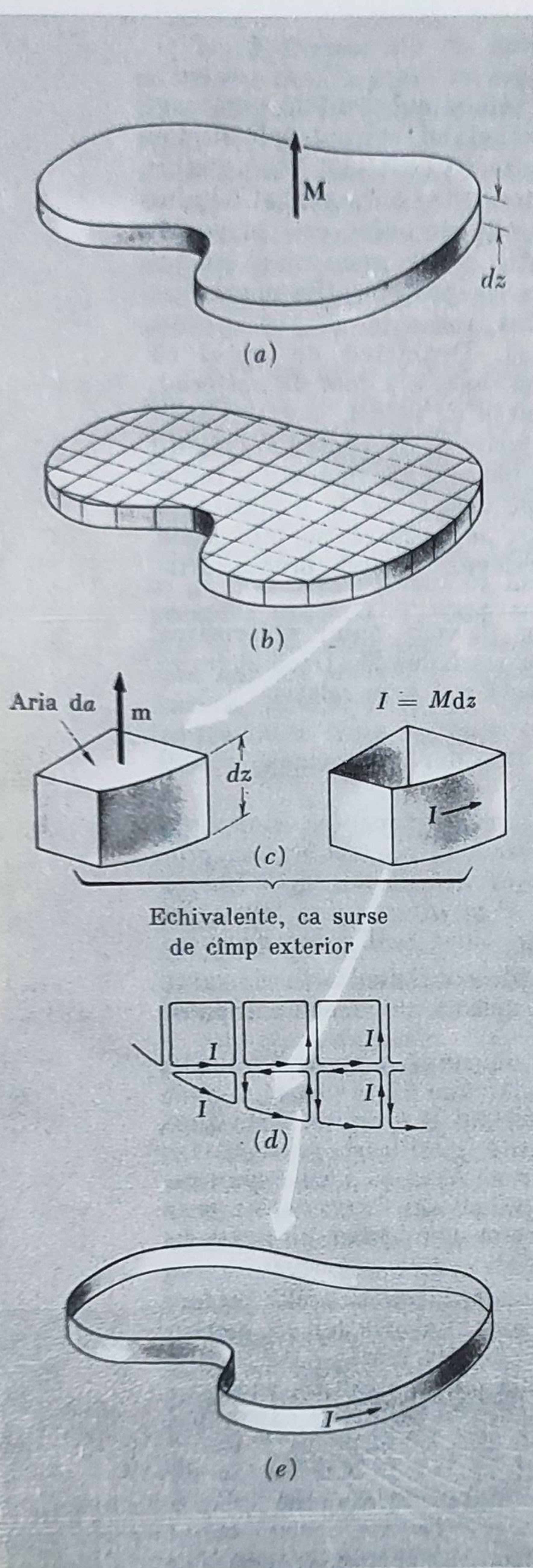
$$M = \epsilon_0 c^2 \chi_m B \quad (\text{vezi observațiile mai departe}) \quad (39)$$

susceptibilitatea va fi un număr adimensional, negativ pentru substanțe diamagnetice, pozitiv pentru paramagnetice. Aceasta este exact analog procedeului, exprimat în ecuația 9.38, prin care am definit susceptibilitatea electrică  $\chi_e$  drept raportul polarizării electrice  $P$  și intensitatea câmpului electric  $E$ . Vom vedea imediat că analogia merge chiar mai adânc deoarece câmpul microscopic  $B$  în interiorul materiei va apărea a fi media celui microscopic  $B$ , întocmai cum câmpul macroscopic  $E$  a apărut a fi media câmpului microscopic  $E$ .

Din nefericire, ecuația 39 *nu* este definiția obișnuită a susceptibilității magnetice de volum. În definiția uzuală un alt câmp  $H$ , pe care îl vom introduce la timpul potrivit, apare în locul lui  $B$  (vezi ec. 55). Deși nelogică, definirea în funcție de  $H$  are o anumită justificare practică, iar tradiția este atât de bine stabilită încât în final vom avea să i ne supunem. Dar în acest capitol vrem să urmăm atât cât putem un drum care merge în mod natural și consistent paralel cu descrierea câmpurilor electrice în materie.

Diferența de definiție nu are nici o consecință practică cîtă vreme  $\chi_m$  este un număr foarte mic în comparație cu unu. Valorile lui  $\chi_m$  pentru substanțe pur diamagnetice, solide sau lichide, se află între  $-0,6 \times 10^{-5}$  și  $-1,2 \times 10^{-5}$ . Chiar pentru oxigen în condițiile date în tabelă, susceptibilitatea paramagnetică este mai mică de  $10^{-3}$ . Aceasta înseamnă că câmpul magnetic produs de momentele dipolare din substanțe, cel puțin ca o medie de scară largă, este mult mai slab decât câmpul aplicat  $B$ . Aceasta ne dă o oarecare încredere că în astfel de sisteme putem presupune câmpul care acționează asupra dipolilor atomici pentru a-i orienta același ca și câmpul care ar exista acolo în lipsa probei. Totuși, vom fi interesați în alte





Echivalente, ca surse  
de câmp exterior

sisteme în care câmpul momentelor magnetice *nu* este mic. De aceea trebuie să studiem, exact cum am făcut în cazul polarizării electrice, câmpurile magnetice pe care materia magnetizată le produce, atât în interiorul cât și în exteriorul materialului.

### 10.8. CÂMPUL MAGNETIC PRODUS DE MATERIA MAGNETIZATĂ

O bucată de material care conține, distribuite în mod uniform în volumul său, un mare număr de dipoli magnetici atomici orientați toți în aceeași direcție, este numită *uniform magnetizată*. Vectorul de magnetizare  $M$  este simplu produsul numărului de dipoli orientați per unitate de volum și a momentului magnetic  $m$  al fiecărui dipol. Nu ne preocupăm cum este menținută alinierea acestor dipoli. Poate că printr-un câmp oarecare aplicat de la o altă sursă, dar nu sintem interesați în aceasta. Vrem să studiem doar câmpul produs de dipolii înșiși.

Să considerăm mai întâi o placă de material de grosime  $dz$ , tăiată perpendicular pe direcția magnetizării, cum se arată în figura 10.16, *a*. Placa poate fi împărțită în mici cărămizi. O astfel de cărămidă, care are o suprafață de arie  $da$ , conține un moment dipolar total care este  $Mdadz$ , deoarece  $M$  este momentul dipolar per unitate de volum (fig. 10.16, *b*). Câmpul magnetic pe care îl produce această cărămidă în toate punctele *îndepărtate* — depărtate în comparație cu mărimea cărămidii — este acela al oricărui dipol cu același moment magnetic. Am putea construi un dipol de acea intensitate prin aplicarea unei panglici conductoare de lățime  $dz$  pe forma cărămidii, și trimițând în jurul acestei bucle un curent  $I = Mdz$  (fig. 10.16, *c*). Aceasta va da buclei un moment dipolar:

$$m = I \cdot \text{aria} = Mdzda \quad (40)$$

care este identic cu acela al cărămidii.

Fig. 10.16. Placa subțire, magnetizată perpendicular pe suprafața sa largă, este echivalentă unei panglici de curent câtă vreme se consideră câmpul exterior.



Să substituim o astfel de buclă de curent pentru fiecare cărămidă din placă, cum se indică în figura 10.16, *d*. Curentul este același în toate și în consecință, la fiecare frontieră interioară găsim curenți egali și opuși, echivalenți cu curent zero. Buclele noastre sînt deci echivalente cu o singură panglică împrejur la exterior, care poartă curentul  $Mdz$  (fig. 10.16, *e*). Acum aceste cărămizi pot fi făcute foarte mici, atît cît să nu ne apropiem de dimensiunile moleculare. Ele trebuie să fie destul de mari încît magnetizarea lor nu variază apreciabil de la o cărămidă la alta. Cu această limitare, putem afirma că cîmpul în orice punct *exterior*, chiar apropiat de placă, este identic cu acela al panglicii de curent.

Rămîne doar să reconstruim un întreg bloc din astfel de plăci, ca în figura 10.17, *a*. Întregul bloc este atunci echivalent cu panglica lată din figura 10.17, *b* în jurul căreia curge un curent  $Mdz$ , în amperi, în fiecare fișie  $dz$ , sau, formulat mai simplu, un curent superficial de densitate  $\mathcal{J}$ , în amperi/metru, dat de

$$\mathcal{J} = M. \quad (41)$$

Cîmpul magnetic  $\mathbf{B}$  în orice punct în afara blocului magnetizat din figura 10.17, *a*, și chiar în vecinătatea blocului presupunînd că nu ne apropiem la distanțe moleculare, este identic cu cîmpul  $\mathbf{B}'$  în punctul corespunzător din vecinătatea panglicii de curent late din figura 10.17, *b*.

Dar care este cîmpul în interiorul blocului magnetizat? Aici avem de-a face cu o întrebare ca aceea pe care am întîlnit-o în capitolul 9. În interiorul materiei cîmpul magnetic nu este de loc uniform dacă îl observăm la scara atomică pe care am numit-o „microscopică”. El variază puternic atît în mărime cît și în direcție între puncte la o depărtare de cîtiva angstromi. Acest cîmp  $\mathbf{B}$  microscopic este simplu un cîmp magnetic în vid, deoarece din punctul de vedere microscopic, după cum am subliniat în capitolul 9, materia este o mulțime de particule și sarcină electrică în spațiul altfel vid. Singurul cîmp de scară largă care poate fi definit în mod unic în interiorul materiei este media spațială a cîmpului microscopic.

Din cauza absenței efectelor care să fie atribuite sarcinii magnetice, credem că cîmpul microscopic însuși satisface  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ . Dacă aceasta este corect, urmează imediat

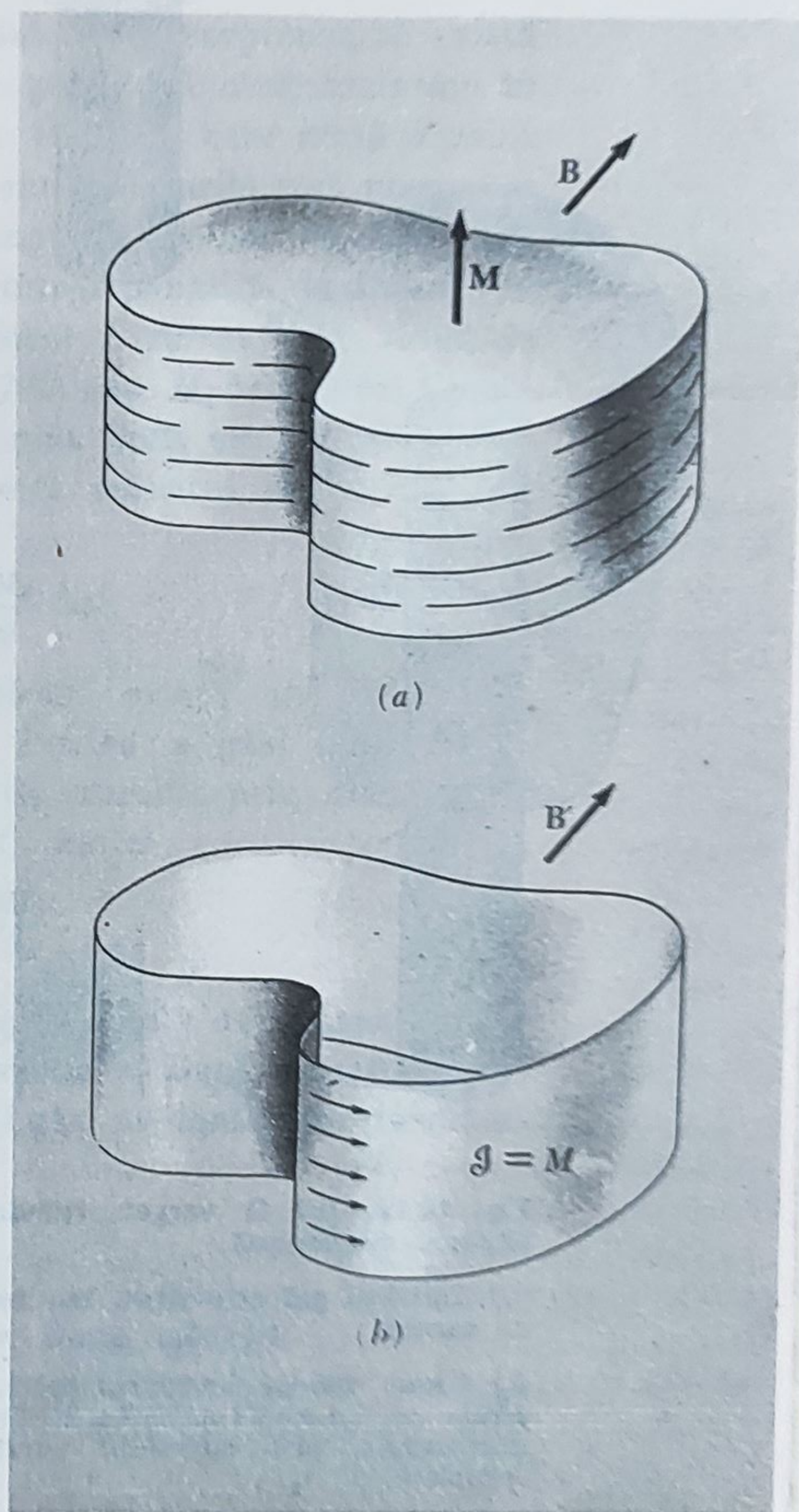


Fig. 10.17. Un bloc magnetizat uniform este echivalent unei benzi de curent superficial.



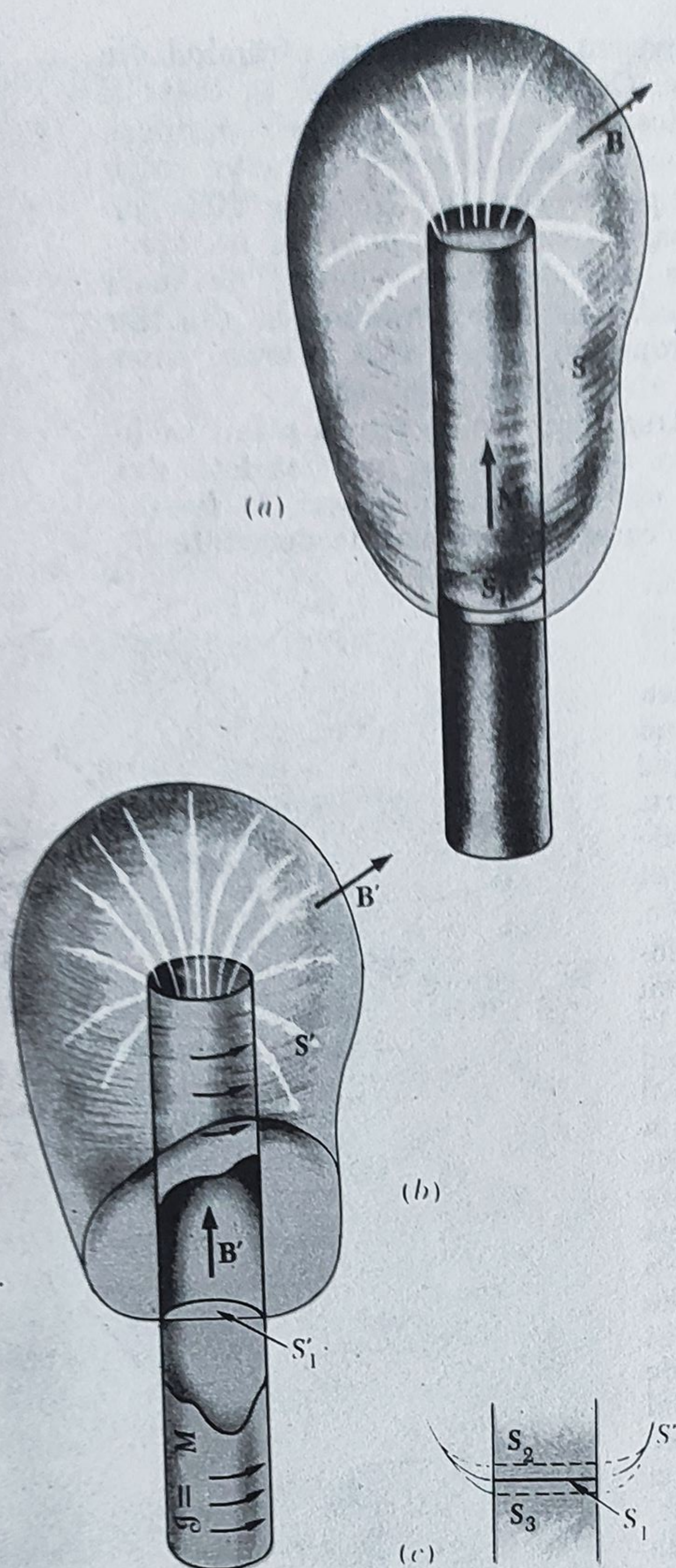


Fig. 10.18. (a) O vergea cilindrică uniform magnetizată.

(b) Cilindrul gol echivalent, sau teacă de curent.

(c) Putem eşalona interiorul barei, și obține astfel o medie spațială a câmpului microscopic, prin suprafețe paralele apropiate,  $S_1, S_2, \dots$

că media spațială a câmpului intern microscopic din blocul nostru este același cu câmpul  $B'$  în interiorul panglicii de curent echivalente.

Pentru a demonstra aceasta, să considerăm bara lungă magnetizată uniform paralel cu lungimea sa, arătată în figura 10.18, *a*. Tocmai am arătat că câmpul extern va fi identic cu acela al unui cilindru lung de curent (practic echivalent cu un solenoid cu un singur strat) arătat în figura 10.18, *b*.  $S$  în figura 10.18, *a* indică o suprafață închisă care include o porțiune  $S_1$  care trece prin interiorul barei. Deoarece  $\text{div } B = 0$  pentru câmpul intern microscopic, ca și pentru câmpul extern,  $\text{div } B$  este zero peste tot volumul închis de  $S$ . Urmează atunci din teorema lui Gauss că integrala de suprafață a lui  $B$  pe  $S$  trebuie să fie zero. Integrala de suprafață a lui  $B'$  pe suprafața închisă  $S'$  este de asemenea zero. Pe porțiunile lui  $S$  și  $S'$  externe cilindrilor,  $B$  și  $B'$  sînt identice. De aceea integrala de suprafață a lui  $B$  pe discul interior  $S_1$  trebuie să fie egală cu integrala de suprafață a lui  $B'$  pe discul interior  $S_1'$ . Aceasta trebuie să aibă loc de asemenea pentru oricare dintre mulțimea de discuri paralele apropiate, ca  $S_2, S_3$  etc., indicate în figura 10.18, *c*, deoarece câmpul în exteriorul cilindrului în această regiune este neglijabil de mic, astfel încît partea din afară nu schimbă nimic. Acum a lua integrala de suprafață pe o serie de plane egal distanțate este un bun mod de a calcula media de volum a câmpului  $B$  din acea regiune, deoarece alegerea elementelor de volum este imparțială. Urmează că media spațială a câmpului microscopic  $B$  în interiorul barei magnetizate este egală cu câmpul  $B'$  în interiorul stratului de curent din figura 10.18, *b*.

Este instructiv să comparăm argumentele pe care tocmai le-am dezvoltat cu analiza noastră a problemelor corespunzătoare în capitolul 9.



Figura 10.19 arată aceste dezvoltări una alături de cealaltă. Veți vedea că ele merg logic paralel, dar că în fiecare stadiu există o diferență care reflectă asimetria esențială rezumată în observația că *sarcinile electrice* sînt sursa *cîmpurilor electrice*, în timp ce *sarcini electrice în mișcare* sînt sursa *cîmpurilor magnetice*. De exemplu, în argumentele despre media cîmpului microscopic, cheia la problemă în cazul electric este presupunerea că  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  pentru cîmpul electric microscopic. În cazul magnetic, cheia este presupunerea că  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  pentru cîmpul magnetic microscopic.

Dacă magnetizarea  $\mathbf{M}$  din volumul unui material nu este uniformă dar variază cu poziția ca  $\mathbf{M}(x, y, z)$ , distribuția echivalentă de curent este dată simplu de

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{M}. \quad (42)$$

Să vedem cum rezultă aceasta într-un caz dat. Să presupunem că există o magnetizare în direcția  $z$ , care devine mai puternică cînd înaintăm în direcția  $y$ . Aceasta este reprezentată în figura 10.20, *a*, care arată o mică regiune din material subîmpărțită în mici blocuri. Blocurile sînt presupuse atît de mici încît putem presupune magnetizarea uniformă în interiorul unui bloc. Apoi putem înlocui fiecare bloc printr-o panglică de curent, cu densitate de curent superficial  $\mathcal{J} = M_z$ . Curentul  $I$  purtat de o astfel de panglică, dacă blocul are înălțimea  $\Delta z$ , este  $\mathcal{J} \Delta z$  sau  $M_z \Delta z$ . Acum fiecare panglică are ceva mai multă densitate de curent decît cea din stînga ei. Curentul în fiecare buclă este mai mare decît curentul din bucla din stînga prin

$$\Delta I = \Delta z \Delta M_z = \Delta z \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta z. \quad (43)$$

La fiecare interfață din această linie de blocuri există un curent net în direcția  $x$  de mărime  $\Delta I$  (fig. 10.20, *c*). Pentru a găsi curentul pe unitatea de arie curgînd în direcția  $x$  avem de înmulțit prin numărul de blocuri pe unitate de arie, care este  $1/(\Delta y \cdot \Delta z)$ . Astfel

$$J_x = \Delta I \left( \frac{1}{\Delta y \Delta z} \right) = \frac{\partial M_z}{\partial y}. \quad (44)$$

Un alt mod de a obține un curent în direcția  $x$  este de a avea o componentă  $y$  a magnetizării care variază în direcția  $z$ . Dacă urmăriți acest caz, folosind o coloană verticală de blocuri, veți găsi că densitatea de curent orientată după axa  $x$  este dată de

$$J_x = -\frac{\partial M_y}{\partial z}. \quad (45)$$

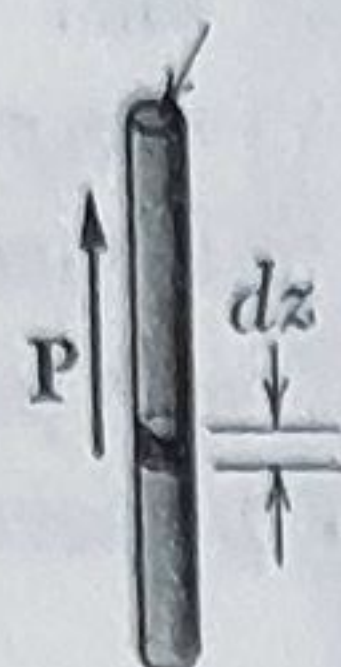
În general atunci, prin superpunerea acestor două situații,

$$J_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = (\text{rot } \mathbf{M})_x \quad (46)$$

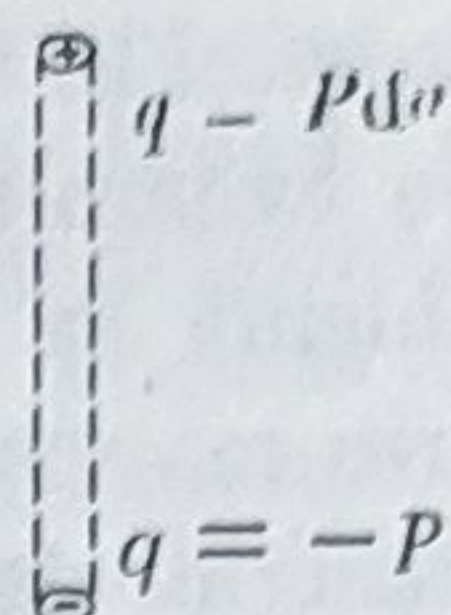
care ajunge pentru a stabili ecuația 42.



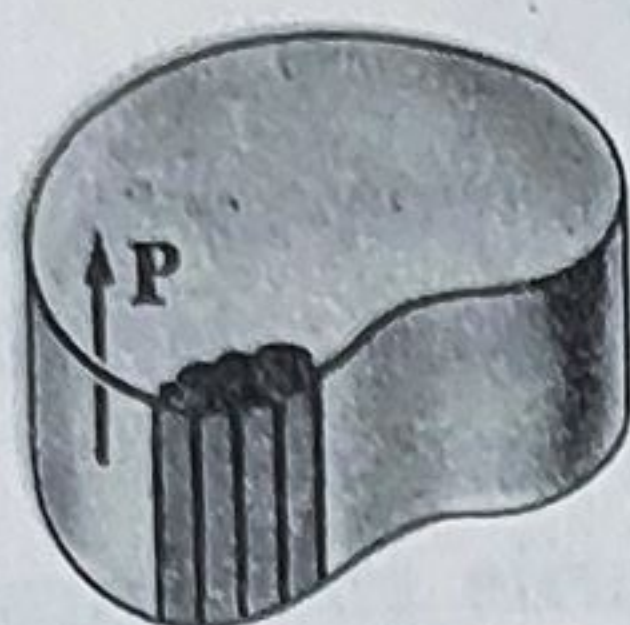
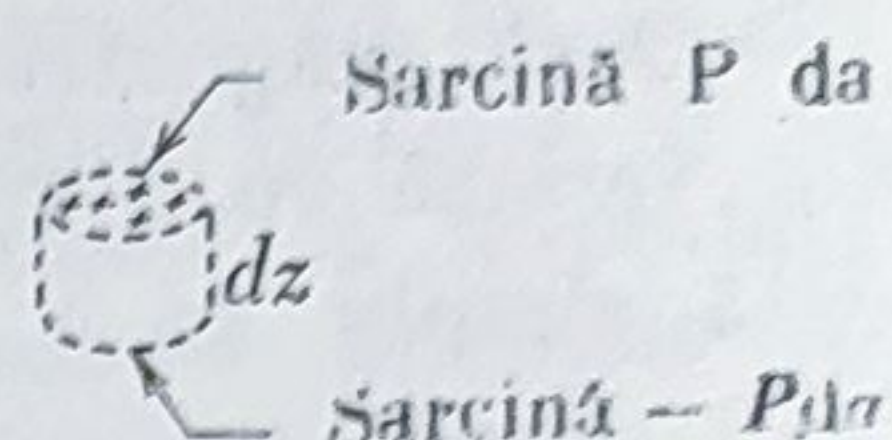
(v) Ca sursă de câmp electric exterior  $E$



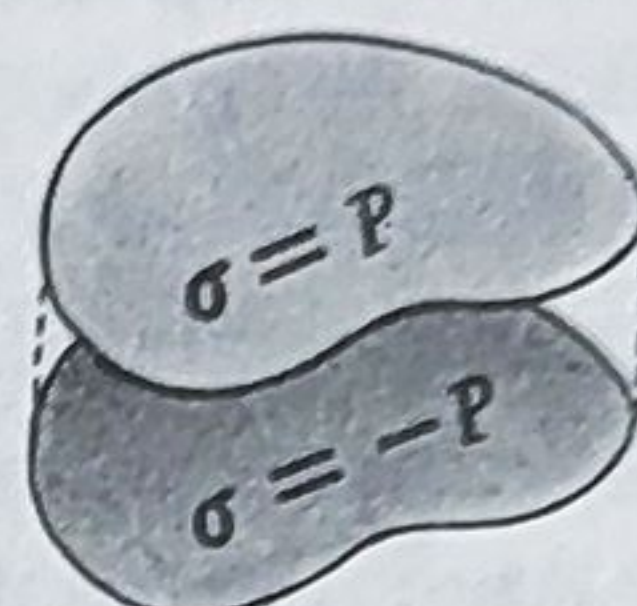
este echivalent cu



pentru că o bucată de substanță polarizată, de volum  $da \, dz$ , are momentul dipolar egal cu acela al:



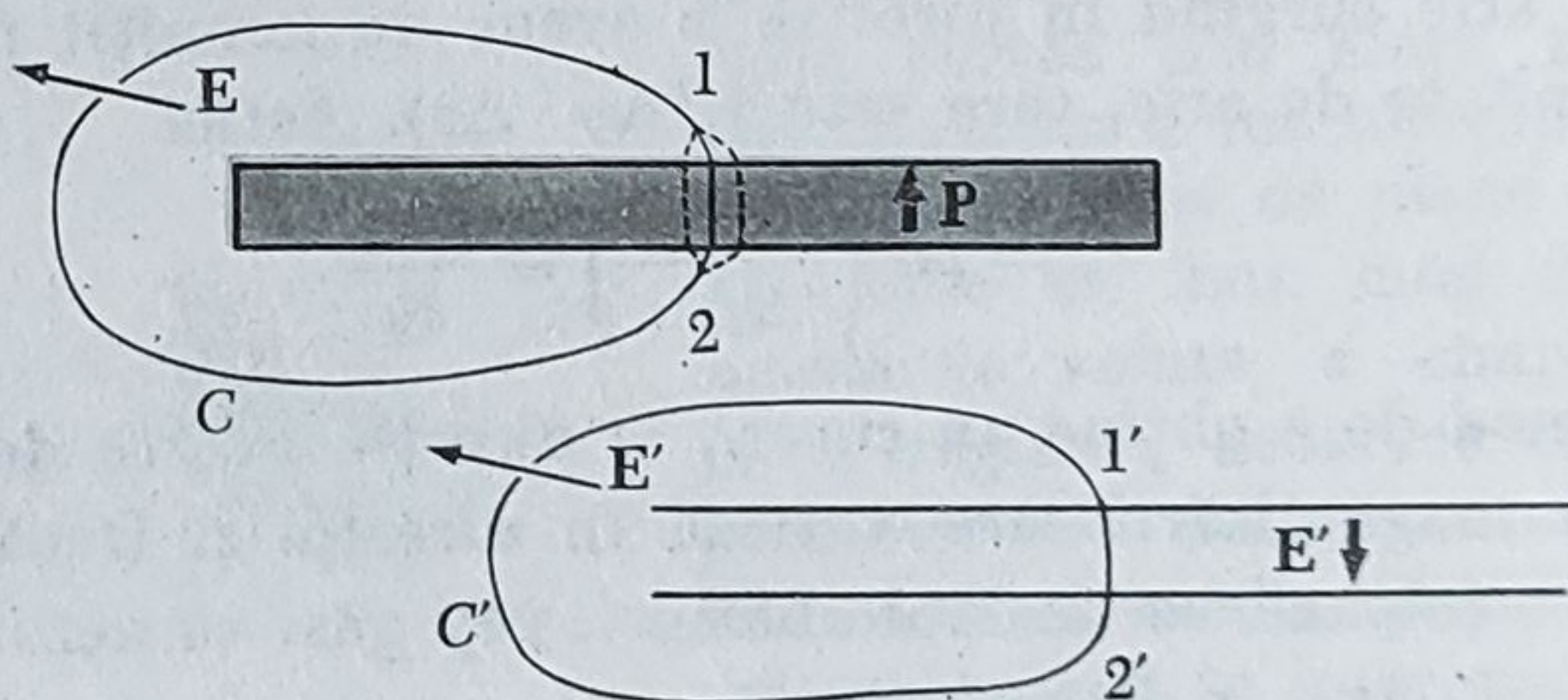
Un bloc polarizat uniform poate fi subîmpărțit în astfel de vergele. Deci blocul are același câmp electric ca două structuri de sarcină superficială cu  $\sigma = P_n$



[Mai general, pentru polarizări neuniforme, materia polarizată este echivalentă unei distribuții de sarcină  $\varphi = -\operatorname{div} P$ .]

#### DEMONSTRAȚIE CĂ ECHIVALENȚA SE EXTINDE LA

Să considerăm o placă subțire, largă, polarizată uniform și straturile echivalente de sarcină superficială. În vecinătatea mijlocului, câmpul exterior este slab și  $E$



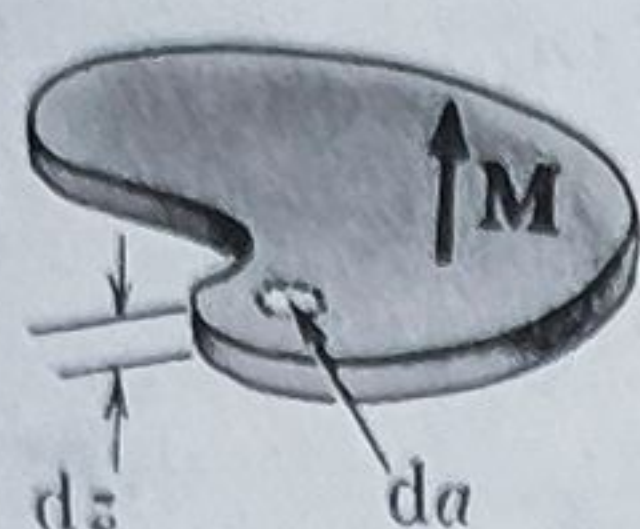
este uniform. Dacă  $\nabla \times E = 0$  pentru câmpul intern, atunci  $\oint_C E \cdot dl = 0$ . Dar  $E = E'$  pe drumul exterior.

De aici  $\int_1^2 E \cdot dl = \int_{1'}^{2'} E' \cdot dl'$  pentru toate drumurile interne.

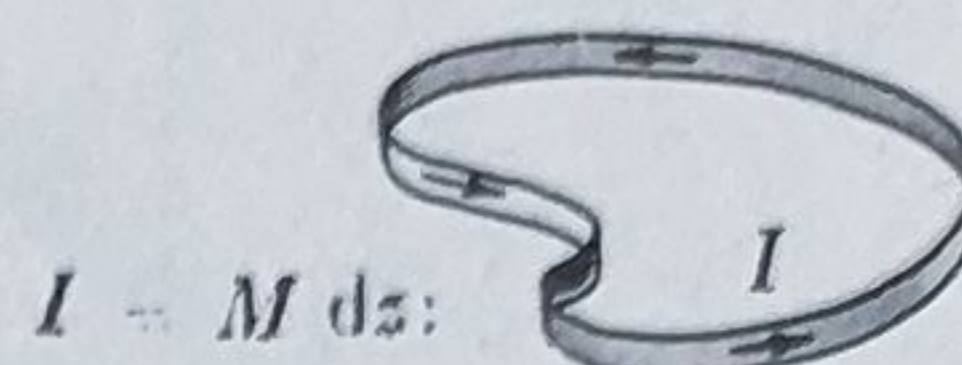
**Concluzie:**  $\langle E \rangle = E'$ ; media spațială a câmpului electric intern este egală cu câmpul  $E'$  care ar fi produs în acel punct în spațiul gol de către distribuția de sarcină echivalentă descrisă mai sus (împreună cu orice surse externe).



(b) Ca sursă de câmp magnetic exterior  $B$

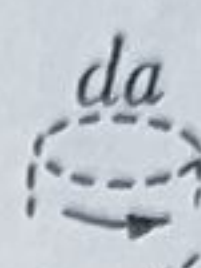


este echivalent cu

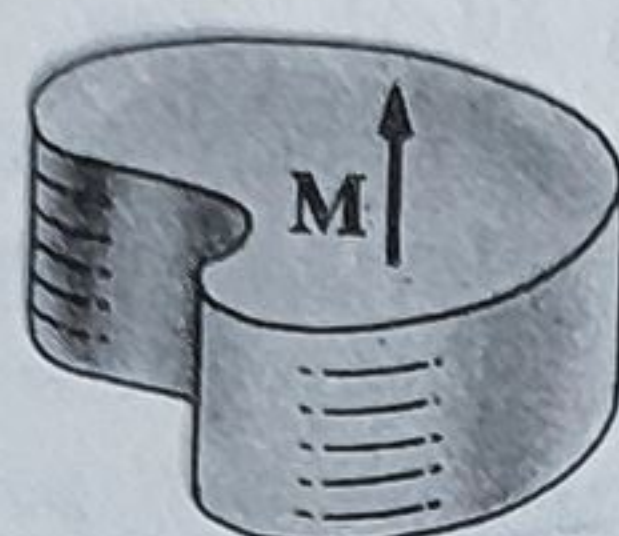


deoarece o bucată de substanță magnetizată,

de volum  $da \, dz$ , are momentul dipolar egal cu acela al:

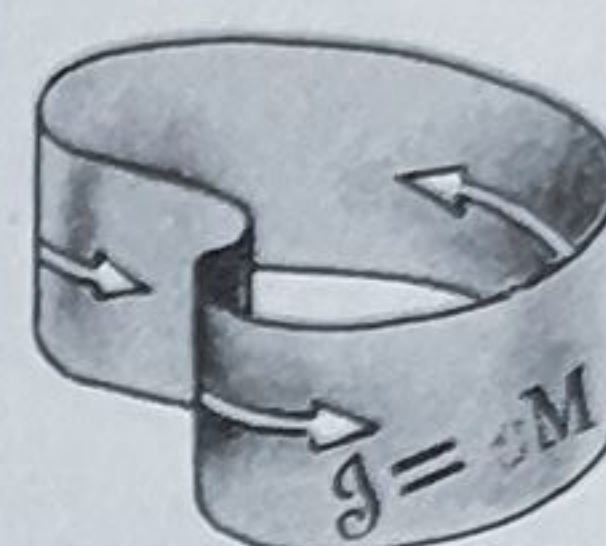


Curent  $M \, dz$ :



Un bloc magnetizat uniform poate fi împărțit în astfel de straturi. Deci blocul are același câmp exterior ca panglica lată de curent superficial cu  $J = M$ .

Mai general, pentru magnetizare neuniformă, materia magnetizată este echivalentă unei distribuții de curent  $J = \text{rot } M$ .



INDE LA

## MEDIA SPAȚIALĂ A CÂMPURILOR INTERNE

Să considerăm o coloană lungă uniform magnetizată și cilindrul echivalent de curent superficial. În vecinătatea mijlocului câmpul exterior este slab și  $B'$  este uniform. Dacă  $\nabla \cdot B = 0$  pentru câmpul interior, atunci  $\int B \cdot da = 0$ .

Dar  $B = B'$  pe suprafața exterioară coloanei. De aici  $\int_{S_1} B \cdot da = \int_{S'_1} B' \cdot da'$  pe orice porțiune interioară de suprafață ca  $S_1, S_2$  etc.

**Concluzie:**  $\langle B \rangle = B'$ ; media spațială a câmpului magnetic interior este egală câmpului  $B'$  care ar fi produs în acel punct în spațiul vid de către distribuția de curent echivalentă descrisă mai sus (împreună cu orice surse externe).

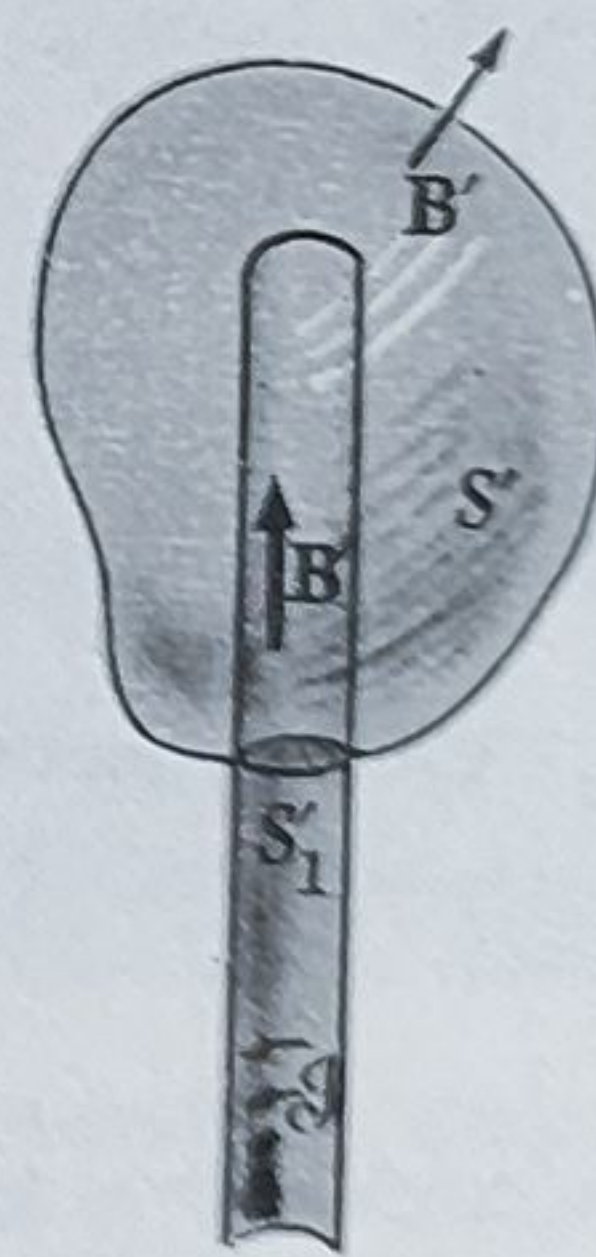
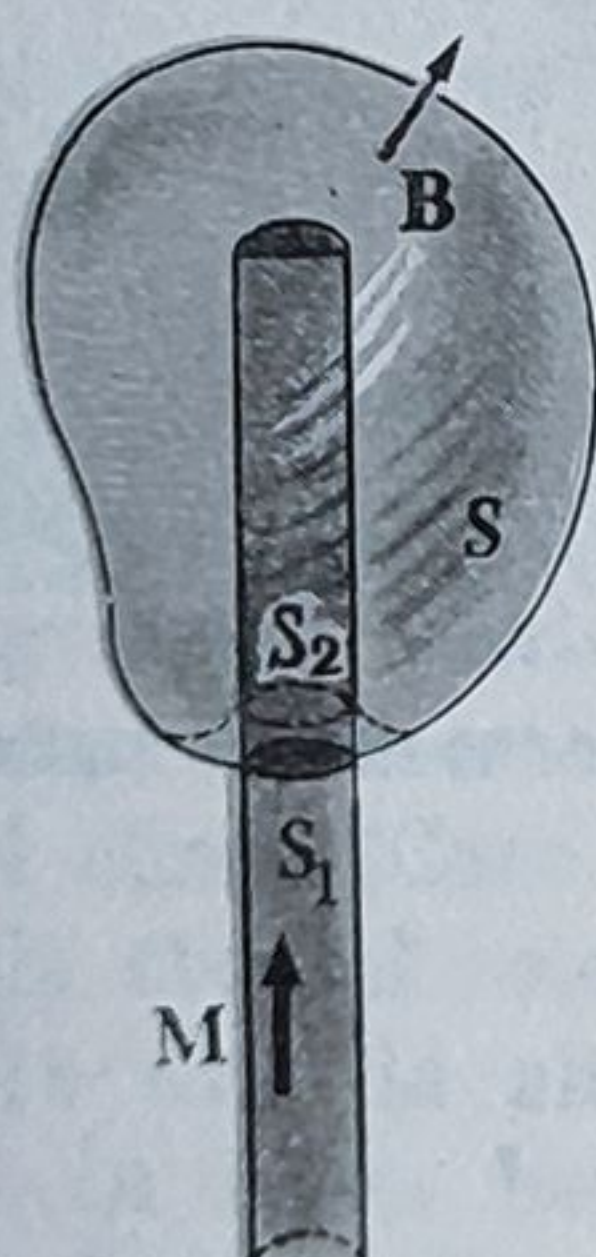


Fig. 10.19. Cazurile electric (a) și magnetic (b) comparate.



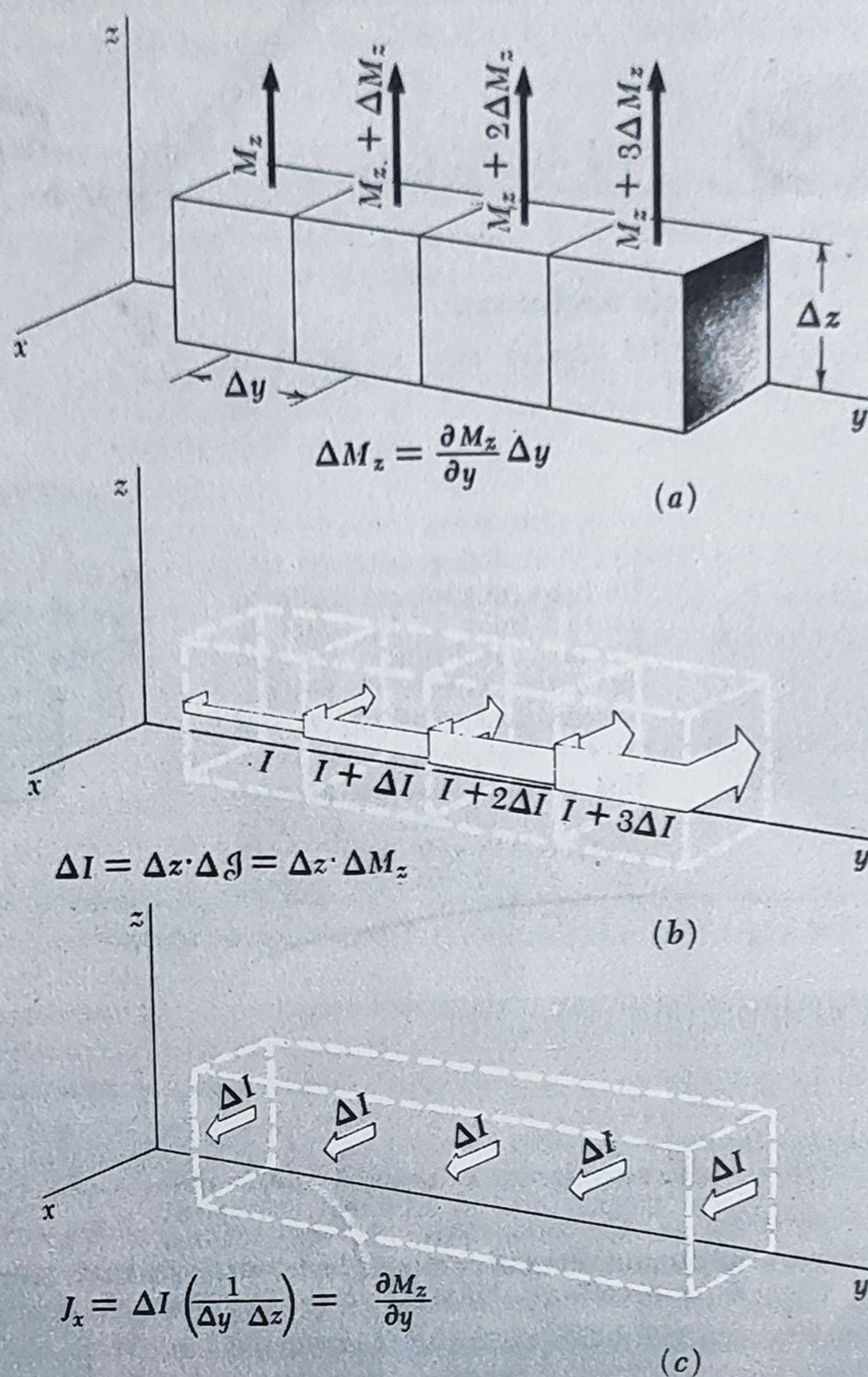


Fig. 10.20. Magnetizarea neuniformă este echivalentă unei densități de curent de volum.

### 10.9. CÎMPUL UNUI MAGNET PERMANENT

Sferele și barele uniform polarizate despre care am vorbit în capitolul 9 sînt rareori văzute, chiar în laborator. O polarizare electrică intrinsecă poate apare în unele substanțe, deși ea este uzual mascată prin acumulare de



sarcină liberă. Pentru a face figura 10.3, *a*, care arată cum *ar* arăta câmpul unei bare polarizate, a fost necesar să folosim două discuri încărcate. De altă parte, materiale cu polarizare magnetică permanentă, adică, *magnetizare* permanentă, sînt familiare și folositoare. Magneți permanenți pot fi făcuți din multe aliaje și compuși ai substanțelor feromagnetice. Ce face ca aceasta să fie posibil este o întrebare pe care o vom lăsa pentru § 10.11, unde intrăm pe scurt în fizica feromagnetismului. În această secțiune, luînd existența magneților permanenți ca atare, vrem să studiem câmpul magnetic  $B$  al unei bare cilindrice uniform magnetizate, și să îl comparăm atent cu câmpul electric  $E$  al unei bare polarizate uniforme de aceeași formă.

Figura 10.21 arată fiecare dintre acești cilindri plini în secțiune. Polarizarea, în fiecare caz, este paralelă cu axa, și este uniformă, adică, polarizarea  $P$  și magnetizarea  $M$  au aceeași mărime și direcție peste tot în interiorul cilindrilor respectivi. În cazul magnetic aceasta implică faptul că fiecare milimetru cub al magnetului permanent are același număr de spini electronici aliniați, orientați în aceeași direcție. (O foarte bună aproximație la aceasta se poate realiza cu materialele permanent magnetice moderne.)

Prin câmpul în interiorul cilindrului înțelegem, desigur, câmpul macroscopic definit drept media spațială a câmpului microscopic. În acest înțeles, arătăm în figura 10.21 liniile de câmp atât în interior cât și în exteriorul barelor. În trecut, aceste bare nu sînt presupuse apropiate; alăturăm diagramele pentru conveniența comparării. Fiecare bară este izolată într-un spațiu altfel fără câmp. (Care credeți că ar perturba mai mult câmpul celeilalte, dacă ar fi fost apropiate una de alta?)

În afara barelor câmpurile  $E$  și  $B$  arată asemănător. De fapt liniile de câmp urmează exact același curs. Aceasta nu trebuie să vă surprindă dacă vă reamintiți că dipolii electrici și dipolii magnetici au câmpuri „la depărtare” asemănătoare. Fiecare

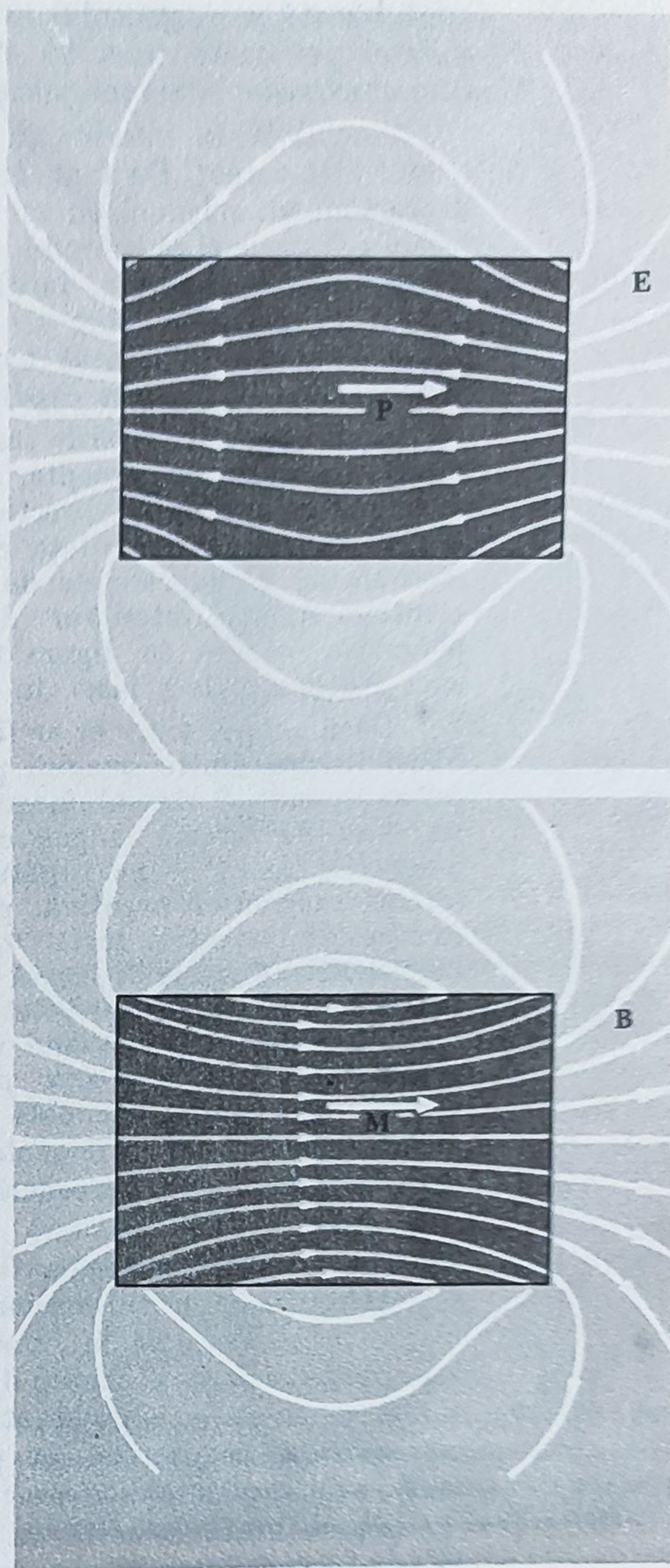


Fig. 10.21. (a) Intensitatea câmpului electric  $E$  în afară și înăuntrul unui cilindru uniform polarizat. (b) Inducția magnetică  $B$  în afară și înăuntrul unui cilindru uniform magnetizat. În fiecare caz, câmpul interior arătat este câmpul macroscopic, adică, media locală a câmpului microscopic sau atomic.



mică bucată a magnetului este un dipol magnetic, și fiecare mică bucată a barei polarizate (numită câteodată „electret”) este un dipol electric, iar câmpul exterior este superpoziția tuturor câmpurilor la depărtare.

Câmpul  $\mathbf{B}$ , în interior și exterior, este identic cu acela al unui strat cilindric de curent. De fapt dacă am înfășura foarte uniform, pe un cilindru de carton, un solenoid cu un singur strat din sîrmă subțire, am putea să-i legăm o baterie și să reproducem câmpul exterior și interior  $\mathbf{B}$  al magnetului permanent. (Bobina s-ar încălzi iar bateria s-ar consuma; spinii electronici furnizează curentul liber și fără frecare!) Câmpul electric  $\mathbf{E}$ , atît în interiorul cît și în exteriorul barei polarizate, este acela a două discuri de sarcină, unul la fiecare capăt al cilindrului.

Observați că câmpurile *interioare*  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  sînt esențial diferite în formă:  $\mathbf{B}$  este orientat spre dreapta, este continuu la capetele cilindrului, și suferă o schimbare bruscă de direcție la suprafața cilindrului.  $\mathbf{E}$  este orientat spre stînga, trece prin suprafața cilindrului ca și cînd nu ar fi acolo, dar este discontinuu la suprafețele de capăt. Aceste diferențe provin din diferența esențială dintre „interiorul” dipolului electric fizic, și „interiorul” dipolului magnetic, văzute în figura 10.8. Prin *fizice*, înțelegem acele deosebiri pe care Natura ni le-a lăsat în realitate.

Dacă câmpul exterior ar fi fost singura noastră preocupare, am fi putut folosi fiecare dintre imagini pentru a descrie câmpul unui magnet. Am fi putut spune că câmpul magnetic al magnetului permanent provine de la un strat de sarcină magnetică pozitivă — o densitate superficială de poli magnetici „nord” — pe capătul de dreapta al magnetului, și un strat de sarcină magnetică negativă, poli „sud” pe celălalt capăt. Am putea lua o funcție de potențial scalar  $\varphi_{mag}$ , astfel încît  $\mathbf{B} = -\text{grad } \varphi_{mag}$ . Funcția de potențial  $\varphi_{mag}$  ar fi legată de densitatea de poli fictivi cum este legat potențialul electric de densitatea de sarcină. Simplitatea potențialului scalar în comparație cu potențialul vector este destul de atrăgătoare. Mai mult, potențialul scalar magnetic poate fi legat într-un mod foarte simplu de curenții care sînt sursa reală a lui  $\mathbf{B}$ , și astfel se poate folosi potențialul scalar fără nici o utilizare explicită a polilor fictivi. Poate veți folosi această tehnică dacă veți avea vreodată de proiectat magneți sau de calculat câmpuri magnetice.

Trebuie să abandonăm ficțiunea polilor magnetici, totuși, dacă vrem să înțelegem câmpul în interiorul materialului magnetizat. Faptul că câmpul magnetic macroscopic în interiorul unui magnet permanent este, într-un sens foarte real, ca și câmpul din figura 10.21, *b* și nu ca în figura 10.21, *a* a fost demonstrat experimental prin deflexia particulelor încărcate energetice în fier magnetizat, ca și prin efectele magnetice asupra neutronilor lenți, care trec încă mai ușor prin interiorul materiei.

Figura 10.22, *a* arată un magnet permanent în forma unui mic disc, în care magnetizarea este paralelă cu axa de simetrie. Dumneavoastră sînteți probabil mai familiarizați cu magneți permanenți în formă de bare lungi. Totuși, magneți în formă de disc de intensitate considerabilă pot fi făcuți cu anumite materiale noi. Dimensiunile în acest exemplu au fost alese aceleași ca și dimensiunile discului polarizat electric din figura 9.21. Magnetizarea  $M$  este dată ca  $1,5 \cdot 10^5$  în unități SI. Momentul magnetic al electronului este  $0,93 \cdot 10^{-23}$  joule/tesla, astfel încît această valoare a lui  $M$  corespunde la  $1,6 \cdot 10^{22}$  spini electroni aliniați, pe centimetru cub.



Discul este echivalent cu o bandă de curent în jurul său, de densitate superficială  $\mathcal{J} = M$ . Grosimea discului fiind 0,3 cm, curentul  $I$  se ridică la

$$3 \cdot 10^{-3} M = (3 \cdot 10^{-3}) (1,5 \cdot 10^5)$$

sau 450 amperi — chiar mai mult curent decât ați obține prin scurtcircuitarea unei baterii de automobil! Câmpul  $B$  în orice punct din spațiu, incluzând punctele din interiorul discului, este simplu câmpul acestei bande de curent. De exemplu, în vecinătatea centrului discului,  $B$  este aproximativ:

$$\begin{aligned} B &= \frac{I}{2\epsilon_0 c^2 r} = \frac{3 \cdot 10^{-3} M}{2\epsilon_0 c^2 r} = \\ &= \frac{2\pi(10^{-7}) (3 \cdot 10^{-3}) (1,5 \cdot 10^5)}{10^{-2}} = \\ &= 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ tesla.} \end{aligned} \quad (47)$$

Această aproximație constă în a trata banda de curent de lărgime 0,3 cm ca și când ar fi fost concentrată într-un simplu inel. (În aproximație corespunzătoare pentru exemplul electric am tratat straturile de sarcină echivalente drept mari în comparație cu separarea dintre ele.) Cât privește câmpul într-un punct depărtat, ar fi ușor să-l calculăm pentru inelul de curent, dar am putea proceda de asemenea, într-un calcul aproximativ, cum am făcut în exemplul electric. Adică am putea găsi momentul magnetic total al obiectului, și găsi câmpul la depărtare al unui dipol individual de aceea intensitate.

#### 10.10. CURENȚII LIBERI ȘI CÂMPUL H

Este adesea folositor să distingem între curenții *legați* și curenții *liberi*. Curenții *legați* sînt curenții asociați cu momentele magnetice atomice sau moleculare, incluzînd momentul magnetic intrinsec al particulelor cu spin. Acestea sînt buclele de curent molecular întrevăzute de Ampère, sursa

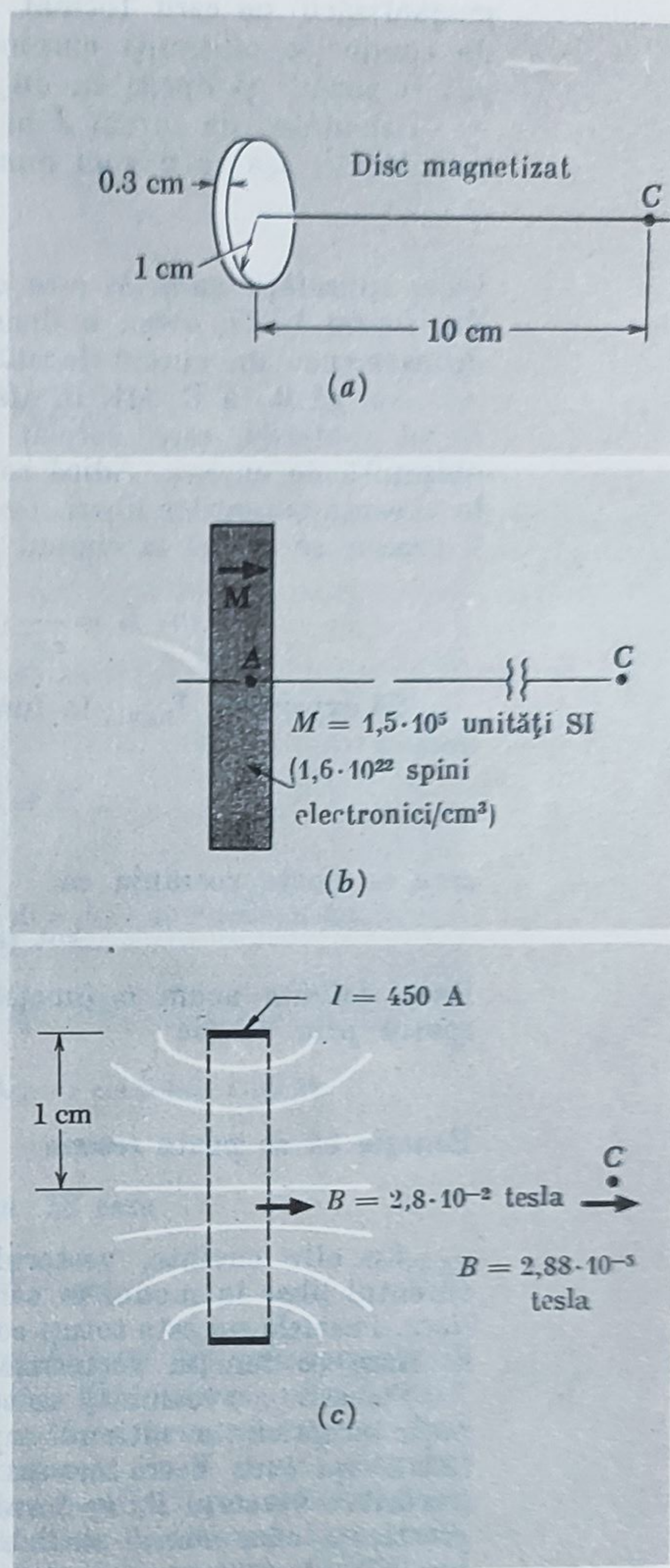


Fig. 10.22. (a) Un disc magnetizat uniform paralel cu axa sa. (b) Vedere în secțiune a discului. (c) Curentul echivalent este o bandă de curent de 450 amperi, în jurul marginii discului. Inducția magnetică  $B$  este aceeași cu câmpul magnetic al unui solenoid foarte scurt, sau aproximativ acela al unui inel de curent de rază 1 cm.



magnetizării pe care tocmai am considerat-o. Curenții *liberi* sînt curenți de conducție obișnuiți curgînd pe traiectorii macroscopice — curenți care pot fi porniți și opriți cu un comutator și măsurați cu un ampermetru.

Densitatea de curent  $\mathbf{J}$  în ecuația 42 este media macroscopică a curenților legați, așa că o vom numi de aici înainte  $\mathbf{J}_{\text{legat}}$ :

$$\mathbf{J}_{\text{legat}} = \text{rot } \mathbf{M} \quad (48)$$

La o suprafață unde  $\mathbf{M}$  este discontinuu, ca marginea blocului magnetizat din figura 10.17, avem o densitate de curent superficial  $\mathcal{J}$  care reprezintă de asemenea un curent legat.

Am găsit că  $\mathbf{B}$ , atât în afara materiei cît și, ca medie spațială, în interiorul materiei, este corelat cu  $\mathbf{J}_{\text{legat}}$  întocmai ca și cu orice densitate obișnuită de curent. Adică  $\text{rot } \mathbf{B} = (1/\epsilon_0 c^2) \mathbf{J}_{\text{legat}}$ . Dar aceasta se petrece în absența curenților liberi. Dacă îi considerăm și pe aceștia, cîmpul pe care îl produc se adună la cîmpul produs de către materia magnetizată și avem

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} (\mathbf{J}_{\text{legat}} + \mathbf{J}_{\text{liber}}) = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{J}_{\text{total}}. \quad (49)$$

Să exprimăm  $\mathbf{J}_{\text{legat}}$ , în funcție de  $\mathbf{M}$ , prin ecuația 48. Atunci ecuația 49 devine

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \text{rot } \mathbf{M} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{J}_{\text{liber}}, \quad (50)$$

care se poate rearanja ca

$$\text{rot } (\epsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M}) = \mathbf{J}_{\text{liber}}. \quad (51)$$

Dacă *definim* acum o funcție vectorială  $\mathbf{H}(x, y, z)$  în fiecare punct din spațiu prin relația

$$\mathbf{H} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (52)$$

Ecuația 51 se poate rescrie

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{liber}}. \quad (53)$$

Cu alte cuvinte, vectorul  $\mathbf{H}$ , definit prin ecuația 52, este corelat cu curentul liber în modul în care  $\mathbf{B}$  este corelat cu curentul total, *legat* plus *liber*. Paralela nu este totuși completă, deoarece avem totdeauna  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , în timp ce funcția vectorială  $\mathbf{H}$  nu are în mod necesar divergența zero.

Aceasta v-a reamintit cu siguranță de vectorul  $\mathbf{D}$  pe care l-am introdus, puțin sceptici, în ultimul capitol.  $\mathbf{D}$ , vă amintiți, era corelat cu sarcina liberă așa cum  $\mathbf{E}$  era corelat cu sarcina totală. Deși noi am discreditat întrucîtva vectorul  $\mathbf{D}$ , vectorul  $\mathbf{H}$  este în realitate folositor, dintr-un motiv practic pe care merită să îl înțelegem. În sisteme electrice, ceea ce putem controla și măsura ușor sînt diferențele de potențial ale corpurilor, și nu cantitățile de sarcină liberă de pe ele. Astfel controlăm cîmpul  $\mathbf{E}$  în mod direct.  $\mathbf{D}$  este în afara controlului nostru direct, și deoarece nu este o cantitate fundamentală în nici într-un sens, ceea ce se întîmplă cu el nu este de mare interes. În sisteme magnetice, totuși, sînt tocmai curenții liberi pe care îi putem controla cel mai ușor. Îi conducem prin fire, îi măsurăm cu ampermetre, îi dirijăm pe căi bine definite prin izolare, și așa mai departe. Avem mult mai puțin control direct, de regulă, asupra magnetizării, și deci asupra lui  $\mathbf{B}$ . Astfel că vectorul auxiliar  $\mathbf{H}$  este folositor, chiar dacă  $\mathbf{D}$  nu este.



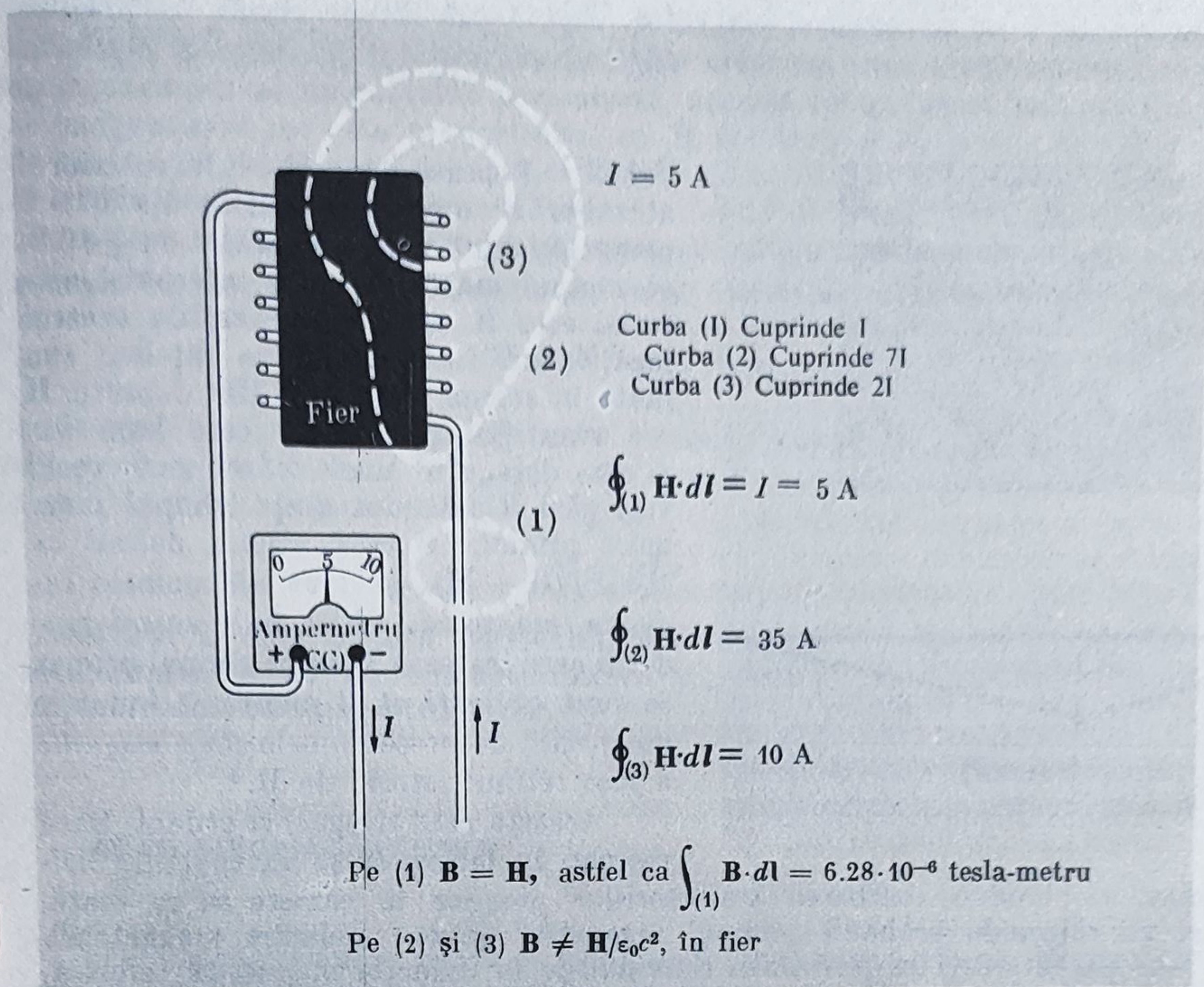


Fig. 10.23. Ilustrarea relației între curentul liber și integrala curbilinie a lui  $\mathbf{H}$ .

Relația integrală echivalentă cu ecuația 53 este

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_{\text{liber}} \cdot d\mathbf{a} = I_{\text{liber}} \quad (54)$$

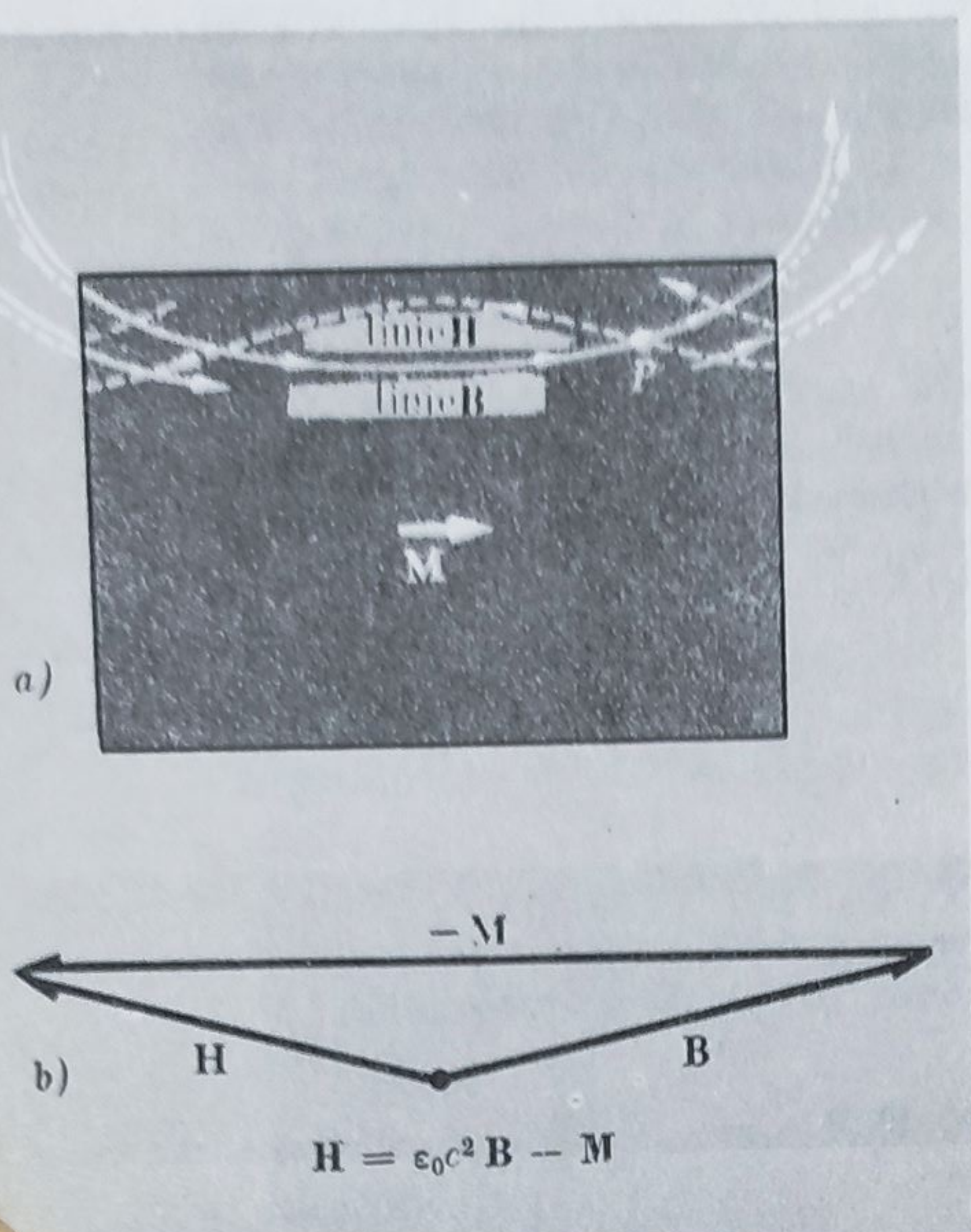
unde  $I_{\text{liber}}$  este curentul total cuprins de curba  $C$ . Să presupunem că înfășurăm o bobină în jurul unei bucăți de fier și trimitem prin această bobină un anumit curent  $I$  pe care îl putem măsura prin conectarea unui ampermetru în serie cu bobina. Acesta este curentul liber, și este singurul curent liber în sistem. De aceea un lucru pe care îl știm sigur este integrala curbilinie a lui  $\mathbf{H}$  în jurul oricărei curbe închise, indiferent dacă curba trece prin fire sau nu. Integrala depinde doar de numărul de spire al bobinei noastre care sînt cuprinse de curbă, și nu de magnetizarea în fier. Determinarea lui  $\mathbf{M}$  și  $\mathbf{B}$  în acest sistem poate fi destul de complicată. Este de ajutor de a fi identificat o cantitate pe care o putem determina cu totul direct.

Figura 10.23 ilustrează această proprietate a lui  $\mathbf{H}$  printr-un exemplu, și ne reamintește unitățile pe care le folosim într-un caz practic.  $H$  are dimensiunea amper/metru, iar unitatea de intensitate a cîmpului magnetic  $B$  este numită tesla.

Considerăm  $\mathbf{B}$  drept vectorul fundamental de cîmp magnetic deoarece absența sarcinii magnetice, pe care am discutat-o în § 10.2, implică



Fig. 10.24. (a) Relația lui  $B$ ,  $H$  și  $M$  într-un punct în interiorul cilindrului magnetizat din figura 10.21 (b). Relația vectorilor în punctul  $P$ .



$\text{div } B = 0$  peste tot, chiar în interiorul atomilor și moleculelor. Din  $\text{div } B = 0$  urmează, după cum am arătat în § 10.8, că câmpul macroscopic în interiorul materiei este  $B$ , nu  $H$ . Implicațiile acestui fapt nu au fost totdeauna înțelese sau luate în seamă în trecut. Mai departe,  $H$  are avantajul practic pe care l-am explicat deja. În unele cărți mai vechi veți găsi  $H$  introdus drept câmpul magnetic primar.  $B$  este atunci definit ca  $(1/\epsilon_0 c^2)(H + M)$ , și i se dă numele *inducția magnetică*. Chiar unii autori moderni care tratează  $B$  drept câmpul primar se simt obligați să îl numească inducție magnetică deoarece numele *câmp magnetic* a fost reținut istoric de  $H$ .\*

Aceasta pare stângaci și pedant. Dacă mergeți în laborator și întrebați un fizician, ce produce curbarea traiectoriilor pionilor în camera sa cu ceață, el va răspunde probabil „câmpul magnetic” și nu „inducția magnetică”. Veți auzi arareori un geofizician referindu-se la inducția magnetică terestră, ori un astronom vorbind despre inducția magnetică în Galaxie. Noi propunem să continuăm să numim  $B$  câmp magnetic. Cît privește  $H$ , deși au fost inventate alte nume pentru el, noi îl vom numi „câmpul  $H$ ” sau „câmpul magnetic  $H$ ”.

Am nota de asemenea că definiția acceptată a susceptibilității magnetice de volum  $\chi_m$  nu este cea logic preferabilă din ecuația 39, dar

$$M = \chi_m H. \quad (55)$$

Magnetul permanent din figura 10.21,  $b$  este un exemplu instructiv al relației dintre  $H$ ,  $B$  și  $M$ . Pentru a obține  $H$  într-un punct oarecare în interiorul materialului magnetizat, avem de adunat vectorial la câmpul  $\epsilon_0 c^2 B$  din acel punct vectorul  $-M$ . Figura 10.24 reprezintă aceasta pentru un punct particular  $P$ . Apare că liniile lui  $H$  în interiorul magnetului arată întocmai ca liniile lui  $E$  în interiorul cilindrului polarizat din figura 10.21,  $a$ . Aceasta este așa cum trebuie, deoarece dacă polii magnetici ar fi fost în realitate sursa magnetizării, și nu curenții electrici, câmpul magnetic macroscopic în interiorul materialului ar fi  $H$ , și nu  $B$ , și similitudinea polarizării magnetice față de polarizarea electrică ar fi completă.

În magnetul permanent nu există nici un fel de curenți liberi. În consecință, integrala curbilinie a lui  $H$ , după ecuația 54, trebuie să fie zero

\* Acesta este un comentariu referitor la terminologia folosită în literatura științifică americană. În prezenta lucrare s-au folosit denumirile acceptate de staturile românești legale. (N. red.)



pe orice curbă închisă. Puteți vedea ce va fi dacă liniile lui  $\mathbf{H}$  arată în realitate ca liniile lui  $\mathbf{E}$  din figura 10.21, *a*, deoarece știm că integrala curbilinie a acelui câmp electrostatic este zero pe orice curbă închisă. În acest exemplu al magnetului permanent, ecuația 55 nu se aplică. Vectorul de magnetizare nu este proporțional cu  $\mathbf{H}$  dar este determinat, în schimb, de tratamentul anterior al materialului. Cum se poate întâmpla aceasta se va explica în secțiunea următoare.

Pentru orice material în care  $\mathbf{M}$  este proporțional cu  $\mathbf{H}$ , astfel încât ecuația 55 are loc ca și relația de bază, ecuația 52, avem:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = (1 + \chi_m)\mu_0\mathbf{H} \quad (56)$$

unde am notat  $1/\epsilon_0 c^2 = \mu_0$ .  $\mathbf{B}$  este atunci proporțional cu  $\mathbf{H}$ . Factorul de proporționalitate,  $(1 + \chi_m)\mu_0$ , este numit *permeabilitate magnetică*, și notat în mod obișnuit prin  $\mu$ :

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad (57)$$

Constanta  $\mu_0$  este numită permeabilitatea magnetică a spațiului vid. Permeabilitatea  $\mu$ , și nu susceptibilitatea  $\chi_m$ , este folosită în mod obișnuit la descrierea feromagnetismului.

## 10.11. FEROMAGNETISMUL

Feromagnetismul a servit și nedumerit omul multă vreme. Magnetitul era cunoscut în antichitate, iar influența asupra istoriei a fierului în forma acelor de busolă a fost probabil doar în urma fierului în forma de săbii. Pentru aproape un secol tehnologia noastră electrică a depins mult de faptul că un metal abundent se întâmplă să aibă această proprietate particulară. Totuși, doar în anii recenti s-a obținut o înțelegere fundamentală a feromagnetismului.

Am descris deja unele proprietăți ale feromagnetismului. Într-un câmp magnetic foarte puternic forța asupra unei substanțe feromagnetice este într-o astfel de direcție încât să o împingă în câmpul mai puternic, ca pentru substanțele paramagnetice, dar în loc de a fi proporțională cu câmpul  $\mathbf{B}$  și gradientului său, forța este proporțională doar cu gradientul. După cum am remarcat la sfârșitul § 10.4, aceasta sugerează că dacă câmpul este destul de puternic, momentul magnetic primit de magnet atinge o anumită valoare limită. Direcția vectorului moment magnetic trebuie încă să fie controlată de câmp, deoarece altfel forța nu ar acționa totdeauna în direcția intensității de câmp crescătoare.

În magneți „permanenți” observăm un moment magnetic chiar în absența oricărui câmp extern aplicat, care își menține mărimea și direcția chiar când sînt aplicate câmpuri exterioare, dacă acestea nu sînt prea puternice. Câmpul magnetului permanent este desigur totdeauna prezent, și v-ați putea mira dacă nu și-ar putea păstra propriile surse aliniate. Totuși, dacă priviți din nou la figura 10.21, *b* sau figura 10.24, acceptînd asigurarea că acestea reprezintă un magnet real, veți observa că  $\mathbf{M}$  nu este în general paralel nici cu  $\mathbf{B}$  nici cu  $\mathbf{H}$ . Aceasta sugerează că dipolii magnetici trebuie să fie ținuți pe direcție prin altceva decît forțe pur magnetice.



Magnetizarea observată în materiale feromagnetice este mult mai mare decât aceea cu care sîntem obișnuiți în substanțe paramagnetice. Magneți permanenți cu totul obișnuiți au cîmpuri în domeniul miimilor de tesla. O mărime mai caracteristică este valoarea limită a magnetizării, momentul magnetic pe unitate de volum, pe care îl primește materialul într-un cîmp foarte puternic. Aceasta este numită magnetizarea de *saturație*. Putem afla magnetizarea de saturare a fierului din datele din tabelă (§ 10.1). Într-un cîmp cu un gradient de 17 tesla/metru, forța gradient a 1 gram de fier era 4 newton. Din ecuația 18, care leagă forța asupra unui dipol de gradientul de cîmp, găsim

$$m = \frac{F}{(dB/dz)} = \frac{4 \text{ newton}}{17 \text{ tesla/metru}} = 0,235 \text{ joule/tesla} \quad (\text{pentru } 1 \text{ gram}). \quad (58)$$

Pentru a găsi momentul pe centimetru cub înmulțim prin densitatea fierului, 7,8 g/cm<sup>3</sup>. Magnetizarea  $M$  este astfel

$$M = 0,235 \times 7,8 = 1,83 \text{ joule/tesla-cm}^3. \quad (59)$$

Este  $(1/\epsilon_0 c^2)M$ , și nu  $M$ , pe care trebuie să îl comparăm cu intensitatea cîmpului în tesla. De exemplu, dacă aveam o bară foarte lungă de fier care ar fi avut această cantitate de magnetizare ca magnet permanent, cîmpul  $H$  în interior ar fi foarte mic (imaginați-vă situația din figura 10.21,  $b$  întinsă axial) astfel încît cîmpul  $B$  în fier ar fi aproximativ egal cu  $(1/\epsilon_0 c^2)M$ , sau circa 2,3 tesla.

Este mai interesant de văzut la cît de multe momente de spin electronic corespunde această magnetizare. Împărțind  $M$  prin momentul electronului dat în figura 10.14,  $0,93 \cdot 10^{-23}$  joule/tesla, obținem aproximativ  $2 \cdot 10^{23}$  momente de spin pe centimetru cub. Acum 1 cm<sup>3</sup> de fier conține aproximativ  $10^{23}$  atomi. Magnetizarea limită pare să corespundă la aproximativ doi spini alineați per atom. Cum cei mai mulți dintre electronii din atom sînt grupați în perechi și nu au nici un efect magnetic, aceasta indică că avem de-a face cu o aliniere practic totală a acelor cîtorva spini electronici din structura atomului care sînt liberi să se orienteze în aceeași direcție.

Un fapt foarte sugestiv despre feromagneți este acesta: o substanță feromagnetică dată, de exemplu fier pur, pierde proprietățile sale feromagnetice în mod brusc dacă este încălzită la o anumită temperatură. Peste 770°C, fierul pur se comportă ca o substanță paramagnetică. Răcit sub 770°C, el își reia imediat proprietățile sale feromagnetice. Această temperatură de tranziție, numită punct Curie după Pierre Curie care a fost unul dintre primii care a investigat-o, este diferită pentru substanțe diferite. Pentru nichel pur ea este 358°C.

Ce este această „comportare feromagnetică” care distinge atît de net fierul sub 770°C de fierul peste 770°C, și de cupru la orice temperatură? Este alinierea *spontană* într-o direcție a momentelor magnetice atomice, care implică alinierea axelor de spin a anumitor electroni din fiecare atom de fier. Prin *spontană* înțelegem că nici un cîmp magnetic exterior nu este nevoie să fie implicat. Pe o regiune din fier destul de mare încît să conțină milioane de atomi, spinii și momentele magnetice ai aproape tuturor atomilor sînt orientați în aceeași direcție. Sub punctul Curie — la temperatura camerei de exemplu, în cazul fierului — alinierea este aproape perfectă. Dacă ați putea privi în interiorul unui cristal de fier metalic și



vedea momentele magnetice elementare ca vectori cu săgeți pe ele, ați putea vedea ceva ca în figura 10.25.

Nu ne surprinde că o temperatură mai înaltă distruge această aranjare ordonată. Energia termică este inamicul ordinii, ca să spunem așa. Un cristal, un aranjament ordonat de atomi, trece într-un lichid, un aranjament mult mai puțin ordonat, la o temperatură bine definită, punctul de topire. Punctul de topire, ca și punctul Curie, este diferit pentru substanțe diferite. Analogia merge mai adânc, dar implică idei pe care le lăsăm mai bine pentru studiul căldurii și fizicii statistice în ultima parte a cursului. Să ne oprim aici asupra stării ordonate. Două sau trei întrebări sînt evidente.

*Întrebarea I:* Ce face ca spinii să se alinieze și îi ține alineați?

*Întrebarea II:* Cum, dacă nu există nici un câmp exterior, pot alege spinii o direcție și nu alta? De ce nu sînt toate momentele din figura 10.25 orientate în jos, sau spre dreapta, sau spre stînga?

*Întrebarea III:* Dacă momentele atomice sînt *alinate*, de ce nu este fiecare bucată de fier la temperatura camerei un magnet puternic?

Răspunsurile la aceste trei întrebări care ne vor ajuta să înțelegem cel puțin în general, comportarea materialelor feromagnetice cînd se aplică un câmp exterior nici foarte puternic nici foarte slab. Aceasta include o foarte bogată varietate de fenomene pe care încă nici nu le-am descris.

*Răspunsul I:* Dintr-un anumit motiv corelat cu mecanica cuantică a structurii atomului de fier, este energetic favorabil pentru spinii atomilor de fier adiacenți să fie paraleli. Aceasta *nu* se datorează interacției lor magnetice. Este un efect mai puternic decît acesta, și mai mult, favorizează spini paraleli astfel  $\uparrow\uparrow$  sau astfel  $\rightarrow\rightarrow$  (interacțiile de dipol nu se comportă astfel — vezi Prob. 9.26). Acum dacă atomul A (fig. 10.26) vrea să-și aibă spinul în aceeași direcție ca și aceea a vecinilor săi, atomii B, C, D și E, și fiecare dintre *aceia* preferă să-și aibă spinii în aceeași direcție ca și spinii vecinilor *săi*, incluzînd atomul A, vă puteți imediat imagina că dacă se dezvoltă cumva o majoritate locală va exista o

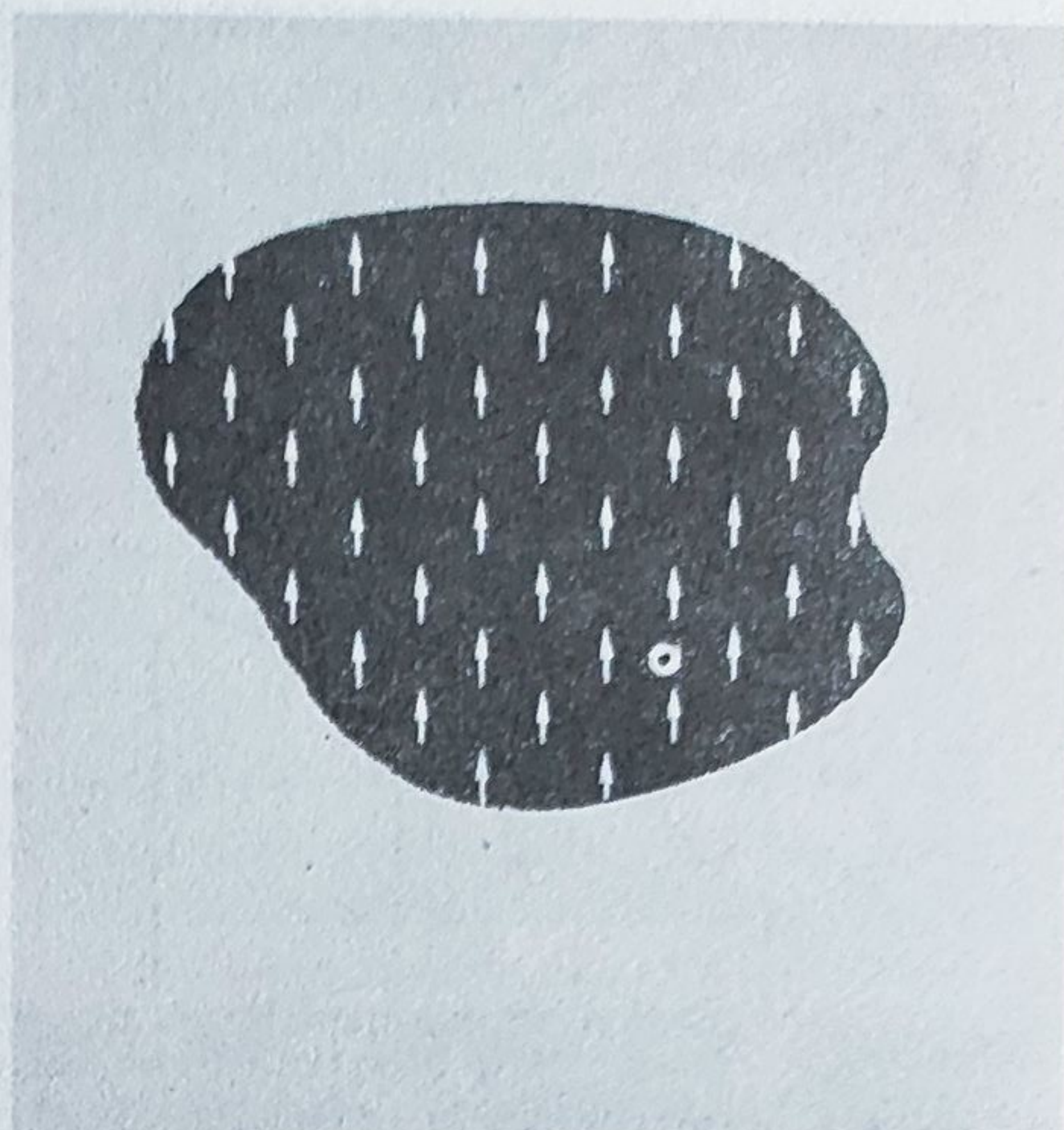


Fig. 10.25. Caracterul ordonat al direcției și sensului spinului într-o mică regiune dintr-un cristal de fier. Fiecare săgeată reprezintă momentul magnetic al unui atom de fier.

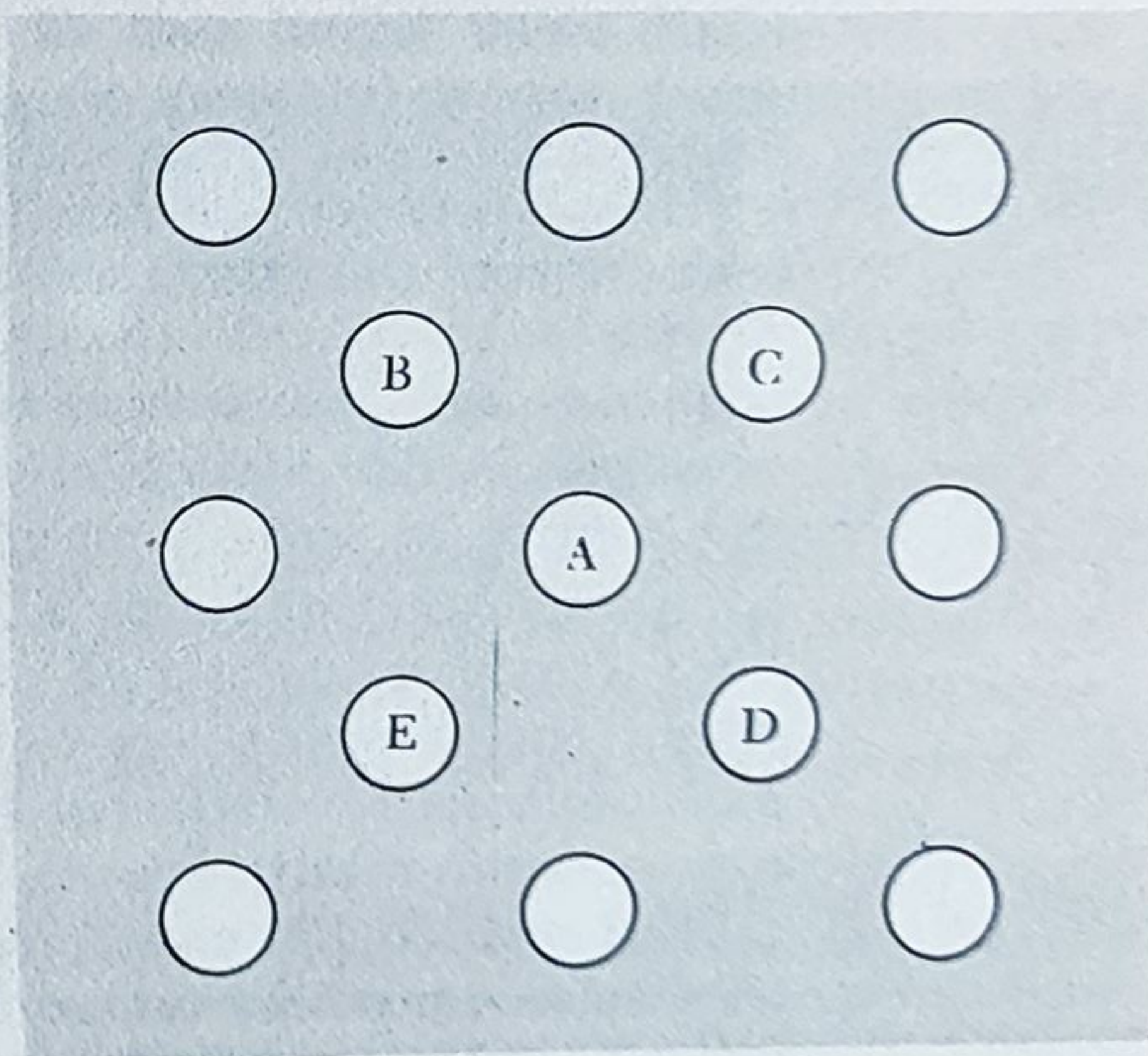


Fig. 10.26. Un atom A și vecinii săi cei mai apropiați într-o rețea cristalină (desigur, rețeaua este în realitate tridimensională).

84,83, 42  
285, 25



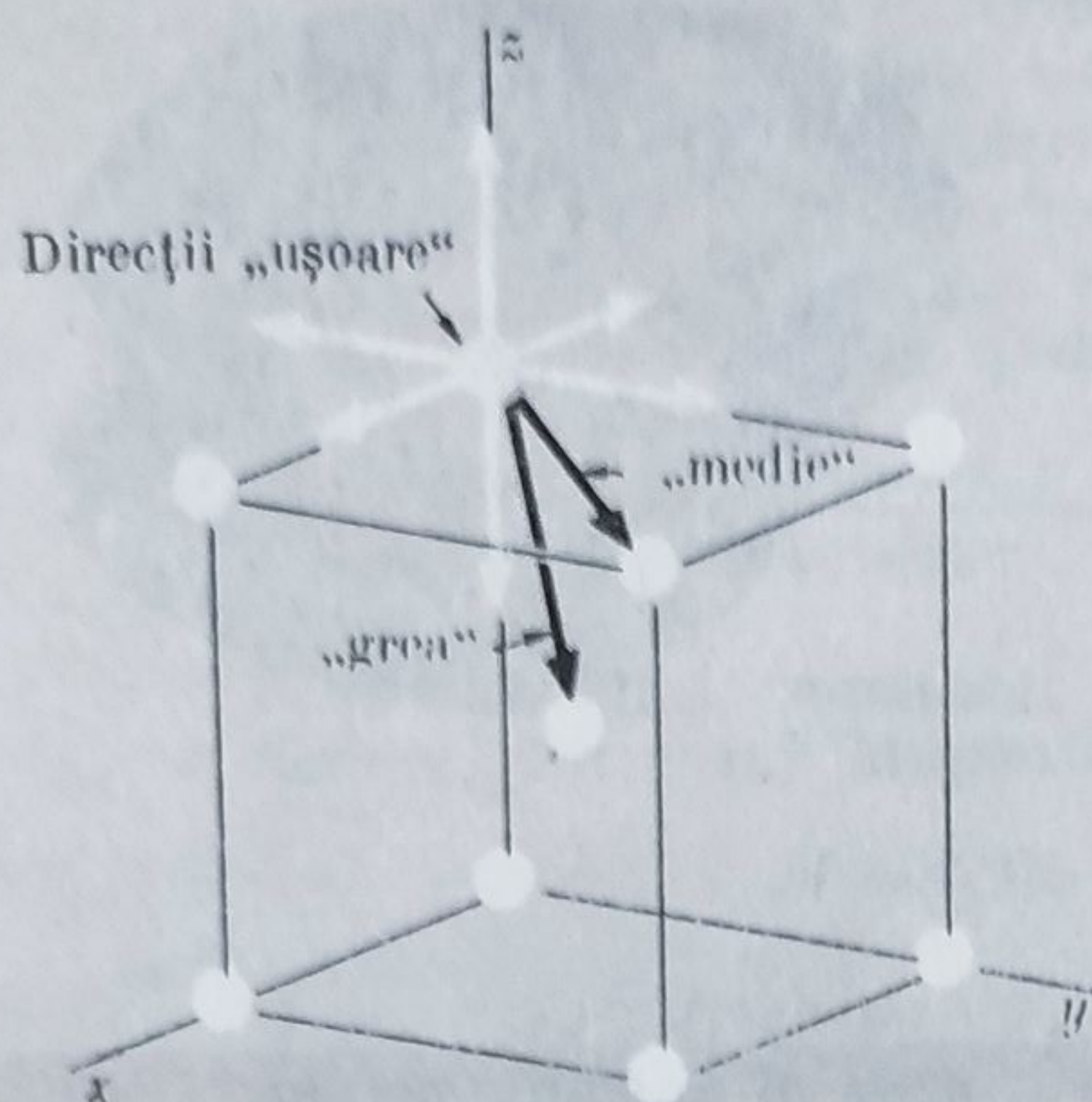


Fig. 10.27. În fier direcția preferențială de magnetizare este de-a lungul unei axe cubice a cristalului.

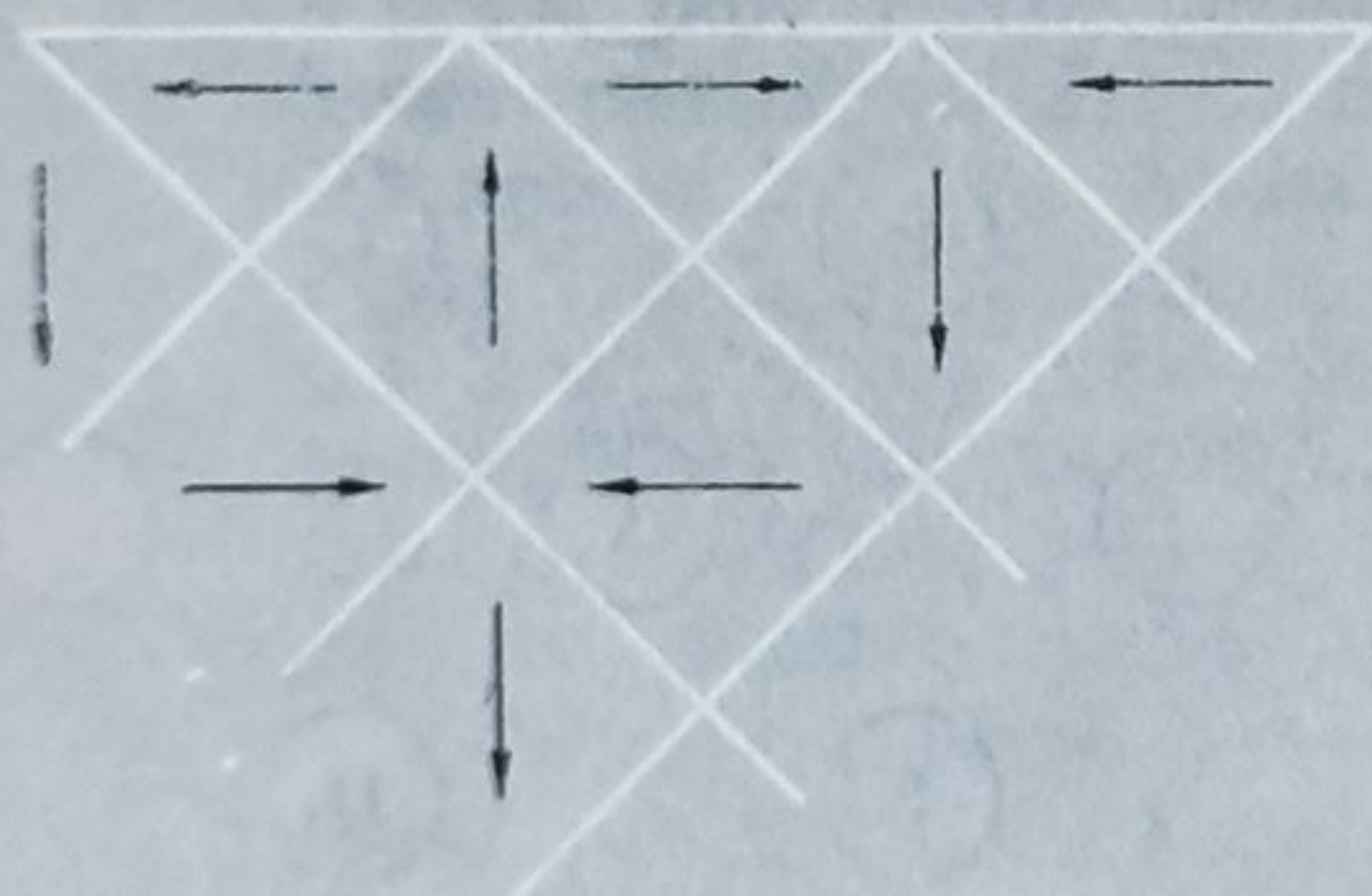


Fig. 10.28. Aranjare posibilă a domeniilor magnetice într-un cristal uniform de fier.

tendință puternică de „a o face unanimă” și atunci întâmplarea se va răspîndi.

**Răspunsul II:** Accidentul determină intrucîtva care dintre diversele direcții echivalente în cristal este aleasă, dacă începem dintr-o stare dezordonată — ea, de exemplu, atunci cînd fierul este răcit prin punctul său Curie fără nici un cîmp exterior aplicat. Fierul pur constă din cristale cubice cu volum centrat. Fiecare atom are opt vecini cei mai apropiați. Simetria mediului din jur se impune asupra fiecărui aspect al atomului, incluzînd cuplajul dintre spini. La fier axa cubică se întîmplă să fie axa de cea mai ușoară magnetizare. Adică, spinii preferă să fie orientați în aceeași direcție, dar preferă aceasta încă mai bine dacă acea direcție este una dintre cele șase direcții

$\pm\hat{x}$ ,  $\pm\hat{y}$ ,  $\pm\hat{z}$  (fig. 10.27). Aceasta este important deoarece înseamnă că spinii nu se vor roti ușor *en masse* dintr-una din direcțiile ușoare într-alta echivalentă la unghi drept. Pentru a face astfel, ei ar avea de trecut prin orientările *mai puțin* favorabile. Este tocmai acest obstacol care face magnetii permanenți posibili.

**Răspunsul III:** O bucată aparent nemagnetizată de fier este în realitate compusă din multe *domenii*, în fiecare dintre ele spinii fiind aliniați într-un fel, dar într-o direcție diferită de aceea a spinilor din domeniile vecine. În medie pe întreaga piesă de fier „nemagnetizat”, toate direcțiile sînt egal reprezentate, astfel încît nu rezultă nici un cîmp magnetic la scară largă. Domeniile magnetice apar chiar într-un monocristal. Domeniile sînt în mod obișnuit microscopice în sensul de fiecare zi al cuvîntului. De fapt ele pot fi văzute sub un microscop de putere mică. Aceasta este încă enorm, desigur, la scară atomică, astfel că un domeniu magnetic include în mod tipic miliarde de momente magnetice elementare. Figura 10.28 reprezintă o împărțire în domenii. Împărțirea provine din aceea că este de energie mai joasă decît un aranjament cu toți spinii orientați într-o direcție. Ultimul aranjament ar fi un magnet permanent cu un cîmp puternic întinzîndu-se în spațiul din jurul său.



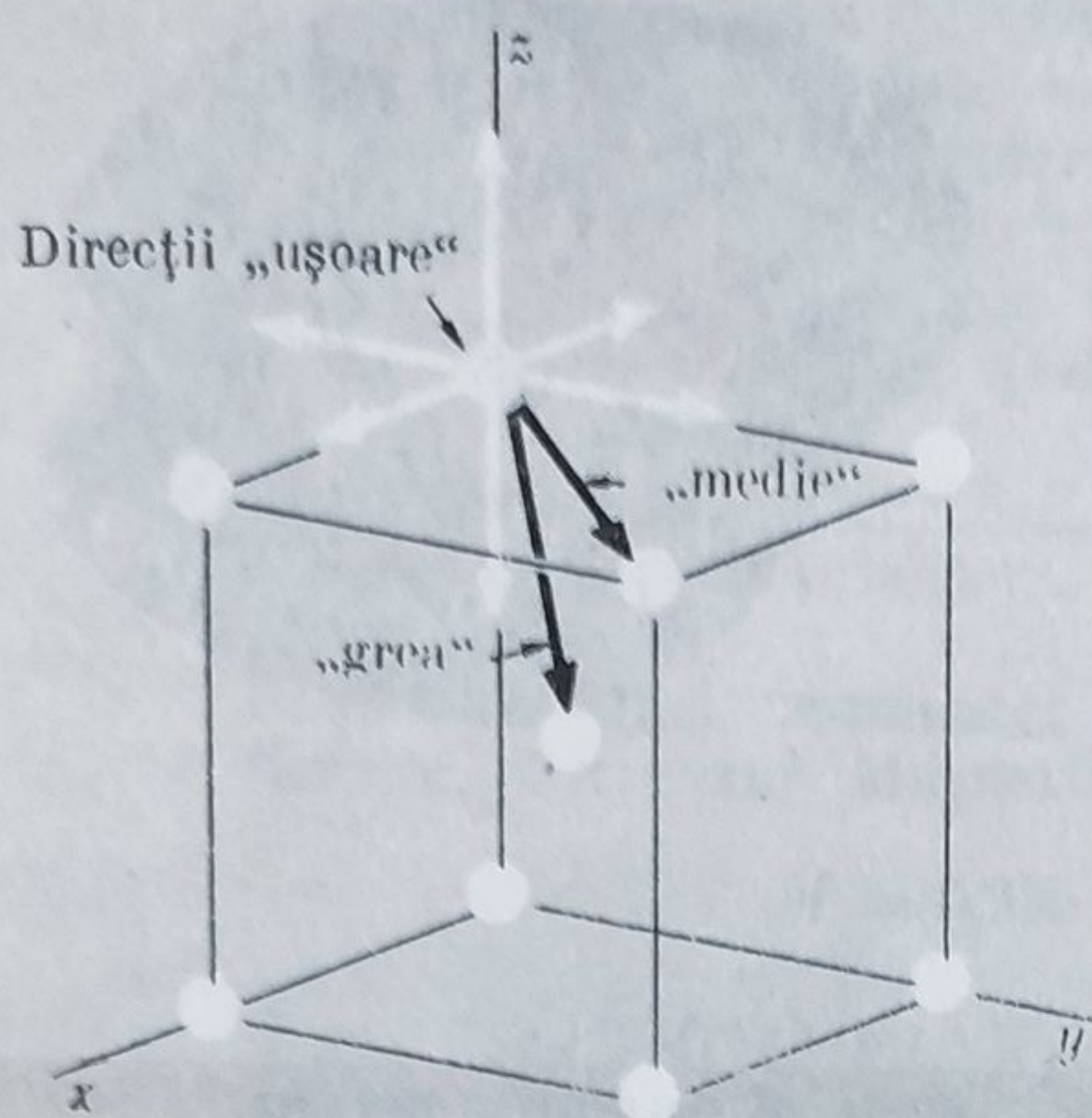


Fig. 10.27. În fier direcția preferențială de magnetizare este de-a lungul unei axe cubice a cristalului.

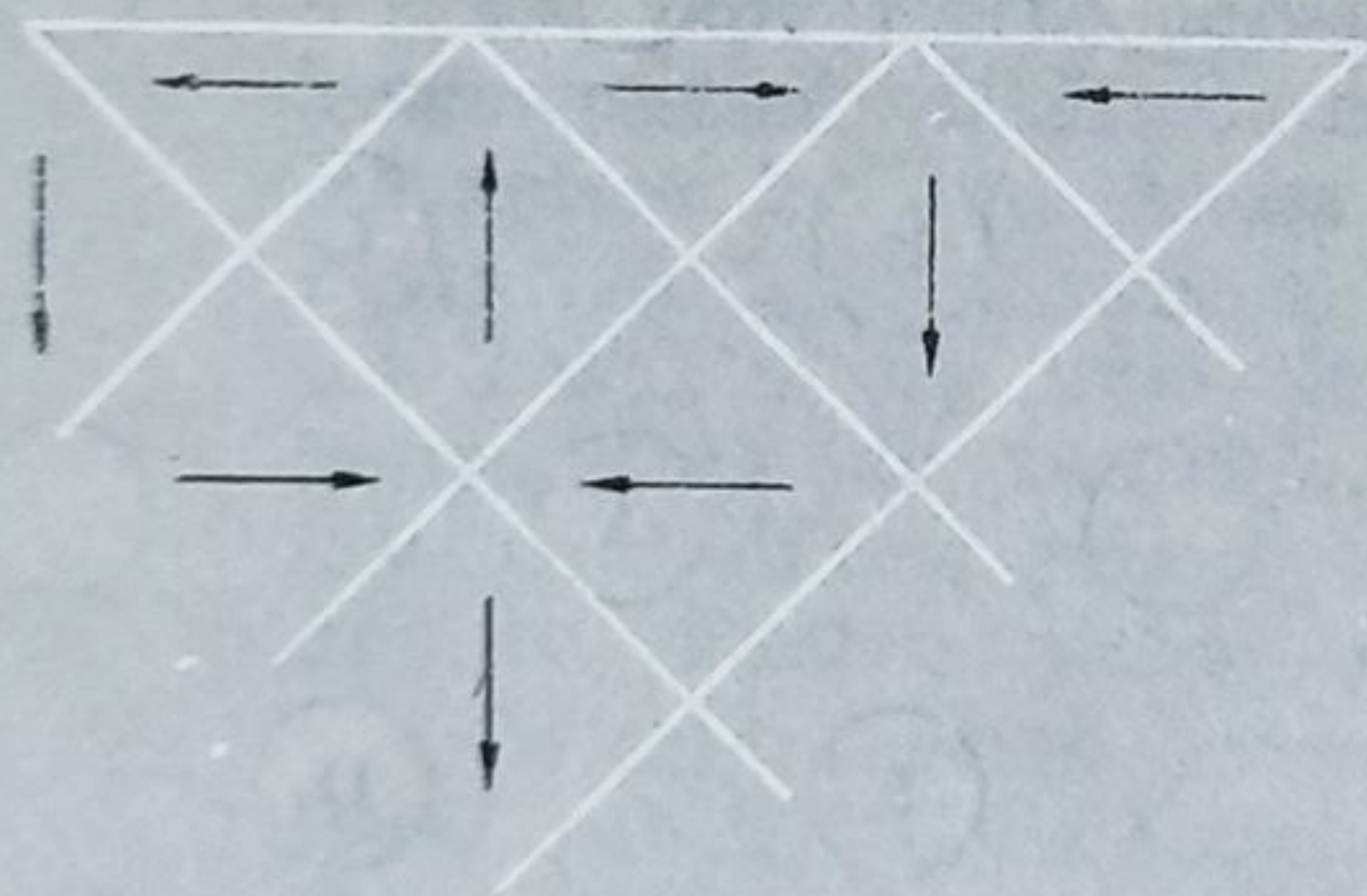


Fig. 10.28. Aranjare posibilă a domeniilor magnetice într-un cristal uniform de fier.

tendință puternică de „a o face unanimă” și atunci întâmplarea se va răspîndi.

**Răspunsul II:** Accidentul determină întrucîtva care dintre diversele direcții echivalente în cristal este aleasă, dacă începem dintr-o stare dezordonată — ca, de exemplu, atunci cînd fierul este răcit prin punctul său Curie fără nici un cîmp exterior aplicat. Fierul pur constă din cristale cubice cu volum centrat. Fiecare atom are opt vecini cei mai apropiați. Simetria mediului din jur se impune asupra fiecărui aspect al atomului, incluzînd cuplajul dintre spini. La fier axa cubică se întîmplă să fie axa de cea mai ușoară magnetizare. Adică, spinii preferă să fie orientați în aceeași direcție, dar preferă aceasta încă mai bine dacă acea direcție este una dintre cele șase direcții

$\pm\hat{x}$ ,  $\pm\hat{y}$ ,  $\pm\hat{z}$  (fig. 10.27). Aceasta este important deoarece înseamnă că spinii nu se vor roti ușor *en masse* dintr-una din direcțiile ușoare într-alta echivalentă la unghi drept. Pentru a face astfel, ei ar avea de trecut prin orientările *mai puțin* favorabile. Este tocmai acest obstacol care face magnetii permanenți posibili.

**Răspunsul III:** O bucată aparent nemagnetizată de fier este în realitate compusă din multe *domenii*, în fiecare dintre ele spinii fiind aliniați într-un fel, dar într-o direcție diferită de aceea a spinilor din domeniile vecine. În medie pe întreaga piesă de fier „nemagnetizat”, toate direcțiile sînt egal reprezentate, astfel încît nu rezultă nici un cîmp magnetic la scară largă. Domeniile magnetice apar chiar într-un monocristal. Domeniile sînt în mod obișnuit microscopice în sensul de fiecare zi al cuvîntului. De fapt ele pot fi văzute sub un microscop de putere mică. Aceasta este încă enorm, desigur, la scară atomică, astfel că un domeniu magnetic include în mod tipic miliarde de momente magnetice elementare. Figura 10.28 reprezintă o împărțire în domenii. Împărțirea provine din aceea că este de energie mai joasă decît un aranjament cu toți spinii orientați într-o direcție. Ultimul aranjament ar fi un magnet permanent cu un cîmp puternic întinzîndu-se în spațiul din jurul său.



Energia înmagazinată în acest câmp exterior este mai mare decât energia necesară pentru a face o mică fracțiune din spinii cristalului, anume aceia de la frontiera domeniului, nealiniați cu vecinii lor imediați. Structura domeniului este astfel rezultatul unui proces de minimizare a energiei.

Dacă înfășurăm o bobină de sîrmă în jurul unei bare de fier, putem aplica materialului un câmp magnetic prin trecerea unui curent prin fir. În acest câmp, momentele orientate paralel cu câmpul vor avea o energie mai joasă decât acelea orientate antiparalel, sau într-o altă direcție. Aceasta favorizează unele dintre domenii; acelea care se întîmplă să aibă o direcție de moment orientată favorabil\* vor avea tendința să crească pe seama celorlalte, dacă aceasta este posibil. Un domeniu crește ca un club, adică, mărimdu-și numărul membrilor. Aceasta se întîmplă la frontiere. Spinii aparținînd unui domeniu nefavorizat dar situați lîngă frontiera unui domeniu favorizat, schimbă simplu apartenența adoptînd direcția favorizată. Aceasta deplasează frontiera domeniului, care nu este decît suprafața limitatoare între două clase de spini. Aceasta se întîmplă destul de ușor în monocristale. Adică, un câmp aplicat foarte slab poate produce, prin deplasarea frontierelor, o creștere de domeniu foarte mare, și deci o variație globală mare în magnetizare. Depinzînd de structura granulară a materialului totuși, deplasarea frontierelor domeniilor poate fi dificilă.

Dacă câmpul magnetic se întîmplă să nu fie de-a lungul uneia dintre direcțiile „ușoare” (în cazul unui cristal cubic, de exemplu) golirea domeniilor nefavorizate încă lasă momentele neorientate exact paralel cu câmpul. Poate fi nevoie acum de un câmp considerabil mai larg pentru a le aduce în linie cu direcția câmpului pentru a crea în final, magnetizarea maximă posibilă.

Să privim la consecințele la scară mare ale acestui fapt, așa cum apar în comportarea magnetică a unei bucăți de fier în diverse câmpuri aplicate. Un aranjament experimental convenabil este un tor de fier, în jurul căruia înfășurăm două bobine (fig. 10.29). Aceasta dă un câmp practic uniform în interiorul fierului, fără nici un fel de efecte de margine pentru a complica problemele. Măsurînd tensiunea indusă într-una dintre bobine putem determina variațiile în fluxul  $\Phi$ , și de aici  $B$  în interiorul fierului. Dacă ținem seama de variațiile lui  $B$ , începînd de la  $B = 0$ , știm totdeauna care este  $B$ . Un curent prin cealaltă bobină stabilește câmpul  $H$ , pe care îl luăm drept variabilă independentă. Dacă știm  $B$  și  $H$ , putem totdeauna calcula  $M$ .

\* Avem tendința să folosim *spini* și *momente* aproape echivalent în această discuție. Momentul este un aspect intrinsec al spinului și dacă unul este alineat tot așa este și celălalt. Pentru a fi întru totul corecți, vom reaminti cititorului că în cazul electronului vectorii moment magnetic și moment unghiular sînt orientați în direcții opuse.

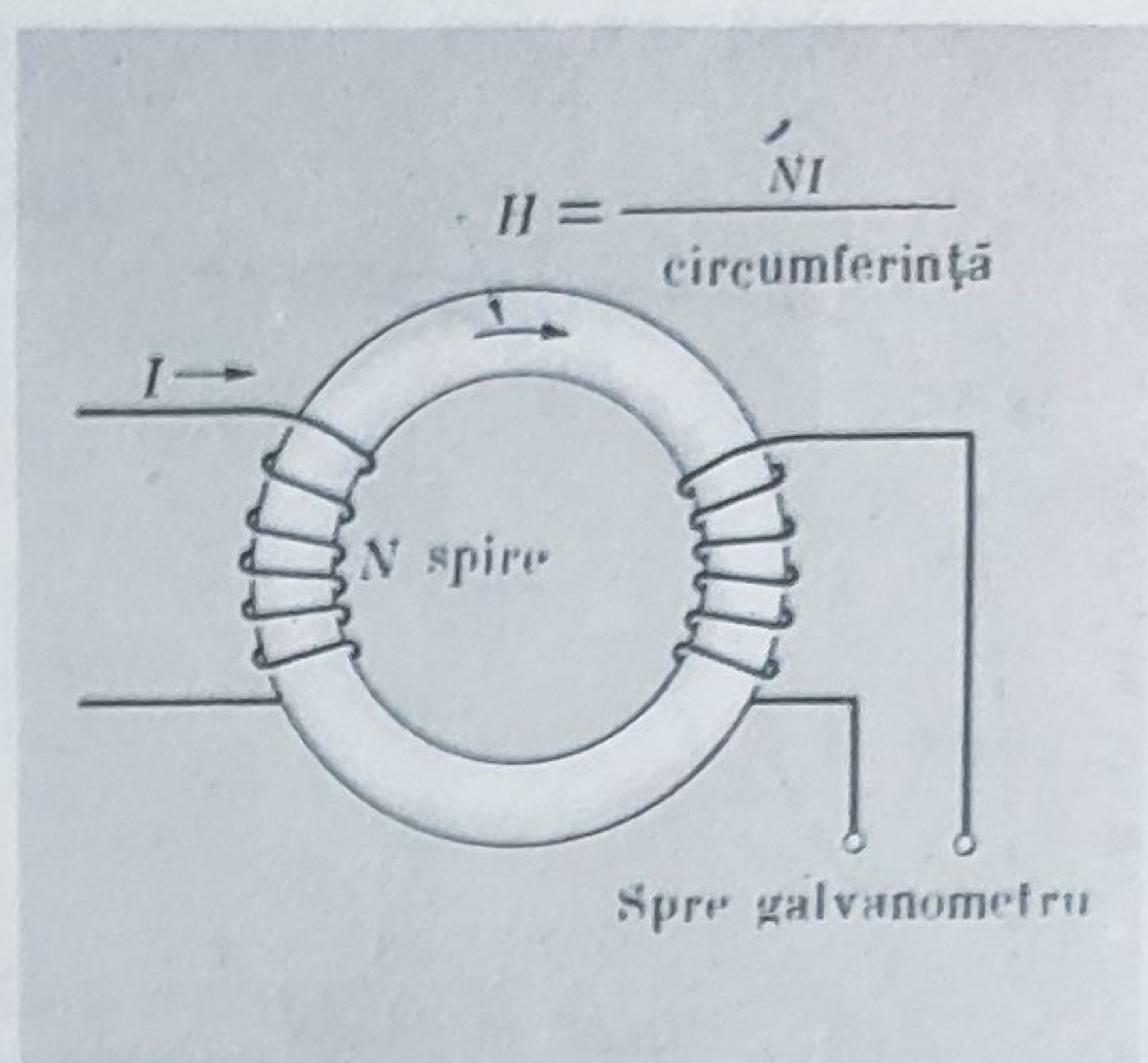


Fig. 10.29. Montaj pentru investigarea relației între  $B$  și  $M$ , sau  $B$  și  $H$ , într-un material feromagnetic.

81,83,73  
285,257



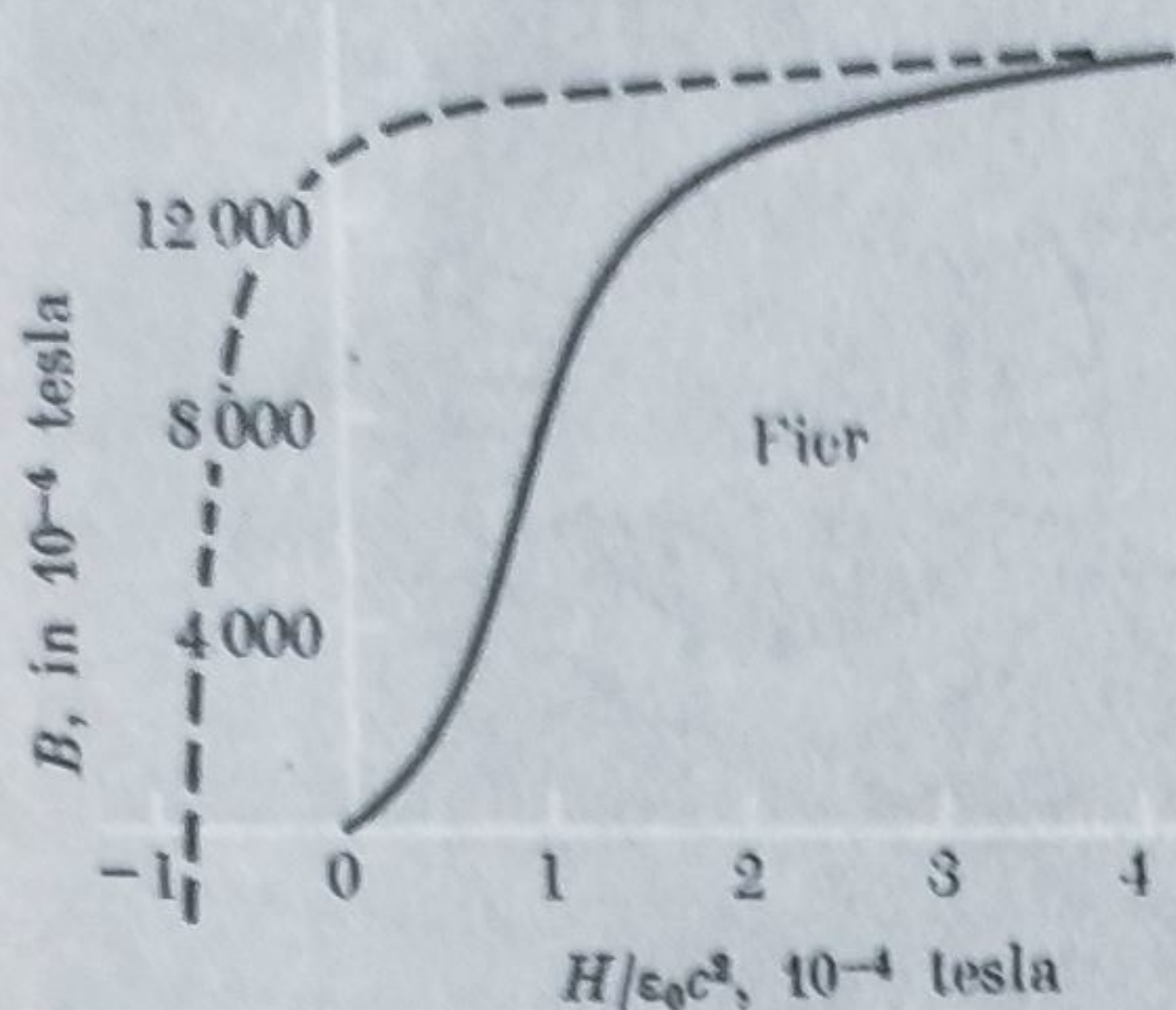


Fig. 10.30. Curba de magnetizare pentru fier de înaltă puritate. Curba întreruptă se obține când  $H$  este micșorat de la o valoare pozitivă mare.

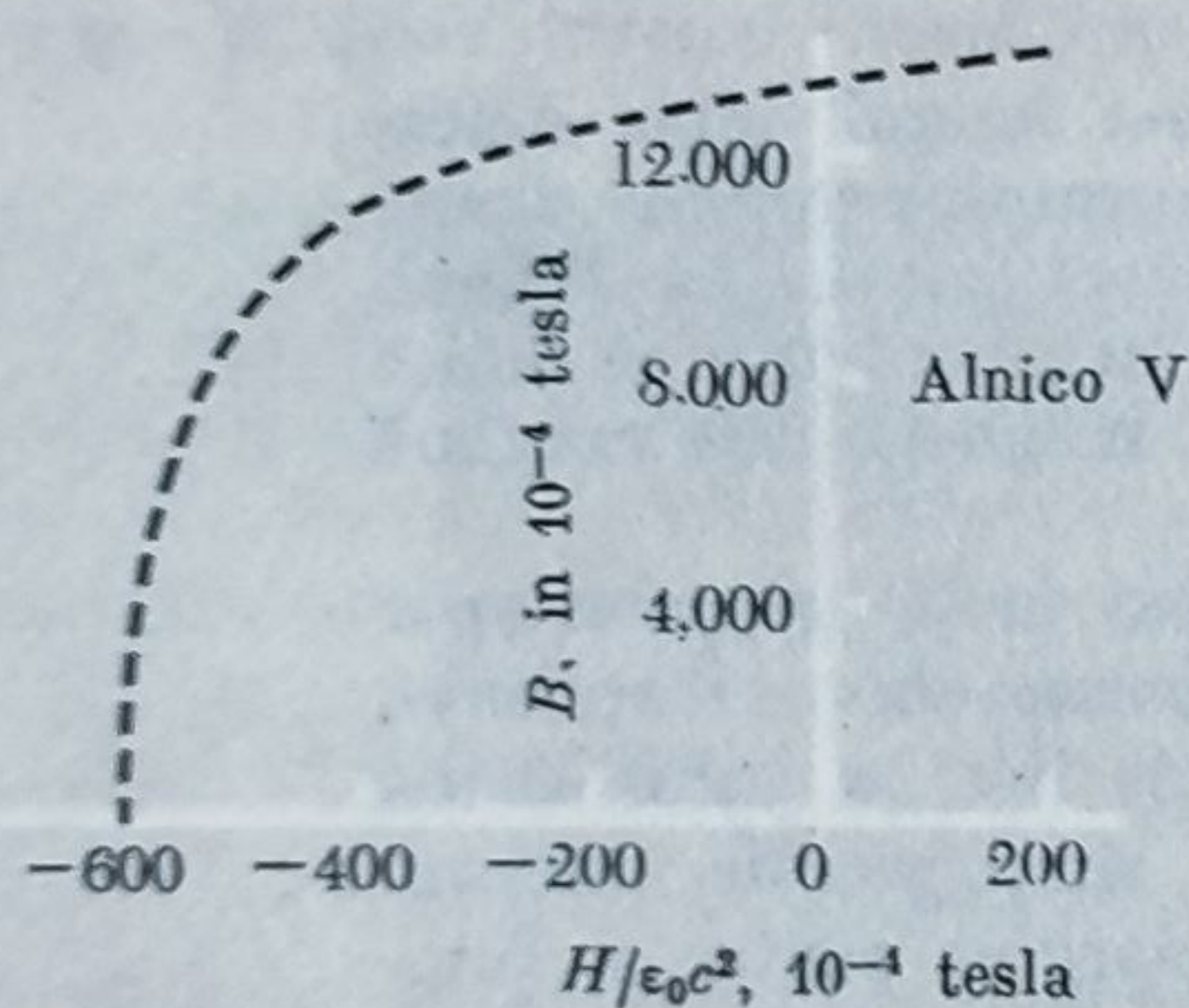


Fig. 10.31. Alnico V este un aliaj de aluminiu, nichel și cobalt care este folosit pentru magneti permanenți. De comparat această porțiune a curbei sale de magnetizare cu porțiunea corespunzătoare a caracteristicii pentru un material magnetic „moale”, arătată în figura 10.30.

Este mai uzual de a reprezenta  $B$ , și nu  $M$ , în funcție de  $H$ . O curbă tipică  $B-H$  pentru fier este arătată în figura 10.30. Observați că scările pe abscisă și ordonată diferă enorm. Desigur  $B$  și  $H$  aici se referă la o medie peste tot inelul de fier; structura fină de domeniu nu apare explicit.

Pornind cu fier „nemagnetizat”,  $B = 0$  și  $H = 0$ , creșterea lui  $H$  face pe  $B$  să crească manifest nelineer, încet la început, apoi mai repede, apoi foarte încet, în final aplatizându-se. Ceea ce devine în realitate constant la limite este nu  $B$  ci  $M$ . În acest grafic totuși, deoarece  $M = \epsilon_0 c^2 B - H$ , și  $H \ll \epsilon_0 c^2 B$ , diferența dintre  $M$  și  $\epsilon_0 c^2 B$  nu este semnificativă.

Partea de jos a curbei  $B-H$  este guvernată de mișcarea frontierelor domeniilor, adică prin creșterea domeniilor „corect orientate” în dauna domeniilor „rău orientate”. În partea aplatizată a curbei, momentele atomice sînt așezate de „forța brută” în linie cu cîmpul. Fierul este aici un metal obișnuit policristalin, astfel încît doar o mică fracțiune a microcristalelor vor fi destul de norocoase pentru a avea o direcție „ușoară” aliniată cu direcția cîmpului.

Dacă descreștem acum încet curentul prin bobină, coborînd astfel  $H$ , curba *nu se repetă*. În schimb, găsim comportarea dată în curba punctată din figura 10.31. Această ireversibilitate este numită histeresis. Este în mare parte datorată faptului că deplasările frontierelor de domeniu sînt în parte ireversibile. Motivele nu sînt evidente din ceea ce am spus, dar sînt bine înțelese de fizicienii care lucrează în feromagnetism. Ireversibilitatea este o dificultate, și o cauză de pierdere de energie în multe aplicații tehnice ale materialelor feromagnetice — de exemplu, în transformatori de curent alternativ. Dar este indispensabilă pentru magnetizarea permanentă, și pentru astfel de aplicații se caută mărirea ireversibilității. Figura 10.31 arată porțiunea corespunzătoare a curbei  $B-H$  pentru un aliaj de magnet permanent bun. Observați că  $H$  trebuie să devină în direcția *inversă* înainte ca  $B$  să fie redus din nou la zero. Dacă bobina este simplu deconectată și îndepărtată, rămînem cu  $B$  la 1,3 tesla, ceea ce se numește *remanență*. Deoa-



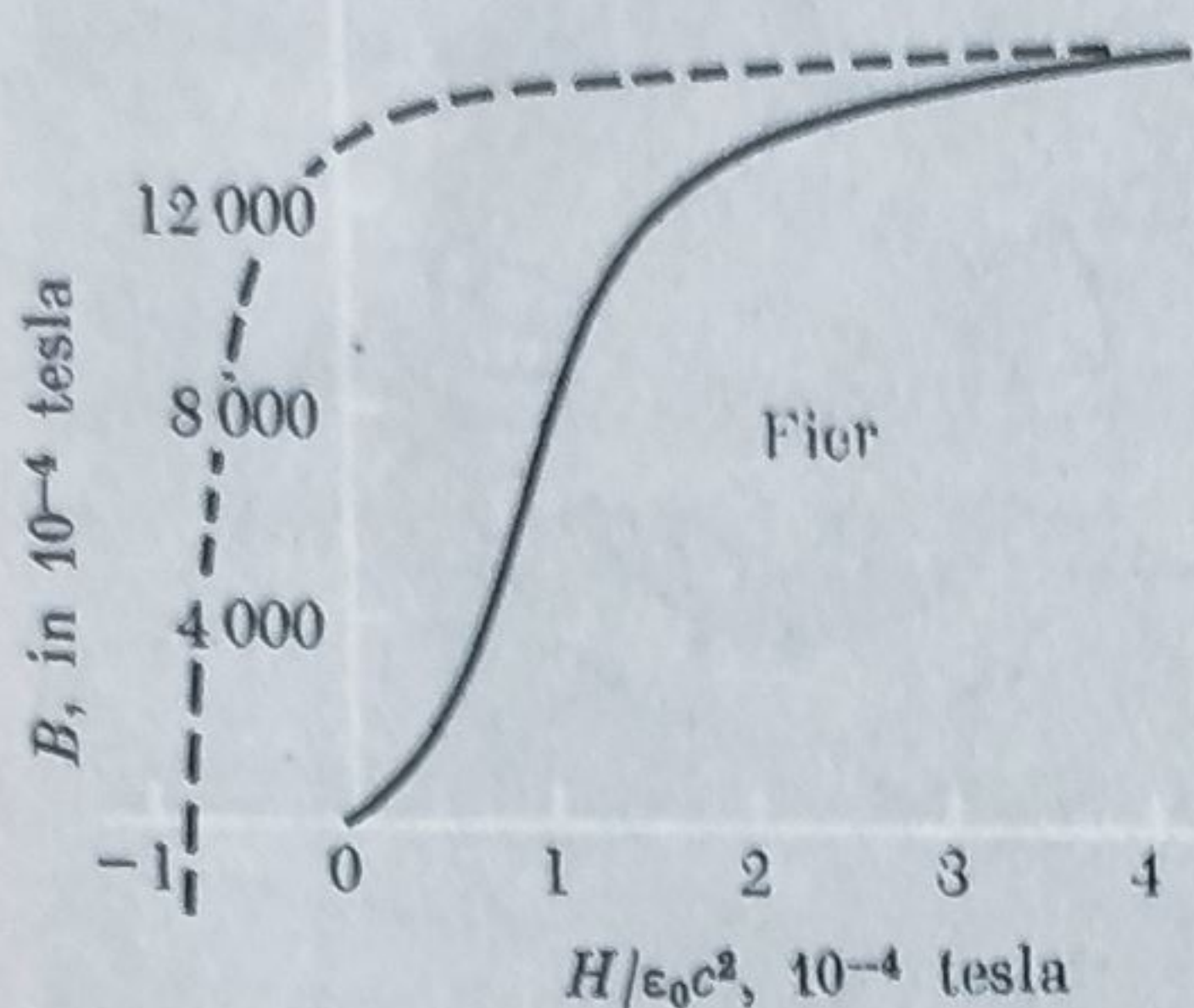


Fig. 10.30. Curba de magnetizare pentru fier de înaltă puritate. Curba întreruptă se obține când  $H$  este micșorat de la o valoare pozitivă mare.

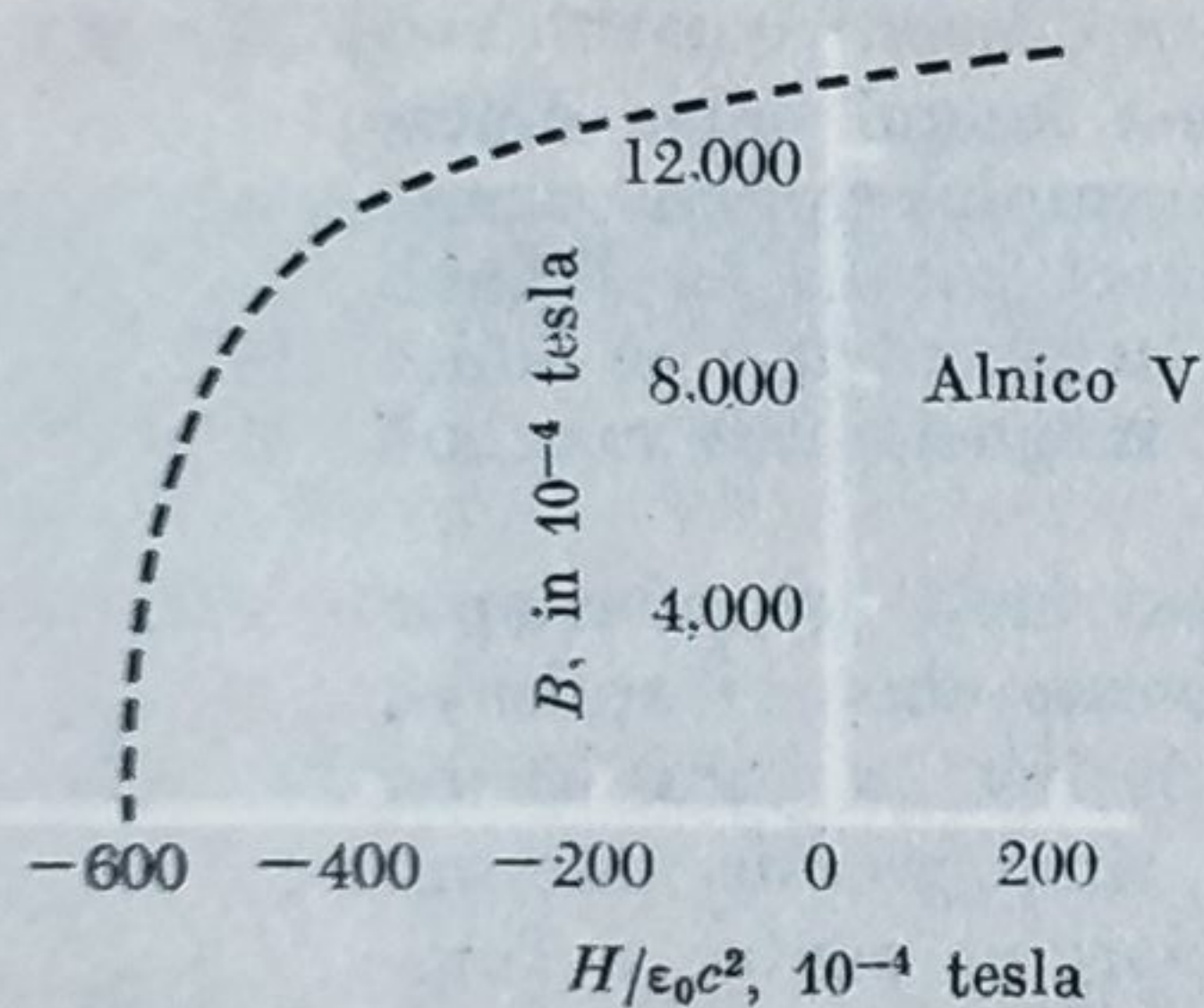


Fig. 10.31. Alnico V este un aliaj de aluminiu, nichel și cobalt care este folosit pentru magneti permanenți. De comparat această porțiune a curbei sale de magnetizare cu porțiunea corespunzătoare a caracteristicii pentru un material magnetic „moale”, arătată în figura 10.30.

Este mai uzual de a reprezenta  $B$ , și nu  $M$ , în funcție de  $H$ . O curbă tipică  $B-H$  pentru fier este arătată în figura 10.30. Observați că scările pe abscisă și ordonată diferă enorm. Desigur  $B$  și  $H$  aici se referă la o medie peste tot inelul de fier; structura fină de domeniu nu apare explicit.

Pornind cu fier „nemagnetizat”,  $B = 0$  și  $H = 0$ , creșterea lui  $H$  face pe  $B$  să crească manifest nelineară, încet la început, apoi mai repede, apoi foarte încet, în final aplatizându-se. Ceea ce devine în realitate constant la limite este nu  $B$  ci  $M$ . În acest grafic totuși, deoarece  $M = \epsilon_0 c^2 B - H$ , și  $H \ll \epsilon_0 c^2 B$ , diferența dintre  $M$  și  $\epsilon_0 c^2 B$  nu este semnificativă.

Partea de jos a curbei  $B-H$  este guvernată de mișcarea frontierelor domeniilor, adică prin creșterea domeniilor „corect orientate” în dauna domeniilor „rău orientate”. În partea aplatizată a curbei, momentele atomice sînt așezate de „forța brută” în linie cu cîmpul. Fierul este aici un metal obișnuit policristalin, astfel încît doar o mică fracțiune a microcristalelor vor fi destul de norocoase pentru a avea o direcție „ușoară” aliniată cu direcția cîmpului.

Dacă descreștem acum încet curenul prin bobină, coborînd astfel  $H$ , curba *nu se repetă*. În schimb, găsim comportarea dată în curba punctată din figura 10.31. Această ireversibilitate este numită histerzis. Este în mare parte datorată faptului că deplasările frontierelor de domeniu sînt în parte ireversibile. Motivele nu sînt evidente din ceea ce am spus, dar sînt bine înțelese de fizicienii care lucrează în feromagnetism. Ireversibilitatea este o dificultate, și o cauză de pierdere de energie în multe aplicații tehnice ale materialelor feromagnetice — de exemplu, în transformatoare de curent alternativ. Dar este indispensabilă pentru magnetizarea permanentă, și pentru astfel de aplicații se caută mărirea ireversibilității. Figura 10.31 arată porțiunea corespunzătoare a curbei  $B-H$  pentru un aliaj de magnet permanent bun. Observați că  $H$  trebuie să devină în direcția *inversă* înainte ca  $B$  să fie redus din nou la zero. Dacă bobina este simplu deconectată și îndepărtată, rămînem cu  $B$  la 1,3 tesla, ceea ce se numește *remanență*. Deoa-



rece  $H$  este zero, aceasta este în esență chiar magnetizarea, cu excepția factorului  $\epsilon_0 c^2$ . Aliajul a dobândit o magnetizare permanentă, adică, una care se va menține indefinit dacă este expus doar la câmpuri magnetice slabe. Toată informația care este înmagazinată pe benzi magnetice, de la muzică la programe de calculator, își datorează permanența acestui fenomen fizic. Elementele magnetice de calculator, memorii cu miez magnetic și altele, implică aceeași fizică.

## PROBLEME

*O aplicație a unor idei din capitolul 7.*

**10.1.** Estimați (în limita unui factor de doi sau trei) cantitatea de energie înmagazinată în câmpul magnetic al solenoidului descris în § 10.1. Exprimați estimarea dumneavoastră în joule. Fiind dat că puterea staționară furnizată de generator este aproximativ 400 kilowatt, cât de mult timp i-a trebuit câmpului să se instaleze, dacă tensiunea generatorului a fost conectată brusc?

*Susceptibilitatea magnetică a aerului.*

**10.2.** Presupunând că susceptibilitatea paramagnetică de volum a unei substanțe date este proporțională cu numărul de molecule pe centimetru cub și invers proporțională cu temperatura absolută, din datele date în tabela din § 10.1 calculați susceptibilitatea de volum a aerului la temperatură și presiune normală. Aerul este aproximativ o cincime oxigen, de greutate moleculară 32, și puteți presupune că o moleculă de oxigen dintr-un gaz se comportă magnetic tot așa ca în oxigen lichid.

*Comparație între câmpul unui inel de curent și al unui dipol infinitesimal.*

**10.3.** În capitolul 6 am calculat câmpul într-un punct pe axa unui inel de curent de rază  $b$  (vezi ec. 6.41). Arătați că pentru  $z \gg b$  acesta se apropie de câmpul unui dipol magnetic, și aflați cât de departe pe axă trebuie mers pentru ca câmpul să devină în limita  $\alpha$  un procent câmpul pe care un dipol infinitesimal de același moment dipolar l-ar produce în acel punct.

*Aplicație a formulei pentru câmpul de dipol.*

**10.4.** Un solenoid ca acela descris în § 10.1 este situat la subsolul unui laborator de fizică. Un fizician la etajul de sus al clădirii, 20 de metri mai sus și deplasat orizontal 25 de metri, se plînge că acel câmp îi perturbă măsurătorile. Presupunând că solenoidul operează în condițiile descrise, și tratîndu-l drept un simplu dipol magnetic, calculați intensitatea câmpului în regiunea fizicianului. Comentăți, dacă vedeți vreo bază pentru a o face, justetea acelei plîngeri.

*Pământul ca un dipol magnetic.*

**10.5.** La Polul Nord câmpul magnetic terestru este vertical și are intensitatea  $6,2 \times 10^{-5}$  tesla. Câmpul terestru este aproximativ acela al unui dipol la suprafață



și în afară. Care este momentul dipolar și cât de mare ar trebui să fie un curent care, curgând în jurul Ecuatorului, ar crea un moment dipolar de intensitate egală acestuia? (Sursa reală a câmpului terestru este probabil nu un curent lângă suprafață dar o distribuție de curent în miez.)

*Momentul magnetic al unei sfere încărcate aflată în rotație.*

10.6. O sferă de rază  $R$  poartă sarcina  $Q$  care este distribuită uniform pe suprafața sferei cu densitatea  $\sigma = Q/4\pi R^2$ . Această pătură de sarcină se rotește în jurul unei axe cu viteza unghiulară  $\omega$ , în radiani/sec. Aflați momentul ei magnetic. (Împărțiți sfera în bande înguste de sarcină rotitoare; găsiți curentul cu care este echivalentă fiecare bandă, și momentul ei dipolar și integrați peste toate benzile.)

R.  $QR^2\omega/3$

*Investigarea susceptibilității magnetice.*

10.7. Cifrele în tabela din § 10.1 au fost obținute nu prin efectuarea în realitate ale acelor experiențe cu un solenoid ca cel descris, dar căutând susceptibilitățile determinate experimental ale substanțelor și calculând forța care ar acționa în condițiile descrise. Acum când știți cum este definită susceptibilitatea, și de ce factori depinde forța, parcurgeți procesul invers — adică, calculați susceptibilitatea, apoi căutați într-o tabelă, ca de exemplu cea din *Handbook of Chemistry and Physics* (publicată de Chemical Rubber Co.). Când priviți tabela de susceptibilități magnetice din acest Handbook, observați uniformitatea în lunga tabelă de substanțe organice, și explorați tabela de substanțe anorganice pentru cazurile paramagnetice remarcabile, sau cazurile diamagnetice neobișnuite.

10.8. Arătați că lucrul efectuat pentru a scoate o unitate de masă de material paramagnetic dintr-o regiune în care inducția câmpului magnetic este  $B$  într-o regiune unde intensitatea câmpului este neglijabil de mică, este  $\frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 \chi B^2$ ,  $\chi$  fiind susceptibilitatea specifică. Apoi calculați exact cât de mult lucru, pe gram, ar fi necesar pentru a îndepărta oxigenul lichid din poziția menționată în tabela din § 10.1. (Desigur, aceasta se aplică doar dacă  $\chi$  este o constantă pe tot domeniul intensităților magnetice implicate).

*Momentul magnetic al fierului într-un câmp foarte puternic.*

10.9. Deduceți din datele tabelii din § 10.1 (în condițiile specificate) mărimea momentului magnetic a 1 gram de fier. Aproximativ la cât de mulți spini electronici alineați per atom corespunde aceasta? (Greutatea atomică a fierului: 56.)

*Forța dintre două discuri magnetizate.*

10.10. Calculați momentul magnetic total  $m$  al discului magnetizat descris în figura 10.22. Câmpul la distanța  $r$  pe axa discului este aproximativ  $2m/4\pi\epsilon_0 c^2 r^3$  dacă  $r$  este destul de mare încât discul să poată fi considerat



drept simplu dipol. Să considerăm acum două astfel de discuri  $A$  și  $B$ .  $A$  se află pe o masă de lemn, cu momentul său  $m$  orientat în sus.  $B$  este situat deasupra lui  $A$  cu momentul său orientat în jos, și împiedicat să se miște lateral. Estimați în mare înălțimea la care  $B$  ar „pluti” deasupra lui  $A$ . Folosiți „aproximația de dipol” tocmai descrisă. Aceasta va fi justificat dacă înălțimea de plutire estimată nu este prea mică.

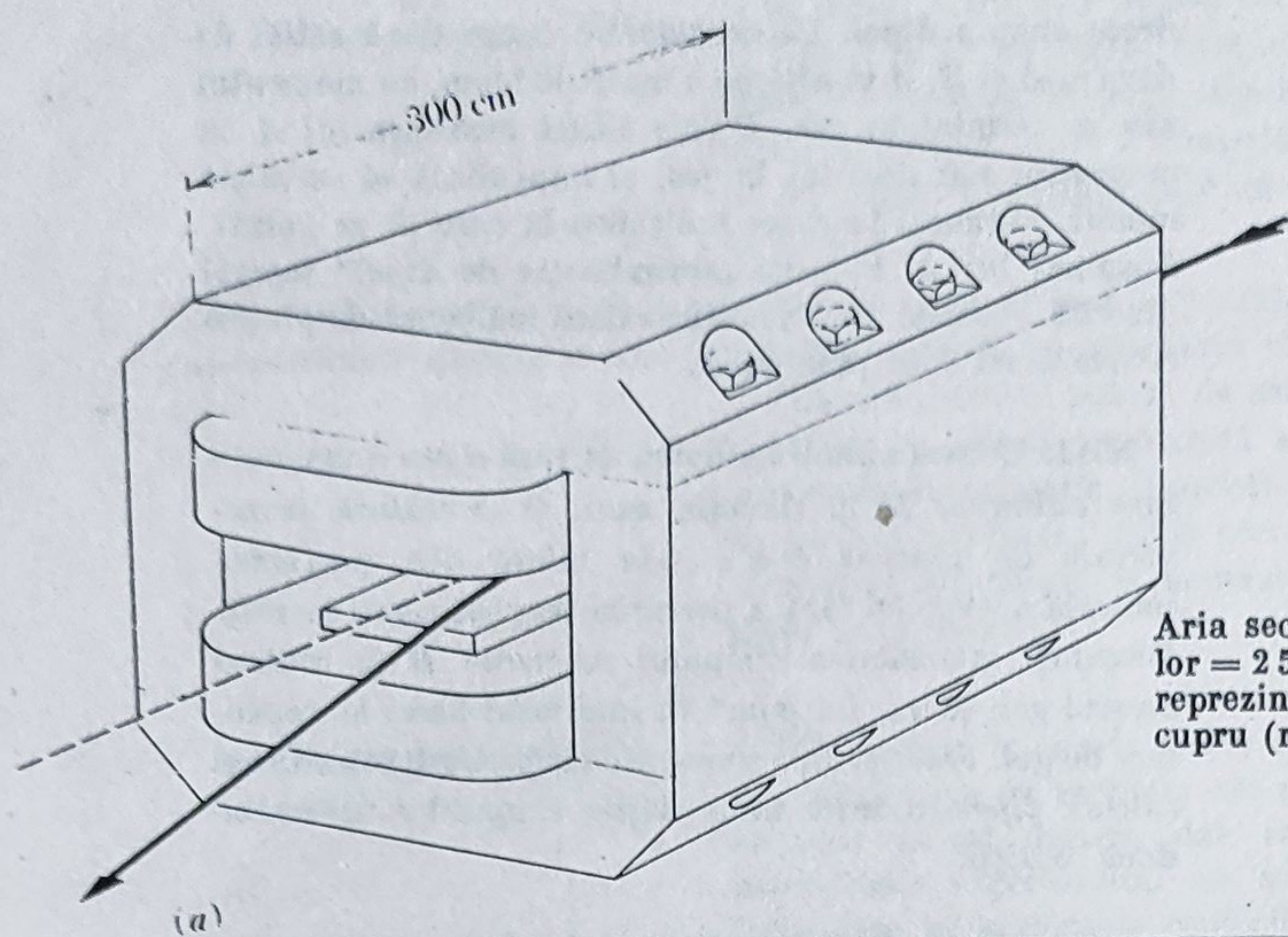
**10.11.** O bară cilindrică lungă de rază  $a$  are o magnetizare uniformă  $M$  în direcția axei. O creștătură transversală de grosime  $b \ll a$  este tăiată din porțiunea centrală a vergelei fără a perturba magnetizarea în rest. Discutați intensitatea câmpului magnetic  $B$  la centrul acestui gol, și într-un punct în interiorul barei la depărtare de gol. Folosiți un argument de superpoziție pentru a calcula diferența între intensitățile câmpurilor în aceste două poziții.

**10.12.** Un tor de fier cu diametrul interior 10 cm, diametrul exterior 12 cm, are 20 de spire de sîrmă în jurul său. Folosiți curba  $B-H$  din figura 10.30 pentru a estima curentul necesar la producerea unui câmp în fier de 1,2 tesla.

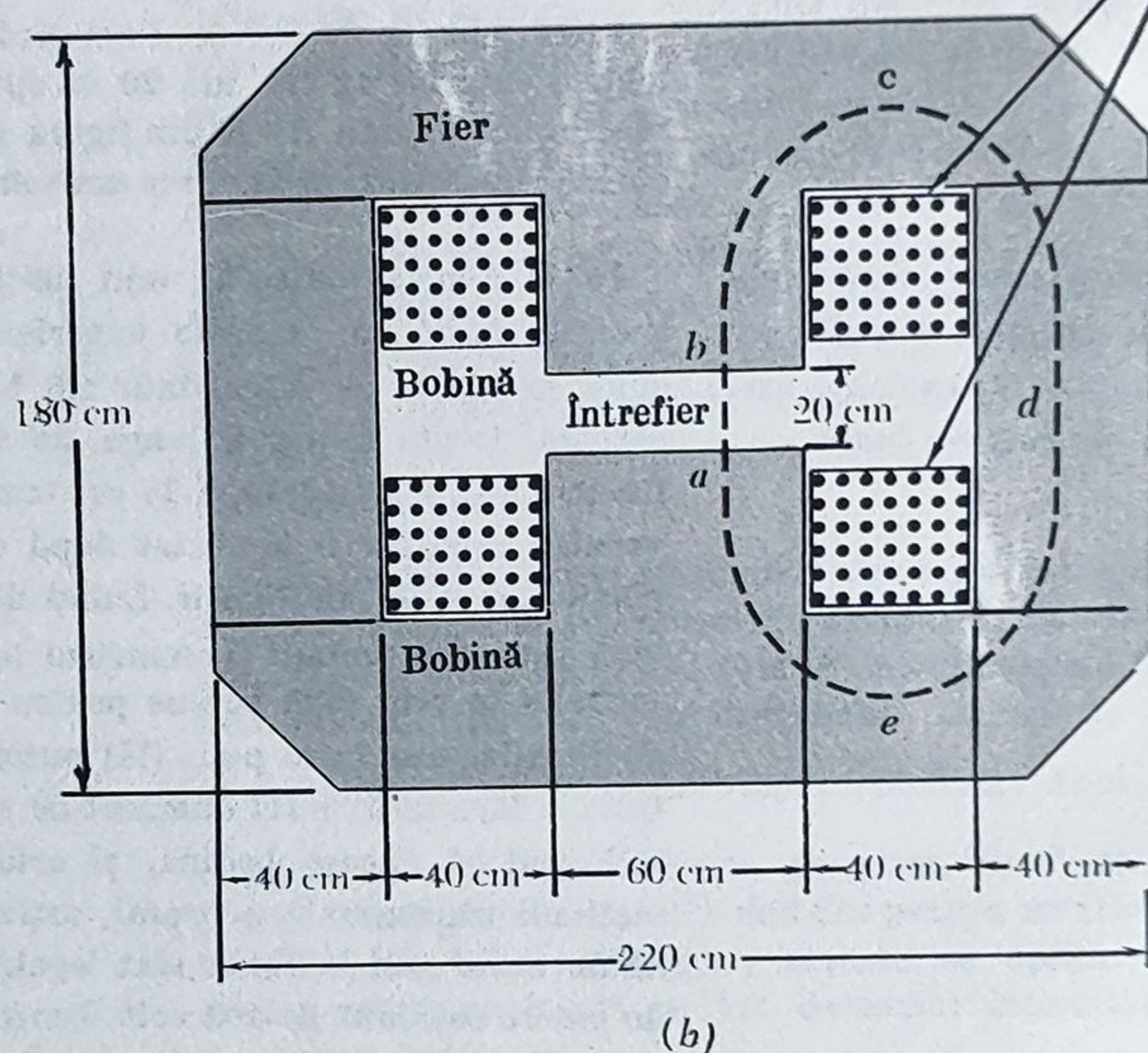
*Proiectarea unui electromagnet: un „magnet de deflecție” pentru o experiență cu particule de energie înaltă.*

**10.13.** Pentru deflecția unui fascicul de particule de energie înaltă în anumite experiențe este necesar un câmp magnetic de intensitate 1,6 tesla, menținut pe o regiune dreptunghiulară lungă de 3 metri în direcția fasciculului, 60 cm lată și 20 cm înaltă. Un magnet convenabil ar putea fi proiectat după direcțiile indicate în părțile (a) și (b) ale figurii. Luînd dimensiunile așa cum sînt date, determinați (I) numărul total de amperi-spiră necesari în cele două bobine pentru a produce un câmp de 16 kilogauss între poli; (II) puterea în kilowați care trebuie furnizată; (III) numărul de spire pe care trebuie să-l conțină fiecare bobină, și aria corespunzătoare a secțiunii transversale a firului, astfel încît câmpul dorit să fie atins cînd bobinele sînt legate în serie la o sursă de putere continuă de 400 volt. Pentru a fi folosită în (I), o porțiune a curbei  $B-H$  pentru fierul magnetic Armco este arătată în partea (d) a figurii. Tot ce aveți nevoie să determinați este integrala curbilinie a lui  $H$  în jurul unei curbe ca  $abcdea$ . Între poli,  $H = B$ . În fier, puteți presupune că  $B$  are aceeași intensitate ca și între poli. Liniile de câmp vor arăta oarecum ca acelea desenate în partea (c) a figurii. Puteți estima în mare lungimea curbei prin fier. Aceasta nu este foarte critic, deoarece veți vedea că curba lungă  $bcd$  contribuie relativ puțin la integrala curbilinie, în comparație cu contribuția curbei prin aer





Aria secțiunii totale a bobinelor =  $2500 \text{ cm}^2$ , din care  $1500 \text{ cm}^2$  reprezintă aria conductorilor de cupru (restul este izolația și apa de răcire)

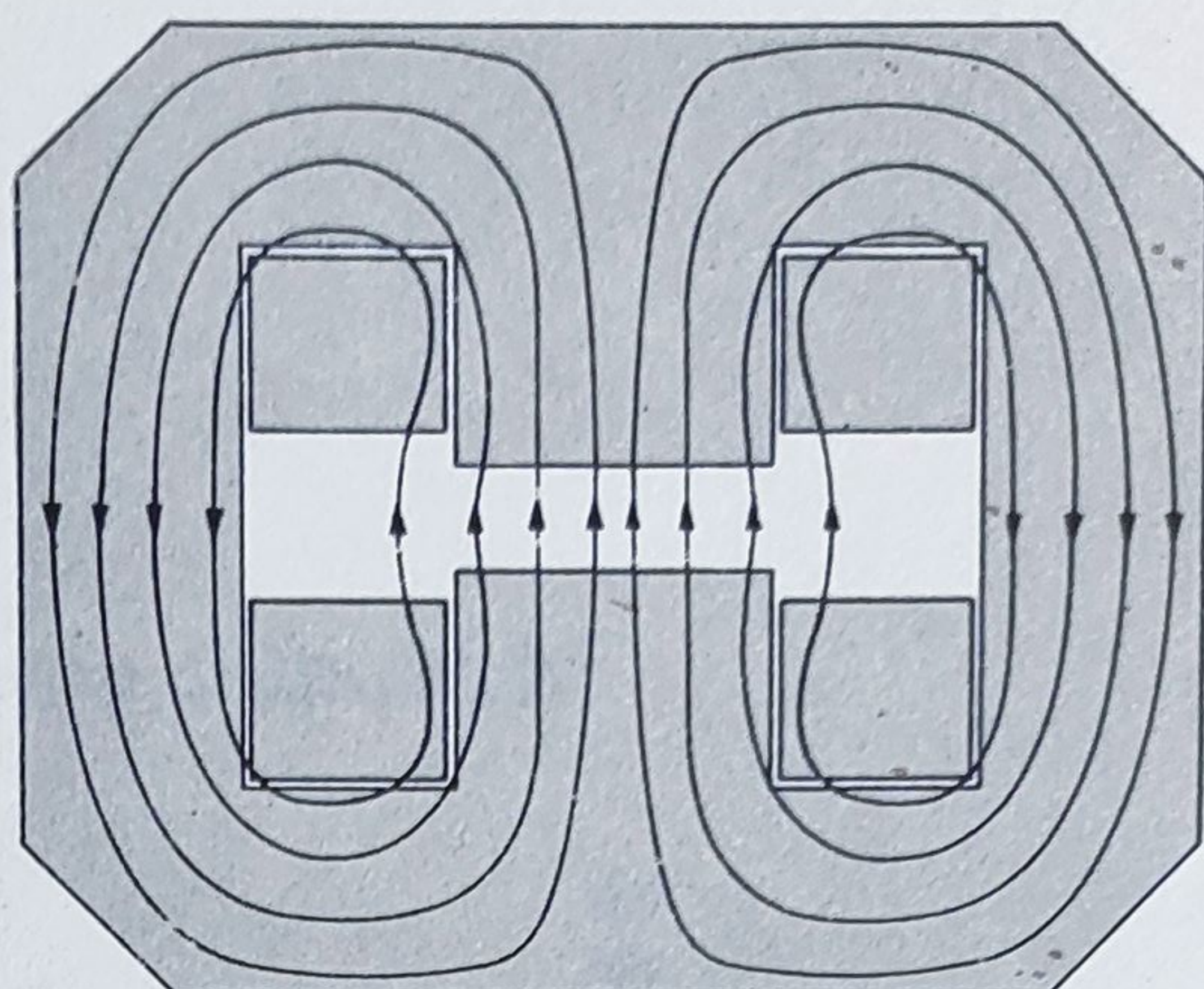


Figuri pentru problema 10.13

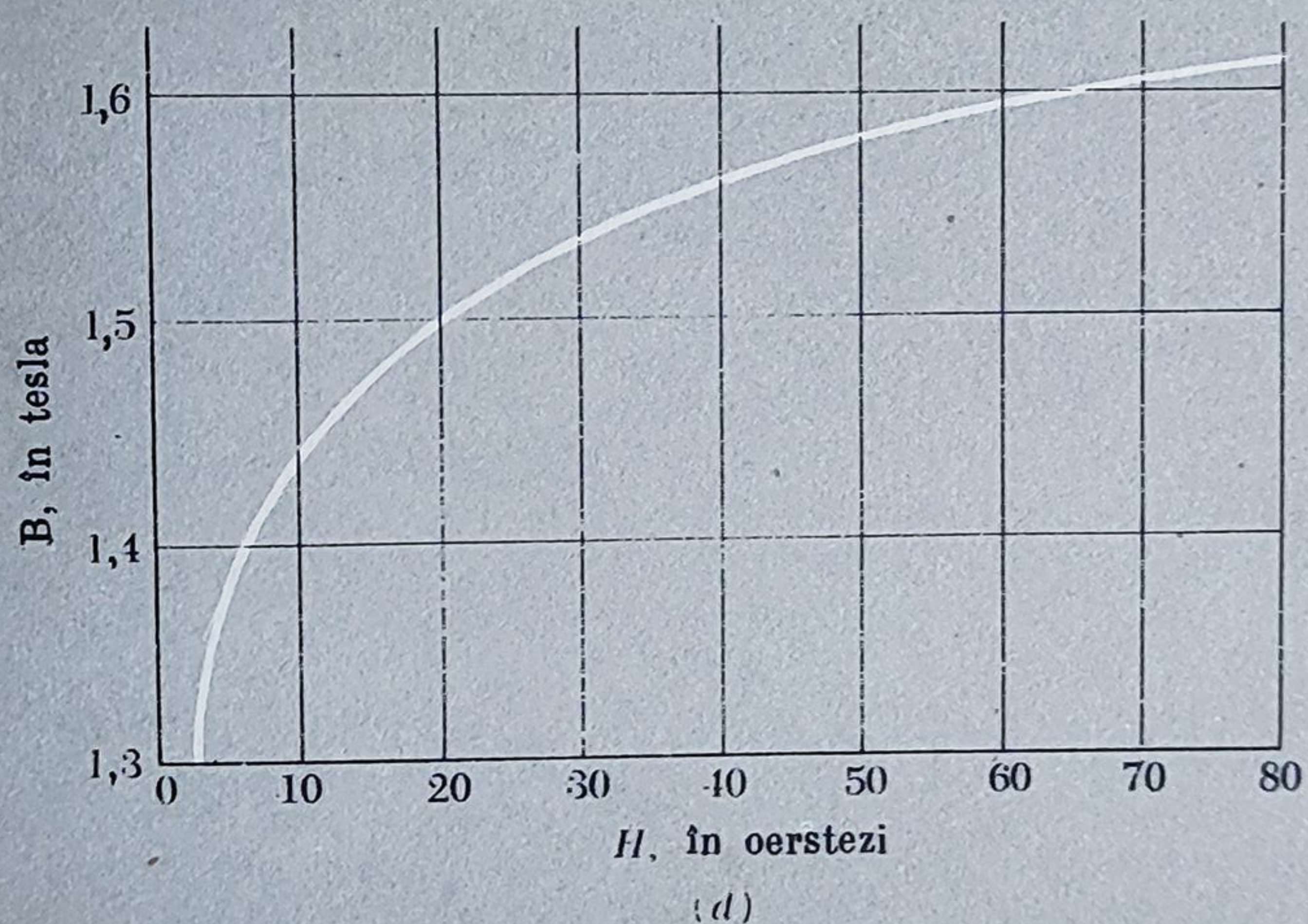
*ab.* (De fapt, nu este o aproximație rea, la intensități de câmp mai slabe, a neglija câmpul  $H$  în fier.) Pentru (II) presupuneți rezistivitatea cuprului  $\rho = 2,0 \times 10^{-8}$  ohm-m, și fiecare bobină să conțină  $N$  spire. Veți găsi că puterea necesară pentru un număr dat de amperi-spiră este independentă de  $N$ , adică, este aceeași pentru multe spire de sîrmă subțire sau cîteva spire de sîrmă groasă, presupunînd că secțiunea transversală totală



Figuri pentru problema 10.13



(c)



(d)

este fixată cum a fost precizat. De aceea proiectantul alege  $N$  și secțiunea transversală a conductorului pentru a potrivi magnetul la puterea intenționată pentru sursă.

R. (I) 270 000 amperi-spire;

(II) 82,5 kW;

(III)  $2 N = 1310$  spire (655 pe bobină),  $1,15 \text{ cm}^2$  secțiune transversală pentru conductor.



## Alte probleme și întrebări

Capitolul 1	422
Capitolul 2	426
Capitolul 3	430
Capitolul 4	440
Capitolul 5	447
Capitolul 6	449
Capitolul 7	455
Capitolul 8	460
Capitolul 9	461
Capitolul 10	468



## ALTE PROBLEME

### Capitolul 1

*Energia unui sistem de sarcini.*

**1.23.** Să considerăm configurațiile de sarcină construite după cum urmează: Puneți 10 unitate de sarcină pozitivă în centrul unui cerc și puneți  $N$  unități de sarcini negative, egal distanțate, pe cerc. Dacă sarcinile sînt instantaneu eliberate, se vor îndepărta sau vor convergă? Răspundeți la întrebare pentru  $N = 3, 4$  și  $5$ , prin calcularea energiei sistemului, și arătați, cel puțin într-un caz, că obțineți același răspuns prin calcularea forței rezultante asupra uneia din sarcinile negative.

*Picături încărcate de lichid.*

**1.24.** O picătură de apă de rază  $R$  poartă o sarcină electrică  $Q$  distribuită pe suprafața sa. Să presupunem că împărțim picătura în alte două picături mai mici de mărime egală și bine separate, împărțind sarcina în mod egal între ele. A mărit sau micșorat această energie potențială electrică? Cît de mult? Să ținem acum seama de energia asociată cu suprafața lichidului care este răspunzătoare pentru „tensiunea superficială” care dă picăturii forma sferică. Din cauza legăturilor intermoleculare, este nevoie de energie pentru a crea suprafață nouă, și la temperatură dată energia necesară per unitate de arie de suprafață creată este o constantă. Pentru apă este aproximativ  $5 \times 10^{-2}$  joule/m<sup>2</sup>. Să presupunem că avem de considerat împărțirea în două picături a uneia de rază  $10^{-2}$  cm. Cît de mare trebuie să fie sarcina purtată de picătură pentru ca variația în energie electrică să compenseze energia de legătură moleculară? Pentru a aprecia dacă aceasta este o sarcină mare sau nu, găsiți intensitatea cîmpului electric pe care l-ar produce, la suprafața picăturii. (Un cîmp de 30 000 volt/cm este un cîmp mare moderat care poate fi suportat în aer.)

*Întrebare pentru discuție.*

**1.25.** Gîndiți și discutați despre „dilema sarcinii punctuale”, care ar putea fi pusă astfel: o sarcină punctuală ideală are o energie potențială, sau o „energie proprie” infinită. Totuși o neglijăm totdeauna cînd însumăm energia unui sistem de sarcini punctuale. Orice energie care rămîne pentru totdeauna constantă poate fi neglijată, dar ce înseamnă, a spune că o cantitate infinită este constantă?



Folosirea superpoziției.

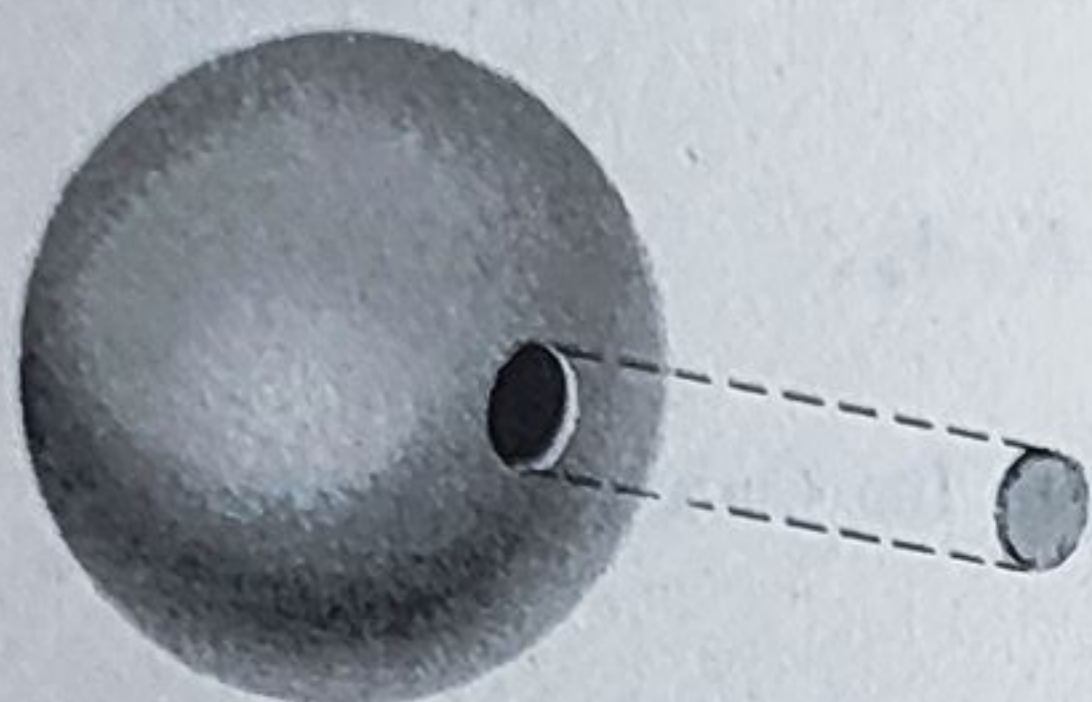


Fig. la problema 1.26

Provocare.

Forța asupra unui strat compus de sarcină.

O particulă elementară, lucrul cel mai apropiat de o sarcină punctuală pe care îl avem în natură, nu pare să arate nici un infinit incomod. Dar deoarece ea are mărime finită, ne-am putea aștepta ca câmpurile electrice de la alte surse să aibă un oarecare efect asupra structurii sale. Aceasta ar însemna, totuși, că energia proprie electrică a concentrării de sarcină nu ar fi întru totul aceeași în împrejurări diferite. În ce circumstanțe credeți că aceasta ar trebui să fie în realitate luată în considerare?

1.26. Figura arată o pătură sferică de sarcină, de rază  $a$  și densitate superficială  $\sigma$ , din care a fost îndepărtată o mică bucată circulară de rază  $b \ll a$ . Care este direcția și mărimea câmpului în punctul de mijloc al aperturii? Există două moduri de a obține răspunsul. Puteți integra peste distribuția de sarcină care rămâne pentru a însuma contribuțiile tuturor elementelor la câmpul în punctul în discuție. Sau, amintindu-vă principiul superpoziției, puteți gândi despre efectul punerii la loc a bucății îndepărtate, care este practic un mic disc. Observați legătura acestui rezultat cu discuția noastră a forței asupra unei sarcini superficiale — poate acesta este un al treilea mod în care ați putea ajunge la rezultat.

1.27. Folosirea întrucâtva asemănătoare a simetriei și superpoziției vă va permite să stabiliți următorul fapt curios. Un vas emisferic poartă pe suprafața sa o densitate de sarcină uniformă. Afirmăm că, în fiecare punct de pe suprafața imaginată care acoperă vasul ca o piele de tobă, câmpul electric este perpendicular pe suprafață.

1.28. Se învață mai mult inventând probleme care pot fi rezolvate folosind simetria și superpoziția decât rezolvându-le. Încercați să imaginați una.

1.29. Două straturi paralele plane de sarcină, de densitate  $\sigma_A$  și  $\sigma_B$  coulomb/m<sup>2</sup> respectiv, sînt separate printr-o distanță  $s$ , stratul  $A$  aflîndu-se la stînga stratului  $B$ , cînd privim situația dintr-o parte. Fie  $E_1$  intensitatea câmpului electric la stînga stratului  $A$ ,  $E_2$  câmpul electric dintre straturi, și  $E_3$  câmpul la dreapta stratului  $B$ . Acest câmp nu este doar acela datorat numai straturilor, dar include efectul altor surse care pot fi prezente. Presupunem că celelalte surse sînt destul de departe pentru a da un câmp uniform peste toată regiunea pe care o examinăm. Să presupunem acum că cele două straturi sînt legate mecanic într-un mod oarecare, astfel încît am putea măsura forța totală asupra combinației. Arătați că această forță, per unitate de arie a combinației — adică, pentru 1 m<sup>2</sup> din fiecare strat — este dată de

$$F = (\sigma_A + \sigma_B) \left( \frac{E_1 + E_3}{2} \right)$$

Acesta este un exemplu special de distribuție neuniformă de sarcină printr-o „placă”.



*Deducere generală a forței asupra unui strat de sarcină.*

**1.30.** Rezultatul demonstrat în problema 1.29 și formulat în § 2.7 poate fi dovedit în mod cu totul general. Fie distribuția de sarcină dintr-o placă plană dată de densitatea de sarcină de volum  $\rho(x)$  între  $x = 0$  și  $x = b$ , grosimea plăcii. Atunci densitatea de sarcină superficială totală, privind aceasta drept un strat de sarcină, este dată de

$$\sigma = \int_0^b \rho(x) dx.$$

Dacă  $E_x$  este componenta cîmpului electric perpendiculară pe placă, forța totală asupra plăcii (componenta  $x$ , de fapt; nu sîntem interesați în celelalte componente) este dată de

$$F_x = \int_0^b \rho E_x dx.$$

Legînd  $\rho$  și  $E_x$ , și aplicînd legea lui Gauss la un strat de grosime  $dx$ , arătați că

$$F_x = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_2^2 - E_1^2)$$

și de aici că

$$F_x = \frac{1}{2} (E_{1x} + E_{2x}) \sigma.$$

$E_1$  este intensitatea cîmpului în  $x = 0$ ,  $E_2$  cîmpul în  $x = b$ .

**1.31.** O distribuție de sarcină statică în formă de țigară este situată în originea coordonatelor. Dimensiunea lungă a „țigarei” se întinde de-a lungul axei  $z$ . Sarcina totală este  $q$ . Cîmpul în punctul  $P$  de pe axa  $z$  în afara distribuției de sarcină va fi numit  $E$ . Dacă  $q$  ar fi fost concentrată în origine, cîmpul în  $P$  ar fi  $E'$ . Este  $E$  mai mare, egal, sau mai mic decît  $E'$ ?

**1.32.** Știți că cîmpul electric la distanța  $r$  de la originea unei distribuții de sarcină sferică simetrică este aceeași ca și cînd toată sarcina care se află în interiorul sferei de rază  $r$  ar fi fost concentrată în origine.

(a) Depinde acest fapt de natura invers-pătratică a legii lui Coulomb sau numai de simetria sferică? Ar fi ea adevărată pentru o lege invers-cubică?

(b) O distribuție dată de sarcină simetric sferică de sarcină totală  $Q$  are tot  $Q$ -ul limitat la distanța  $r_0$  de la origine. Să presupunem că legea de forță dintre două sarcini ar fi fost *invers cubică* în loc de a fi legea normală invers pătratică. Cîmpul  $E$  în  $r$  (cu  $r > r_0$ ) este de comparat cu cîmpul  $E'$  care ar fi în  $r$  presupunînd că toată sarcina  $Q$  ar fi concentrată în origine. Este  $E$  mai mare decît, egal cu, sau mai mic decît  $E'$ ? Încercați să folosiți argumente calitative mai degrabă decît o demonstrație matematică.



O altă lume diferită.

**1.33.** Să ne imaginăm o lume în care există trei feluri de sarcină, în loc de două, cu sarcini de același fel care se atrag, sarcini contrare care se resping, într-o relație complet simetrică. Să numim tipurile de sarcină  $A$ ,  $B$  și  $C$ . Legea invers pătratică este urmată și superpoziția are loc întocmai ca în lumea noastră. Să presupunem că cele asemănătoare se resping exact de două ori mai puternic decât se atrag cele contrare. Adică, sarcini unitate egale de tipul  $A$  se resping una pe alta cu o forță de 1 newton la 1 cm, în timp ce o sarcină unitate  $A$  și o sarcină unitate  $B$  se atrag una pe alta cu o forță  $\frac{1}{2}$  newton. Arătați

că aceasta permite, în mod cu totul general, existența corpurilor neutre — adică a corpurilor care, deși conținând elemente încărcate, nu suferă în ansamblu nici o forță, și nu produc nici o forță, când sînt în apropierea unei sarcini de orice tip. Cum ați putea detecta diferența dintre acea lume și a noastră? Ar putea noțiunea de cîmp electric să fie generalizată pentru a fi utilă în acea lume?

Experiență implicînd cîmpul unei linii de sarcină.

**1.34.** Într-un microscop electronic un fascicul de electroni energetici, accelerați mai întîi printr-o diferență de potențial de  $V_0$  volți trece de un fir subțire încărcat întins la unghi drept față de direcția originală a fasciculului de electroni. Acest fir poartă o sarcină negativă, în mărime de  $\lambda$  coulomb pe metru de lungime. Cîmpul firului este relativ slab, astfel încît traiectoriile electronilor sînt puțin afectate. Cunoscînd aceasta puteți găsi forța asupra unui electron dat ca funcție de timp, într-o primă aproximație, presupunînd că acesta urmează traiectoria sa dreaptă la viteză constantă. Apoi folosiți rezultatul pentru a calcula componenta impulsului transversal primit de electron, la trecere, și de aici devierea unghiulară  $\alpha$  pe care o suferă traiectoria. Veți găsi rezultatul destul de remarcabil că deflecția unghiulară este independentă de cît de departe de fir a trecut traiectoria electronului. Adică, cîmpul electric al firului are un efect asupra traiectoriilor electronilor ca acela al unei prisme slabe asupra razelor de lumină. De fapt, chiar un astfel de aranjament a fost folosit pentru a demonstra echivalentul electro-optic al unui fenomen de interferență faimos în optica clasică, experiența de interferență cu biprismă Fresnel [Möllendstedt și Düker, *Zeitschrift für Physik* 145, 377 (1956)].

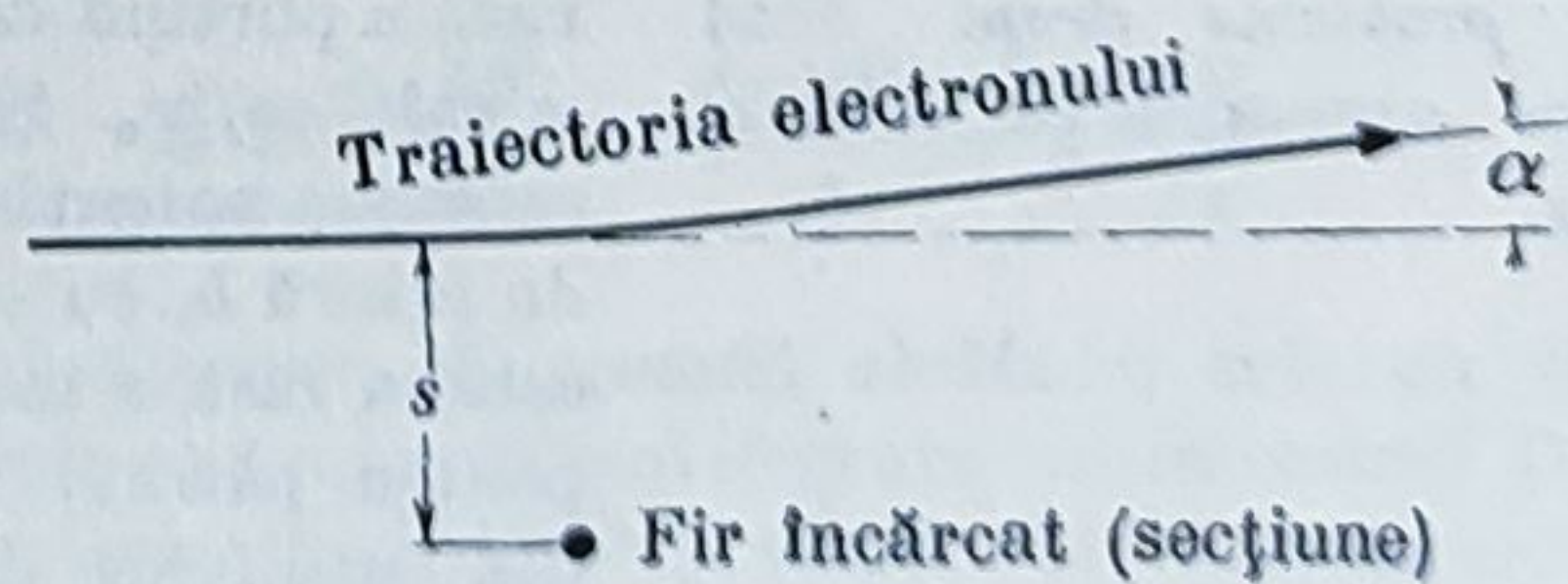


Fig. la problema 1.34.



**2.18.** Un cilindru circular gol, de rază și lungime  $b$ , cu capete deschise, are o sarcină totală  $Q$  distribuită uniform pe suprafața sa. Care este diferența de potențial între un punct de pe axă la un capăt și punctul median de pe axă? Arătați prin schițarea câtorva linii de câmp cum credeți că va arăta câmpul acestui obiect.

*Întrebare: Sistemul este mai general decât acela în problema 2.10.*

*Rezultat: Ilustrează un principiu general important asupra distribuției de sarcină.*

**2.19.** Avem două sfere metalice, de raze  $R_1$  și  $R_2$ , foarte departe una de alta, în comparație cu aceste raze. Fiind dată o cantitate totală de sarcină  $Q$ , pe care avem să o împărțim între sfere, cum ar trebui ea împărțită încît să facă energia potențială a distribuției de sarcină rezultante cît mai mică posibil? Pentru a răspunde la aceasta, calculați mai întîi energia potențială a sistemului pentru o împărțire arbitrară a sarcinii,  $q$  pe una și  $Q-q$  pe alta. Apoi minimizați energia ca funcție de  $q$ . Puteți presupune că orice sarcină pusă pe una dintre aceste sfere se distribuie uniform pe sferă, cealaltă sferă fiind destul de departe încît influența sa să poată fi neglijată. Cînd ați găsit împărțirea optimă a sarcinii, arătați că în acea împărțire diferența de potențial dintre sfere este zero. (Deci ele ar putea fi legate printr-un fir, și nu ar apărea nici o redistribuire. Acesta este un exemplu particular al unui principiu foarte general pe care îl vom întîlni în cap. 3: pe un conductor, sarcina se distribuie încît să minimizeze energia potențială totală a sistemului.)

*Altă privire la câmpul din Prob. 2.1.*

**2.20.** Câmpul precizat în Prob. 2.1, anume  $E_x = 6xy$ ,  $E_y = 3x^2 - 3y^2$ ,  $E_z = 0$ , are o relație cu câmpul din figura 2.2. Pentru a o găsi, scrieți potențialul  $\phi$ , dezvoltat în Prob. 2.1, în coordonate polare cilindrice  $r, \theta$ , unde  $r^2 = x^2 + y^2$  și  $\theta = \text{tg}^{-1}(y/x)$ . Schițați cîteva echipotențiale și cîteva linii de câmp.

**2.21.** Să considerăm o regiune sferică care conține o sarcină punctuală  $q$  în interiorul, dar nu în centrul ei. Este adevărat că potențialul în centru este egal cu media potențialului pe suprafața sferei? Contrazice aceasta afirmația despre funcții armonice făcută în § 2.13?

*Exercițiu: Folosirea soluției unei probleme drept bază pentru aproximarea soluției alteia.*

**2.22.** Am găsit că potențialul la centrul unui disc de rază  $a$  purtînd densitatea de sarcină superficială uniformă  $\sigma$  este  $\sigma a/2\epsilon_0$ . Știind aceasta, să presupunem că vrem să estimăm potențialul la centrul unui pătrat uniform încărcat de latură  $b$ , cu o precizie de un procent. Cum l-ați putea estima fără a încerca să rezolvați problema potențialului pentru pătrat? Puteți fixa limite asupra erorii posibile din estimarea dumneavoastră?



Răspunsul exact pentru pătratul încărcat.

2.23. Nu este greu de calculat exact potențialul la centrul stratului pătratic de sarcină uniformă, discutat în problema 2.22. Un bun mod de a efectua integrarea este sugerat în figură. Mai întâi găsiți contribuția la potențialul în  $C$  de la fișia îngustă de lărgime  $dx$  care se întinde de la  $y = -x$  la  $y = x$ . După aceasta, este ușor de integrat după  $x$  de la 0 la  $b/2$ , și a obține contribuția acelui sfert de pătrat. Potențialul zero este, desigur, la infinit.

$$R: \varphi_C = \frac{\sigma b}{\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

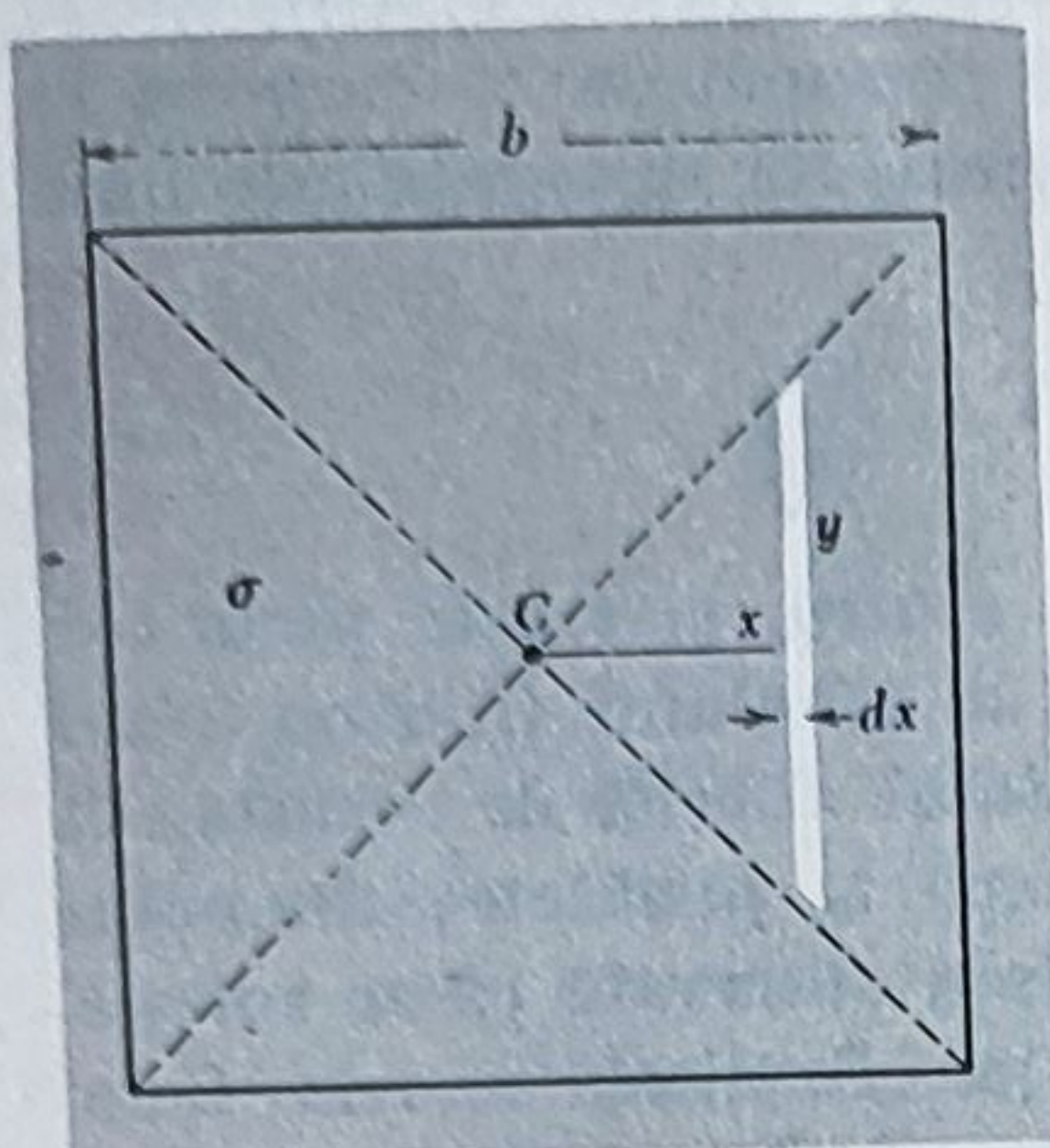


Fig. la problema 2.23

Se arată că rot  $\mathbf{F}$  este în realitate un vector.

2.24. Cum putem fi siguri că numărul definit drept  $\lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{a_i}$  din ecuația 2.76 reprezintă într-adevăr o componentă a unui vector? Întrebarea poate fi pusă în termeni concreți astfel: luând succesiv  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  și  $\hat{z}$  drept direcții

pentru  $\hat{n}$ , determinăm, pentru un anumit  $\mathbf{F}$  și un anumit punct din spațiu, trei numere. Acestea au fost date drept componentele unui vector. Fiind acum sceptici, le vom scrie acum în ghilimele, notându-le „ $A_x$ “, „ $A_y$ “ și „ $A_z$ “.

Dacă alegem acum o altă direcție  $\hat{n}$ , și determinăm raportul limită al circulației la arie pentru o suprafață astfel orientată, primim totdeauna un număr egal cu  $\hat{n} \cdot (\hat{x} „A_x” + \hat{y} „A_y” + \hat{z} „A_z”)$ ? Dacă este așa, putem îndepărta semnele citării și să spunem că procedeul nostru a produs într-adevăr un vector. Vedeți dacă o puteți dovedi considerând circulația în jurul fiecăreia din cele patru fețe ale unui mic tetraedru, ca acela arătat în figura 2.18. Ce se întâmplă cu suma celor patru circulații? Ce se întâmplă cu suma vectorilor de arie?

„Nu tot ce strălucește este aur“.

2.25. Divergența unei funcții vectoriale  $\mathbf{F}$  este un scalar, după cum știm. Să presupunem că încercăm să definim un vector, diferit de rotor, în acest mod:

$$\mathbf{G} = \hat{x} \frac{\partial F_x}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial F_y}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Putem să spunem că această alcătuire este un vector, sau trebuie să-l numim mai degrabă un impostor? (Vedeți cum se comportă când roțiți coordonata față de care sînt



luate componentele. Este suficient pentru a dezvoltării esențialul de a considera o rotație de  $90^\circ$  în jurul axei  $z$ . Noile coordonate sînt atunci legate de cele vechi astfel:

$$\hat{x}' = \hat{y}, \hat{y}' = -\hat{x}, F'_x = F_y \text{ etc.};$$

O întrebare implicînd rotorul unui câmp de viteze.

**2.26.** Un canal de irigare are laturi paralele drepte la depărtarea de  $2b$ . La suprafața apei din canal viteza apei este cea mai mare în mijlocul curentului, descrescînd la zero pe fiecare margine. Să presupunem că curgerea se întîmplă să fie astfel încît viteza de suprafață este dată aproximativ de

$$v = v_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

unde  $y$  este distanța de la centru, și  $v$  este peste tot orientat în sensul de curgere al canalului. (Într-un canal real curgerea ar putea fi cu totul diferită de aceasta.) O așchie de lemn plutind pe apă la jumătatea drumului dintre centru și o margine este observată că se rotește în timp ce se deplasează în jos. Explicați aceasta. Cum este aceasta corelat cu problema 2.16 (a)? Cît de mult în jos se va deplasa așchia în timp ce se rotește cu  $360^\circ$ ?

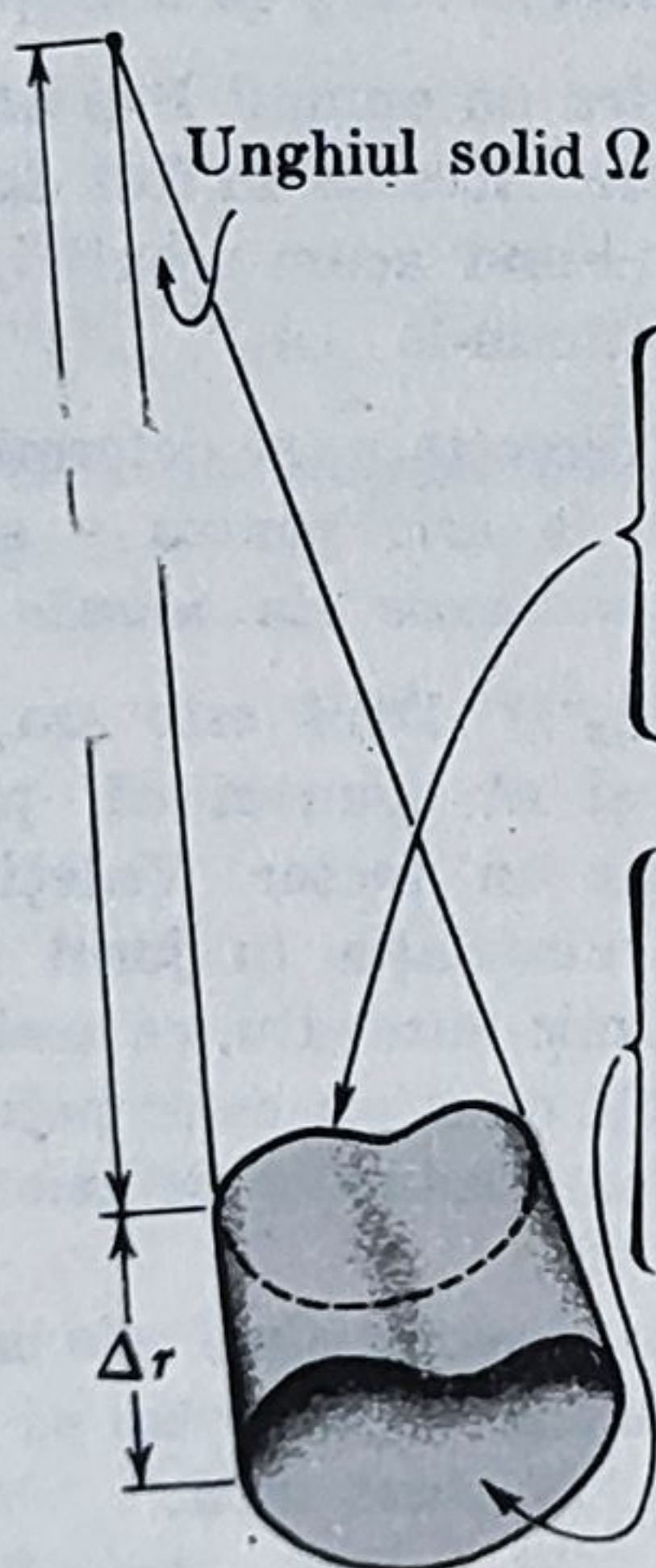


Fig. la problema 2.27

$$\begin{cases} \text{Aria} = (-\hat{r})\Omega r^2 \\ \nabla V = \hat{r} \left( \frac{dV}{dr} \right)_r \\ \text{Flux exterior} = -\Omega r^2 \left( \frac{dV}{dr} \right)_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Aria} = \hat{r}\Omega(r+\Delta r)^2 \approx \hat{r}\Omega(r^2 + 2r\Delta r) \\ \nabla V = \hat{r} \left( \frac{dV}{dr} \right)_{r+\Delta r} \approx \hat{r} \left[ \left( \frac{dV}{dr} \right)_r + \left( \frac{d^2V}{dr^2} \right) \Delta r \right] \\ \text{Flux exterior} = \Omega(r^2 + 2r\Delta r) \left[ \left( \frac{dV}{dr} \right)_r + \left( \frac{d^2V}{dr^2} \right) \Delta r \right] \end{cases}$$

$$\text{Flux exterior net} = \Omega \left( 2r\Delta r \frac{dV}{dr} + r^2 \Delta r \frac{d^2V}{dr^2} \right)$$

$$\text{Volum} = \Omega r^2 \Delta r$$

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\text{flux}}{\text{volum}} = \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{d^2V}{dr^2} = \nabla \cdot (\nabla V(r)) = \nabla^2 V(r)$$



Caz special:  $\nabla^2$  în coordonate sferice.

2.27. Această problemă vă va introduce în operatorul Laplace așa cum apare în coordonate sferice în cazul special al funcțiilor cu simetrie sferică. Fie  $V$  o funcție doar de  $r$ :  $V = V(r)$ . Atunci care este  $\text{div}(\text{grad } V)$ , sau  $\nabla \cdot (\nabla V)$ , pe care am numit-o  $\nabla^2 V$ ? S-a explicat în § 2.3 că în acest caz  $\nabla V$  este simplu  $\vec{r} dV/dr$ , astfel încât avem de considerat tocmai divergența acestei funcții vectoriale. Punctele principale ale deducerii lui  $\nabla \cdot (\nabla V)$  sînt schițate în figură.

(a) Studiați această deducere pînă cînd înțelegeți pașii și puteți efectua argumentarea de care ar putea fi nevoie dacă ați explica-o altcuiva. Observați unde au fost neglijat termeni de ordinul doi în  $\nabla r$ .

(b) Arătați că rezultatul se poate scrie

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rV(r)).$$

(c) Dacă tot ce știm despre un anumit  $V(r)$  este că  $\nabla^2 V(r) = 0$ , ce putem spune despre  $V$ ?

(d) Arătați că potențialul „Yukawa“,  $V(r) = (1/r)e^{-\lambda r}$ , unde  $\lambda$  este o constantă, satisface ecuația  $\nabla^2 V - \lambda^2 V = 0$ .

Potențialul și câmpul de forțe Yukawa.

2.28. O particulă este atrasă spre un punct fix printr-o forță care este totdeauna radială, cu o mărime care este funcție doar de  $r$ , distanța radială:  $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} f(r)$ . Convingeți-vă că într-un astfel de câmp integrala curbilinie în jurul oricărei curbe închise se anulează, implicînd  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ . Atunci trebuie să fie posibil a reprezenta  $\mathbf{F}$  ca gradientul unei funcții de potențial  $V(r)$ . (Aceasta ne reamintește faptul că câmpul electrostatic poate fi dedus dintr-un potențial nu se datorează proprietății invers pătratice a câmpului unei sarcini elementare, dar numai faptului că câmpul unui element de sarcină este un câmp central și superpoziția are loc.) Potențialul Yukawa menționat în Problema 2.27 este asociat cu un tip particular de câmp neinvers pătratic, unul care este important în fizica nucleară și în fizica particulelor elementare. Care este forța asociată cu potențialul Yukawa scris în forma  $V = Ce^{-\lambda r}/r$ , unde  $C$  și  $\lambda$  sînt constante? Făcînd  $\lambda \rightarrow 0$  obținem din nou potențialul familiar  $1/r$  al câmpului electrostatic. Arătați că dacă  $\lambda > 0$ , forța la orice distanță pentru un  $C$  dat este mai mică decît dacă  $\lambda = 0$ . Cantitatea  $1/\lambda$  are dimensiunile de lungime, și este adesea numită „raza de acțiune“ a forței. Ce ar trebui să ia locul ecuației lui Poisson pentru surse care produc astfel de câmpuri?

2.29. Raționamentul prin care am arătat că un câmp electrostatic nu poate menține o particulă încărcată în echilibru stabil depinde în esență de natura invers-pătratică a forței Coulomb. Presupuneți că forța dintre sarcini variază ca  $r^{-1,5}$  și încercați să imaginați un aranjament de sarcini care va menține o sarcină pozitivă în echilibru stabil. Idem pentru forța  $\sim r^{-2,5}$ .



*Energia înmagazinată în câmpul a două sarcini concentrate egale.*

**2.30.** Să considerăm câmpul electric a doi protoni la distanța  $b$  unul de altul. După ecuația 2.36 (pe care am enunțat-o dar nu am demonstrat-o) energia potențială a sistemului ar trebui să fie dată de

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \mathbf{E}^2 dv = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 dv = \\ = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \mathbf{E}_1^2 dv + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \mathbf{E}_2^2 dv + \epsilon_0 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dv$$

unde  $\mathbf{E}_1$  este intensitatea câmpului uneia dintre particule și  $\mathbf{E}_2$  pentru cealaltă. Prima dintre cele trei integrale din dreapta ar putea fi numită „energie proprie electrică” a unui proton; o proprietate intrinsecă a particulei, care depinde de mărimea și structura protonului. Am neglijat totdeauna o astfel de energie în calculul energiei potențiale a unui sistem de sarcini, prin presupunerea că ea este constantă; același lucru se petrece pentru cea de-a doua integrală. A treia integrală implică distanța dintre sarcini. Dezvoltați cea de-a treia integrală în niște coordonate convenabile, și arătați, fără a o evalua de fapt, că trebuie să se poată exprima ca  $Ce^2/4\pi\epsilon_0 b$ , unde  $C$  este o constantă pur numerică, valoarea unei integrale definite care implică doar mărimi adimensionale. Dacă ecuația 2.36 este corectă ce valoare trebuie să aibă  $C$ ? Știm că ecuația 2.36 este corectă într-un caz special, acela al sarcinii superficiale sferice pe care l-am lucrat în detaliu. Vedeți dacă puteți transforma aceasta într-o dovadă a corectitudinii ecuația 2.36 printr-un raționament care folosește superpoziția. Dacă este așa, veți fi stabilit incidental valoarea integralei dumneavoastră definite. (Dacă vă stimulează rezolvarea unei integrale definite, ați putea încerca să o evaluați pe aceasta, sau să o reduceți la una pe care o puteți găsi într-o tabelă de integrale definite. Nu este una ușoară.)

### Capitolul 3

*O observație generală despre forțele electrostatice.*

**3.18.** (a) Arătați că pătratul unei diferențe de potențial  $4\pi\epsilon_0(\Phi_2 - \Phi_1)^2$  are aceleași dimensiuni ca o *forță*. Aceasta ne spune că forțele electrostatice dintre corpuri vor fi în mare parte determinate, ca ordin de mărime, de diferențele de potențial implicate. Care este ordinul de mărime al forței la care vă așteptați cu o diferență de potențial de 1 volt între două obiecte diferite? (b) Diferențele de potențial practic realizabile sînt destul de sever limitate, din motive care nu au nimic de-a face cu structura materiei. Cea mai înaltă diferență de potențial obținută de om este aproximativ  $10^7$  volți, obținută printr-un generator electrostatic Van de Graaff operînd la presiune înaltă. (Acceleratorii de giga-electronvolt nu implică



diferențe de potențial de aceea mărime.) Cite kilograme-forță sînt de așteptat să fie asociate cu un megavolt pătratic? Aceste considerații vă pot sugera de ce motoarele electrostatice nu și-au găsit multe aplicații.

**3.19.** Imaginați-vă planul  $xy$ , planul  $xz$  și planul  $yz$  făcute din metal și sudate împreună la intersecții. O sarcină punctuală  $Q$  este situată la distanța  $d$  de la fiecare dintre plane. Descrieți printr-o schiță configurația „sarcinilor imagine” de care aveți nevoie pentru a satisface condițiile la limită. Care este direcția și mărimea forței care acționează asupra sarcinii  $Q$ ?

Un condensator cilindric.

**3.20.** (a) Găsiți capacitatea unui condensator care constă din doi cilindri coaxiali, de raze  $a$  și  $b$ , și lungime  $L$ . Presupuneți  $L \gg b - a$ , astfel încît corecțiile de capăt pot fi neglijate. Verificați rezultatul arătînd că dacă spațiul dintre cilindri,  $b - a$ , este foarte mic în comparație cu raza, formula dumneavoastră se reduce la aceea care ar putea fi obținută prin folosirea formulei pentru condensatorul plan-paralel.

(b) Un cilindru de 5,0 cm diametru exterior atîrnă, cu axa sa verticală, de unul din brațele unei balanțe. Porțiunea de jos a cilindrului suspendat este înconjurată de un cilindru staționar, coaxial, cu diametrul interior 7,5 cm. Calculați mărimea forței care tinde să atragă cilindrul suspendat în jos cînd diferența de potențial dintre cei doi cilindri este 5 kV.

Posibilitatea unui salt de potențial la suprafața unui conductor. (De fapt, ceva asemănător există la suprafața unui conductor; este ceea ce reține electronii de conducție să se împrăștie!).

**3.21.** În § 3.3 am trecut destul de ușor peste problema valorii absolute a potențialului în interiorul materiei conductoare. A fost suficient pentru raționamentul nostru să nu existe nici un cîmp în interiorul materialului, adică, potențialul să fie constant. În realitate poate exista un salt de potențial la interfața dintre doi conductori în vid, cum se indică în figură. Arătați că un astfel de salt  $\Delta\phi$ , dacă este același peste toată suprafața-frontieră, nu modifică concluzia noastră că dacă nu există nici un cîmp electric în interiorul mediului conductor, nu poate apare nici o componentă tangențială a lui  $E$  imediat în afară în vid. Puteți folosi faptul că integrala curbilinie a lui  $E$  în jurul oricărei curbe închise.

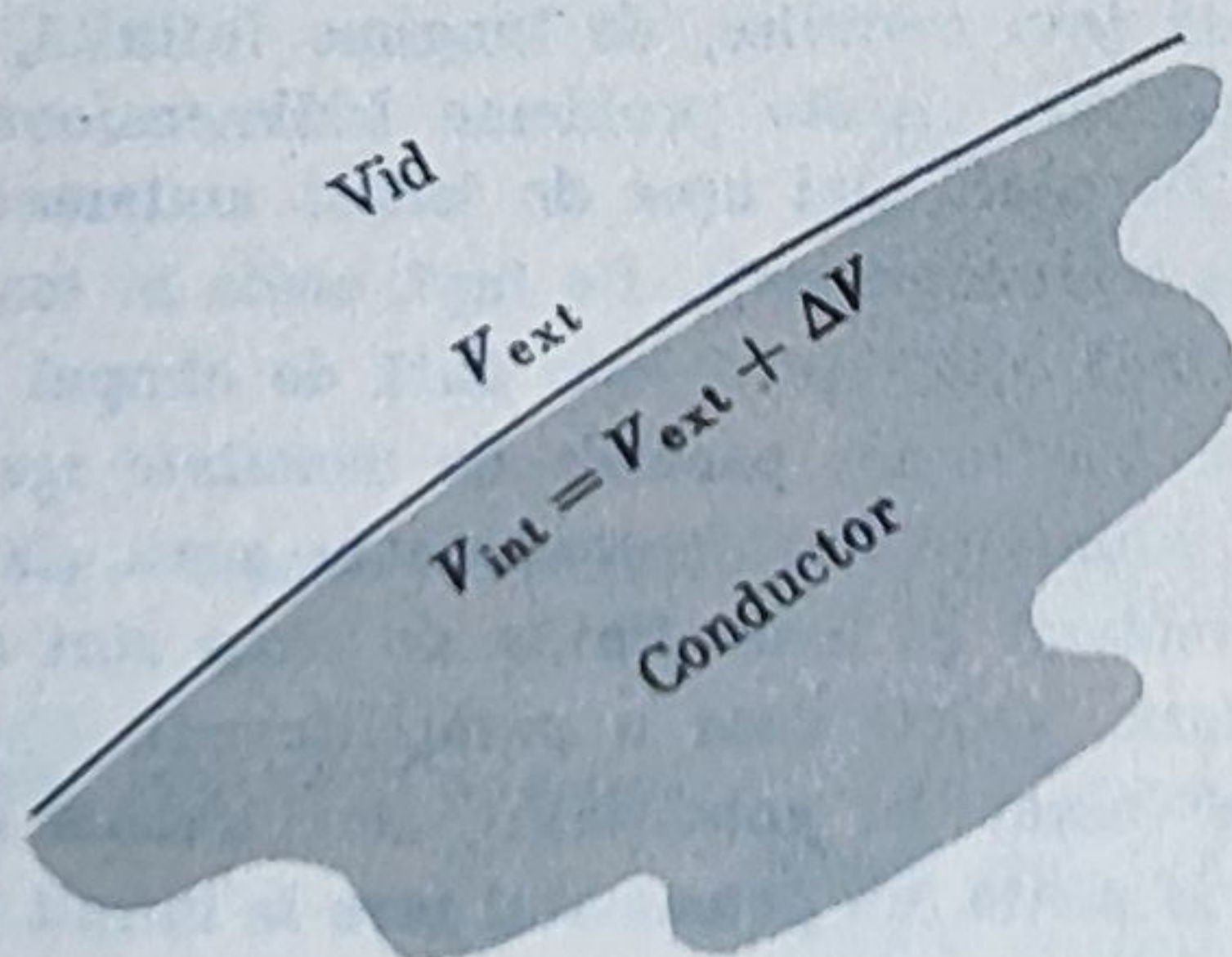


Fig. la problema 3.21.



diferențe de potențial de aceea mărime.) Câte kilograme-forță sînt de așteptat să fie asociate cu un megavolt pătratic? Aceste considerații vă pot sugera de ce motoarele electrostatice nu și-au găsit multe aplicații.

**3.19.** Imaginați-vă planul  $xy$ , planul  $xz$  și planul  $yz$  făcute din metal și sudate împreună la intersecții. O sarcină punctuală  $Q$  este situată la distanța  $d$  de la fiecare dintre plane. Descrieți printr-o schiță configurația „sarcinilor imagine” de care aveți nevoie pentru a satisface condițiile la limită. Care este direcția și mărimea forței care acționează asupra sarcinii  $Q$ ?

Un condensator cilindric.

**3.20.** (a) Găsiți capacitatea unui condensator care constă din doi cilindri coaxiali, de raze  $a$  și  $b$ , și lungime  $L$ . Presupuneți  $L \gg b - a$ , astfel încît corecțiile de capăt pot fi neglijate. Verificați rezultatul arătînd că dacă spațiul dintre cilindri,  $b - a$ , este foarte mic în comparație cu raza, formula dumneavoastră se reduce la aceea care ar putea fi obținută prin folosirea formulei pentru condensatorul plan-paralel.

(b) Un cilindru de 5,0 cm diametru exterior atîrnă, cu axa sa verticală, de unul din brațele unei balanțe. Porțiunea de jos a cilindrului suspendat este înconjurată de un cilindru staționar, coaxial, cu diametrul interior 7,5 cm. Calculați mărimea forței care tinde să atragă cilindrul suspendat în jos cînd diferența de potențial dintre cei doi cilindri este 5 kV.

*Posibilitatea unui salt de potențial la suprafața unui conductor. (De fapt, ceva asemănător există la suprafața unui conductor; este ceea ce reține electronii de conducție să se împrăștie!).*

**3.21.** În § 3.3 am trecut destul de ușor peste problema valorii absolute a potențialului în interiorul materiei conductoare. A fost suficient pentru raționamentul nostru să nu existe nici un cîmp în interiorul materialului, adică, potențialul să fie constant. În realitate poate exista un salt de potențial la interfața dintre doi conductori în vid, cum se indică în figură. Arătați că un astfel de salt  $\Delta\phi$ , dacă este același peste toată suprafața-frontieră, nu modifică concluzia noastră că dacă nu există nici un cîmp electric în interiorul mediului conductor, nu poate apare nici o componentă tangențială a lui  $E$  imediat în afară în vid. Puteți folosi faptul că integrala curbilinie a lui  $E$  în jurul oricărei curbe închise.

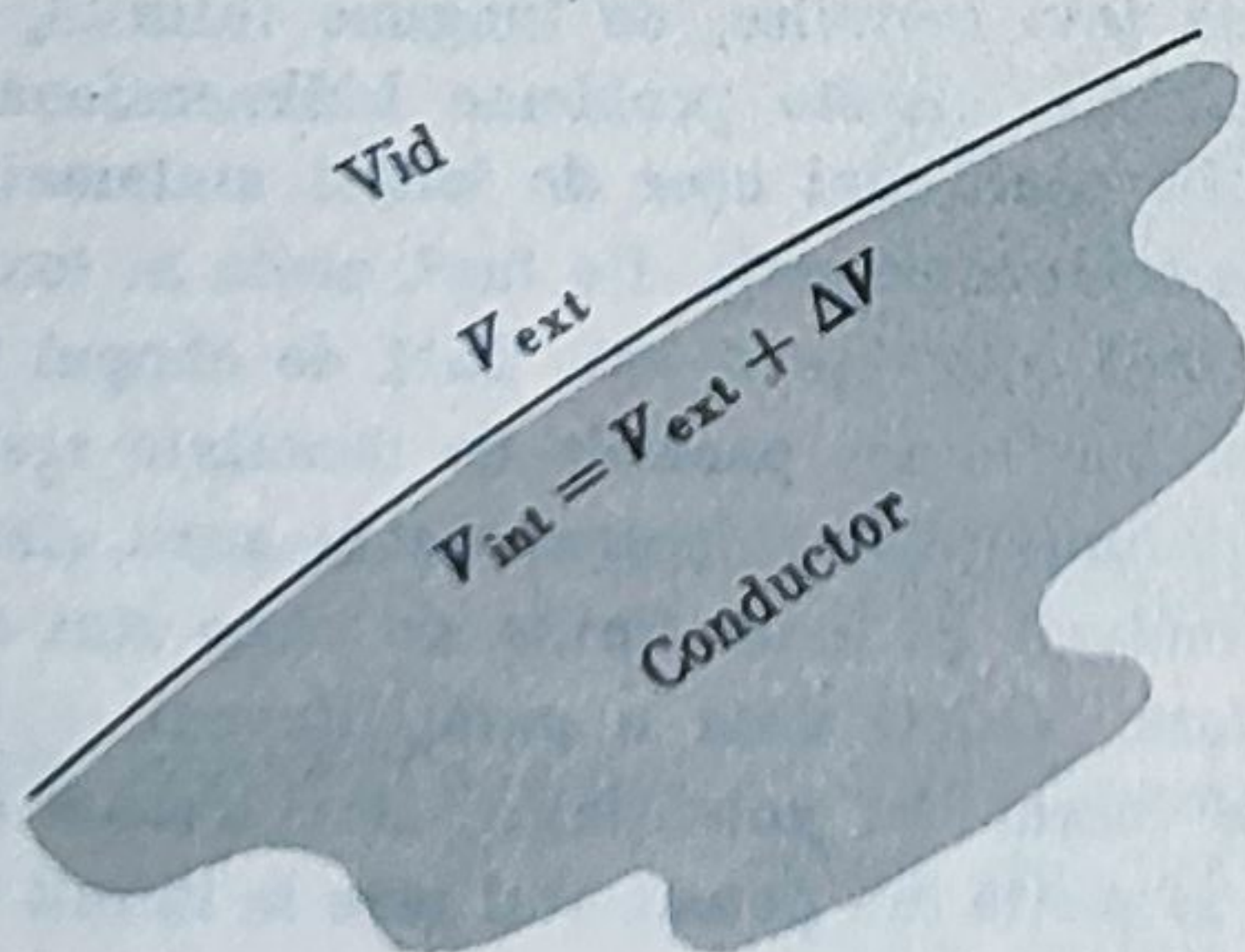


Fig. la problema 3.21.



Un mod de a analiza sistemul unei sfere conductoare și unei sarcini punctuale.

**3.22.** Această problemă este o ilustrare a metodei de „potrivire a frontierelor la soluție” pe care am explicat-o în discuția noastră a sarcinii punctuale în fața planului. De fapt rezultatul pe care urmează să-l dezvoltăm este poate cea mai cunoscută realizare a acestei tehnici destul de limitate.

(a) Să considerăm două sarcini punctuale de semn opus și mărimi *neegale*. Să presupunem că cea de mărime mai mare este pozitivă și să o situăm în originea coordonatelor. Situați cealaltă sarcină pe axa  $x$  la  $x = b$ . Mai întâi, determinați două puncte pe axa  $x$  unde potențialul  $\varphi$  este zero, nesocotind punctele  $x = +\infty$  și  $x = -\infty$ . Acum să considerăm o sferă cu centrul pe axa  $x$  care trece prin aceste două puncte. Dovediți că potențialul este de asemenea zero pe toate punctele acestei suprafețe sferice. Există și alte suprafețe echipotențiale sferice? Cărei probleme, implicând o sarcină punctuală și o sferă conductoare, i-am găsit soluția?

(b) Nu sîntem încă gata să tratăm orice problemă cu o sarcină punctuală și o sferă conductoare, deoarece mărimea sarcinii punctuale, mărimea sarcinii pe sferă și raportul razei sferei la distanța pînă la sarcina punctuală ar putea să nu fie compatibil cu cîmpul așa cum îl avem pînă acum. De exemplu, cum ați obține cîmpul unei sarcini punctuale  $q$  la o oarecare distanță de la o sferă care poartă sarcina totală zero? Acesta se *poate* obține printr-un pas adițional simplu, dacă vă veți gândi folosind superpoziția. Încercați toate acestea pe un exemplu particular: O sarcină punctuală de  $3,3 \cdot 10^{-8}$  Coulombi este situată la 20 cm de la centrul unei sfere metalice de rază 10 cm și sfera este neîncărcată, adică, sarcina sa totală este zero. Care este intensitatea cîmpului electric la suprafața sferei în punctul cel mai apropiat de sarcina punctuală și în punctul diametral opus? Dacă obțineți răspunsurile corecte, și înțelegeți cum le-ați obținut, puteți considera că stăpîniți metoda numită „inversiunea în sferă”.

R. 75 volți/cm; 11,6 volți/cm

Cilindri circulari paraleli; o clasă de probleme electrostatice bidimensionale care pot fi imediat rezolvate.

**3.23.** O problemă cu valori la limită *bidimensională* este aceea a doi cilindri conductori circulari paraleli, ca de exemplu două țevi metalice, de lungime infinită, și la potențiale diferite. Aceste probleme bidimensionale se întîmplă să fie mult mai ușor de tratat matematic decît problemele tridimensionale. De fapt, cheia la toate problemele de tipul „două țevi” este dată de cîmpul în jurul a două sarcini lineare paralele de densitate egală și opusă. Toate suprafețele echipotențiale în acest cîmp sînt cilindrii circulari! Și toate liniile de cîmp sînt de asemenea circulare. Vedeți dacă o puteți dovedi. Este cel mai ușor de lucrat cu potențialul, dar trebuie să observați că nu se poate lua potențialul zero la infinit în



sisteme bidimensionale. Fie potențialul zero pe linia la mijlocul dintre cele două sarcini liniare, adică în origine în diagrama de secțiune transversală. Potențialul în orice punct este suma potențialelor calculate pentru fiecare sarcină liniară separat. Aceasta vă va conduce repede la descoperirea că potențialul este simplu proporțional cu  $\ln(r_2/r_1)$  și este în consecință constant pe o curbă descrisă de un punct ale cărui distanțe de la două puncte sînt în raport constant. Faceți o schiță arătînd cîteva din echipotențiale.

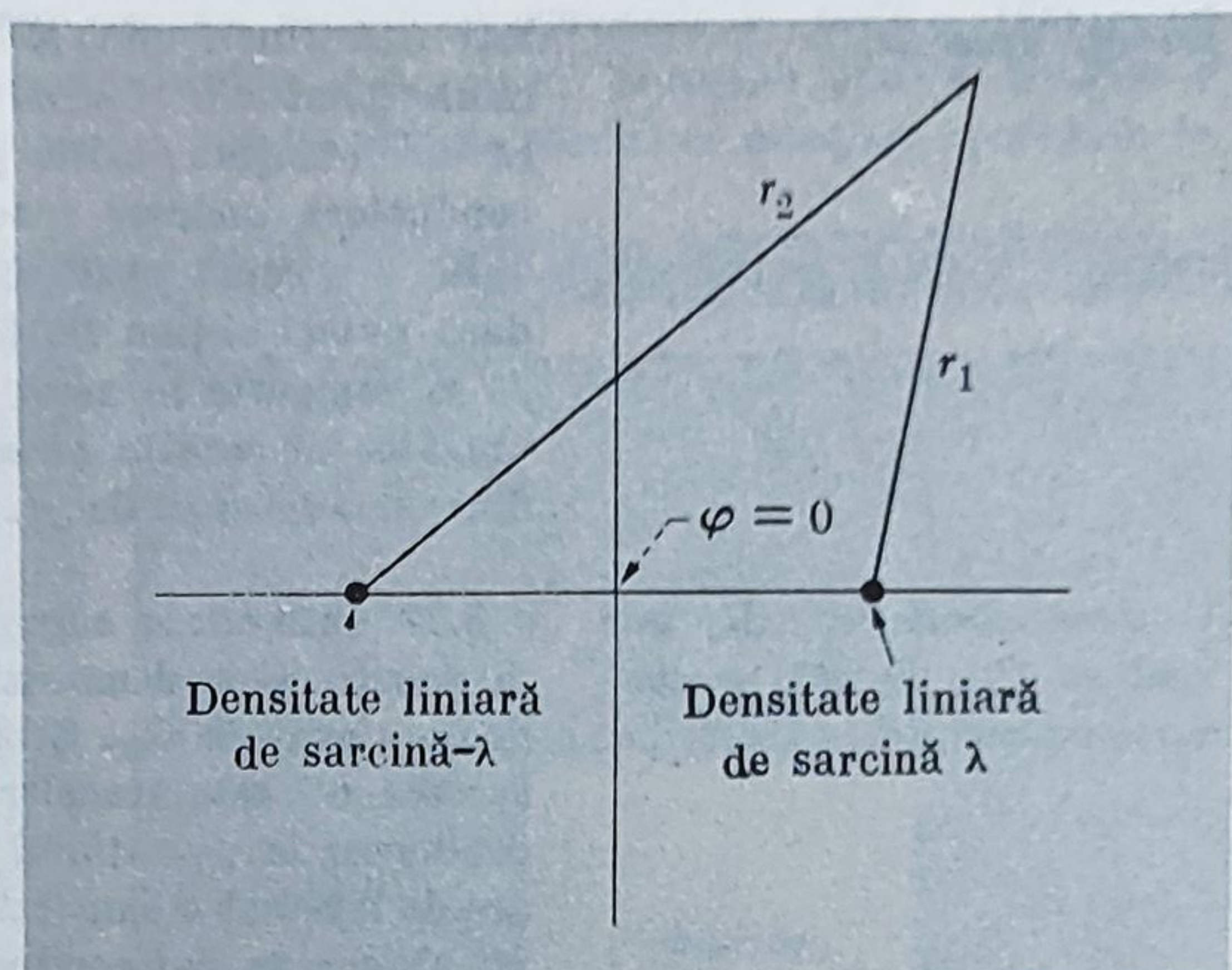


Fig. la problema 3.23.

*Studiu al câmpului de quadrupol.*

**3.24.** Câmpul electric arătat în figura 2.2 are aplicații practice importante la focalizarea fasciculelor de particule încărcate. El este numit un câmp de quadrupol. Care este ecuația pentru o suprafață echipotențială și cum arată ea? Descrieți cum ați putea produce o bună aproximație la acest câmp într-o regiune limitată, desigur — folosind conductori la diferite potențiale.

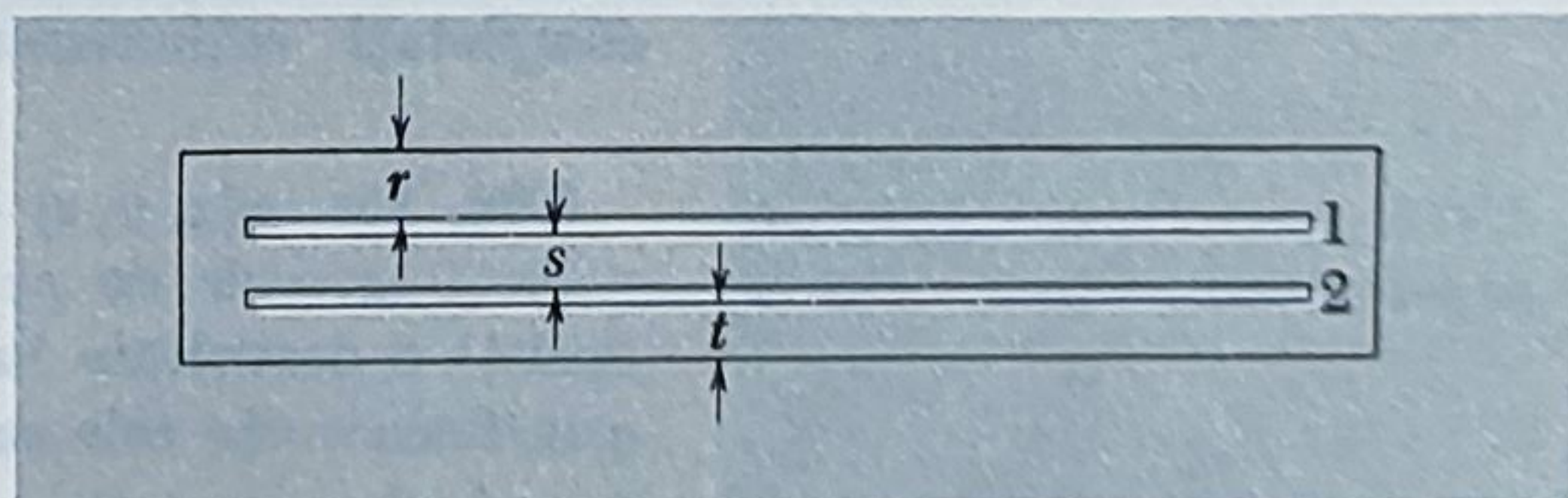


Fig. la problema 3.25

*Exemplu: coeficienți de capacitate.*

**3.25.** Figura arată în secțiune transversală o cutie plană metalică în care se află două plăci plane, 1 și 2, fiecare de arie  $A$ . Diferitele distanțe care separă plăcile



una de alta și de fețele de sus și de jos ale cutiei, notate  $r$ ,  $s$  și  $t$  în figură, sînt presupuse mici în comparație cu lățimea și lungimea plăcilor, astfel încît neglijarea cîmpurilor de margine la estimarea sarcinilor pe plăci va fi o aproximație bună. În această aproximație, calculați coeficienții de capacitate  $C_{11}$ ,  $C_{22}$  și  $C_{12}$ . Ați putea să calculați direct și  $C_{21}$ , pentru a vedea că iese egal cu  $C_{12}$  cum se afirmă prin teorema generală discutată în problema 3.27.

*Coeficienți de capacitate: proprietăți generale.*

**3.26.** Este posibil a avea conductori aranjați sau modelați astfel încît unul sau mai mulți coeficienți de capacitate „mutuală”  $C_{jk}$ , să fie pozitivi? Aceasta ar însemna că un potențial pozitiv pe conductorul  $j$ , cu toți ceilalți conductori, inclusiv conductorul  $k$  puși la pămînt, dezvoltă o sarcină pozitivă netă pe conductorul  $k$ . Vedeți dacă puteți obține fie (a) un aranjament care ar urma să se comporte în acest mod, sau (b) un argument convingător că aceasta nu este posibil. Este posibil ca unul dintre coeficienții de „auto”-capacitate  $C_{jj}$  să fie negativ?

*O demonstrație că  $C_{12}$  este egal cu  $C_{21}$ , bazată pe conservarea energiei.*

**3.27.** Iată cîteva sugestii care ar trebui să vă îngăduie să construiți o demonstrație că  $C_{12}$  trebuie să fie totdeauna egal cu  $C_{21}$ . Știm că atunci cînd un element de sarcină  $dQ$  este transferat de la potențialul zero la un conductor la potențialul  $\phi$ , o oarecare sursă exterioră are de furnizat o cantitate de energie  $\phi dQ$ . Să considerăm un sistem de doi conductori în care cei doi conductori au fost încărcăți astfel încît potențialele lor sînt  $\phi_{1f}$  și  $\phi_{2f}$  ( $f$  pentru „final”). Această condiție ar putea fi atinsă, pornind dintr-o stare cu toate sarcinile și potențialele zero, în multe moduri diferite. Două căi posibile sînt de interes particular:

(a) Țineți  $\phi_2$  la zero în timp ce  $\phi_1$  se crește treptat de la zero la  $\phi_{1f}$ ; apoi creșteți  $\phi_2$  de la zero la  $\phi_{2f}$  ținînd  $\phi_1$  la  $\phi_{1f}$ .

(b) Efectuați un program asemănător în care rolurile lui 1 și 2 sînt schimbate, adică, creșteți  $\phi_2$  de la zero la  $\phi_{2f}$  mai întîi, și așa mai departe.

Calculați lucrul total efectuat de sursele exterioare, pentru fiecare dintre programele de încărcare. Apoi completați raționamentul.

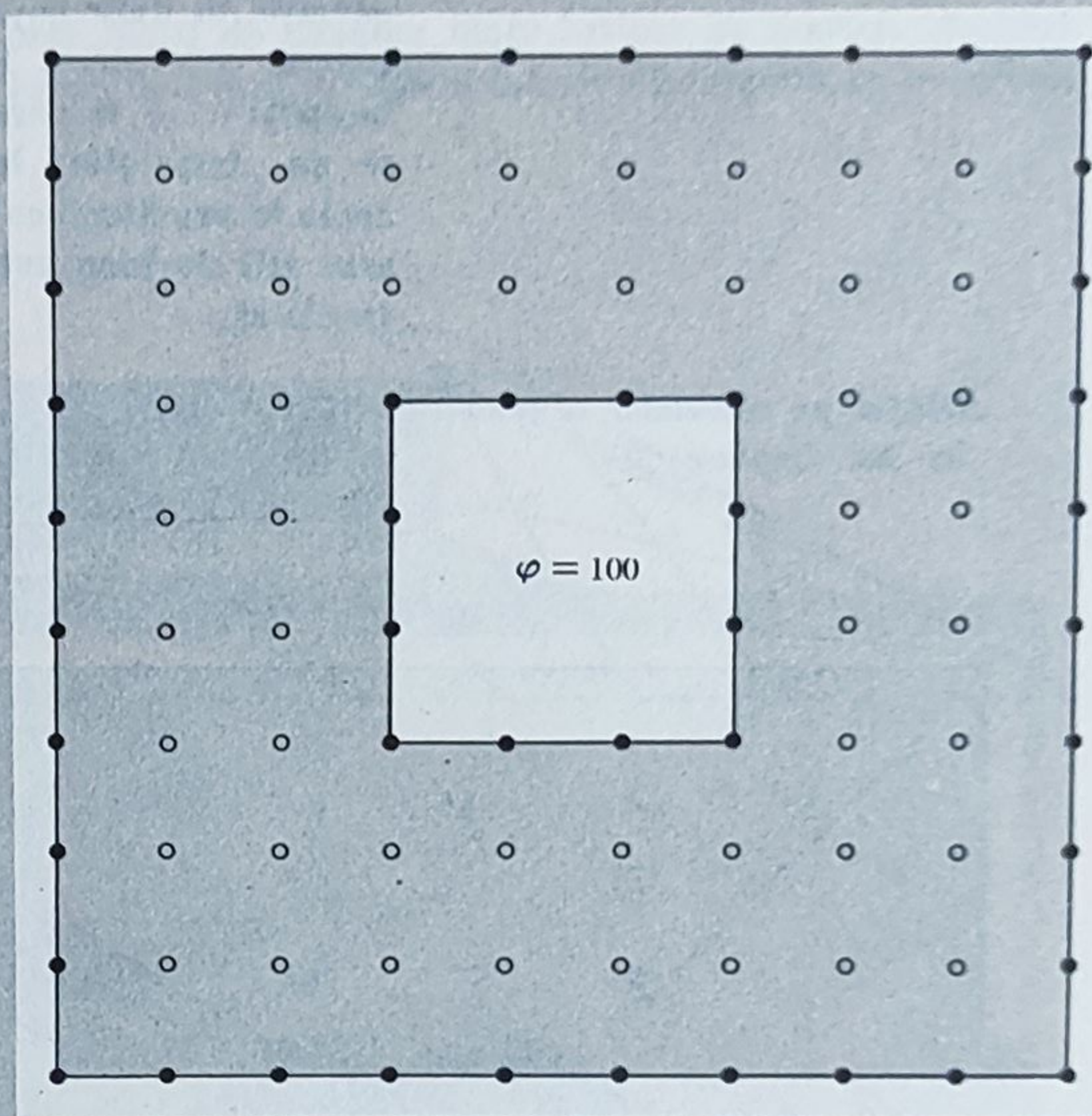
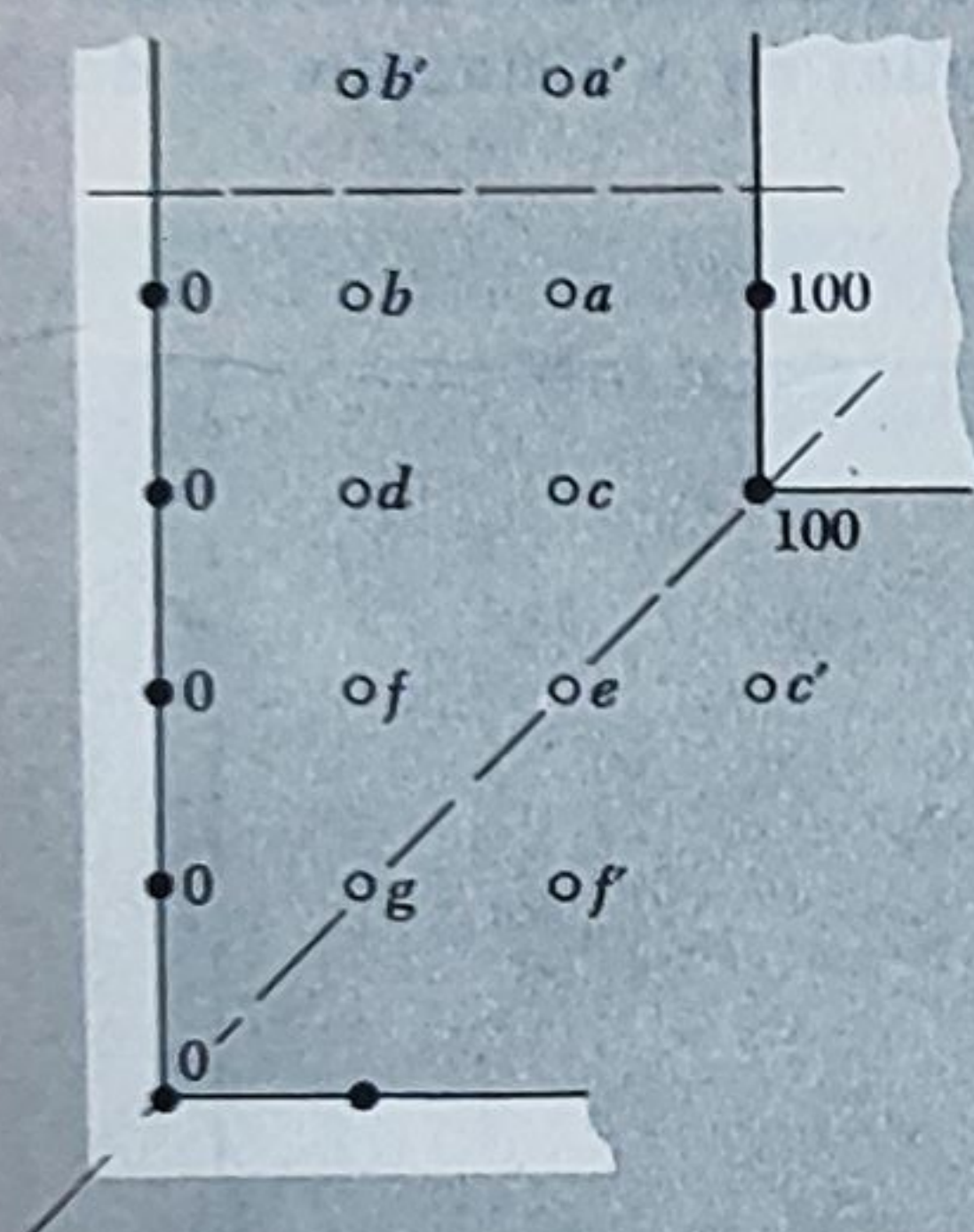
*Media unei funcții armonice pe șase puncte situate simetric.*

**3.28.** Fie  $\phi(x, y, z)$  orice funcție care poate fi dezvoltată în serie de puteri în jurul punctului  $(x_0, y_0, z_0)$ . Scrieți o dezvoltare în serie Taylor pentru valoarea lui  $\phi$  în fiecare din cele șase puncte  $(x_0 + \delta, y_0, z_0)$ ,  $(x_0 - \delta, y_0, z_0)$ ,  $(x_0, y_0 + \delta, z_0)$ ,  $(x_0, y_0 - \delta, z_0)$ ,  $(x_0, y_0, z_0 + \delta)$ ,  $(x_0, y_0, z_0 - \delta)$  care înconjoară în mod simetric punctul  $(x_0, y_0, z_0)$  la distanța  $\delta$ . Arătați că dacă  $\phi$  satisface ecuația lui Laplace, media acestor șase valori este egală cu  $\phi(x_0, y_0, z_0)$  pînă la termeni de ordinul trei în  $\delta$ .



*Exemplu: Metoda de relaxare pentru aproximarea unei soluții a ecuației lui Laplace.*

**3.29.** Iată cum se poate rezolva ecuația lui Laplace aproximativ, pentru condiții la limită date, folosind nimic altceva decât aritmetică. Metoda este *metoda de relaxare* menționată în § 3.8, și se bazează pe rezultatul problemei 3.28. Pentru simplitate luăm un exemplu bidimensional. În figură se află două frontiere echipotențiale pătrate, una în interiorul celeilalte. Aceasta ar putea fi o secțiune transversală printr-un condensator alcătuit din două conducte metalice pătrate de mărimi diferite. Problema este de a găsi potențialul pe o rețea de puncte ceea ce va fi o bună aproximație pentru funcția de potențial adevărată,  $\varphi(x, y)$ , în aceste puncte. Alegem o rețea cu puține puncte pentru a menține operațiile în



● Punct de graniță  
○ Punct interior

Se înlocuiește valoarea într-un punct interior cu  $\frac{1}{4} \times$  suma pentru cele patru puncte vecine  $c \rightarrow \frac{1}{4} (100 + a + d + e)$ ; se menține  $a' = a$ ,  $b' = b$ ,  $c' = c$  și  $f' = f$  valorile de pornire sugerate:  $a = 60$ ,  $b = 30$ ,  $c = 50$ ,  $d = 25$ ,  $e = 40$ ,  $f = 20$ ,  $g = 10$

Fig. la problema 3.29



limite acceptabile. Să atribuim, în mod arbitrar, potențialul 100 frontierei interioare și 0 celei exterioare. Toate punctele de pe aceste frontiere rămân la aceste valori. În principiu, putem începe cu orice valori pe punctele interioare; facem economie de timp totuși printr-o alegere inteligentă. O mulțime de valori inițiale este sugerată în figură. Poate puteți alege altele mai bune. Desigur vă veți folosi de simetrie; avem de calculat doar 7 valori interioare. Acum parcurgeți pur și simplu rețeaua într-o manieră sistematică înlocuind fiecare valoare în punctele interioare prin media celor patru vecini. Opriți-vă când obosiți, sau când toate schimbările rezultate într-o parcurgere a rețelei sînt satisfăcător de mici. Un moment potrivit de oprire ar putea fi când nu mai apare nici o schimbare mai mare de 1 unitate la o trecere. „Relaxarea“, adică, variația în distribuția valorilor de la o trecere la următoarea, este strîns legată de fenomenul *difuziei*. Dacă începeți cu o valoare mult prea mare într-un punct, ea se va „împrăștia“ la vecinii săi cei mai apropiați, de acolo la următorii cei mai apropiați, pînă cînd umflătura este atît de bine netezită cît o permit constrîngerile pe frontieră.

*Soluția pe calculator a ecuației lui Laplace.*

**3.30.** După ce ați obținut propria dumneavoastră soluție, puteți fi interesat în a o compara cu o soluție a aceleiași probleme pe un grilaj cu o distanțare de două

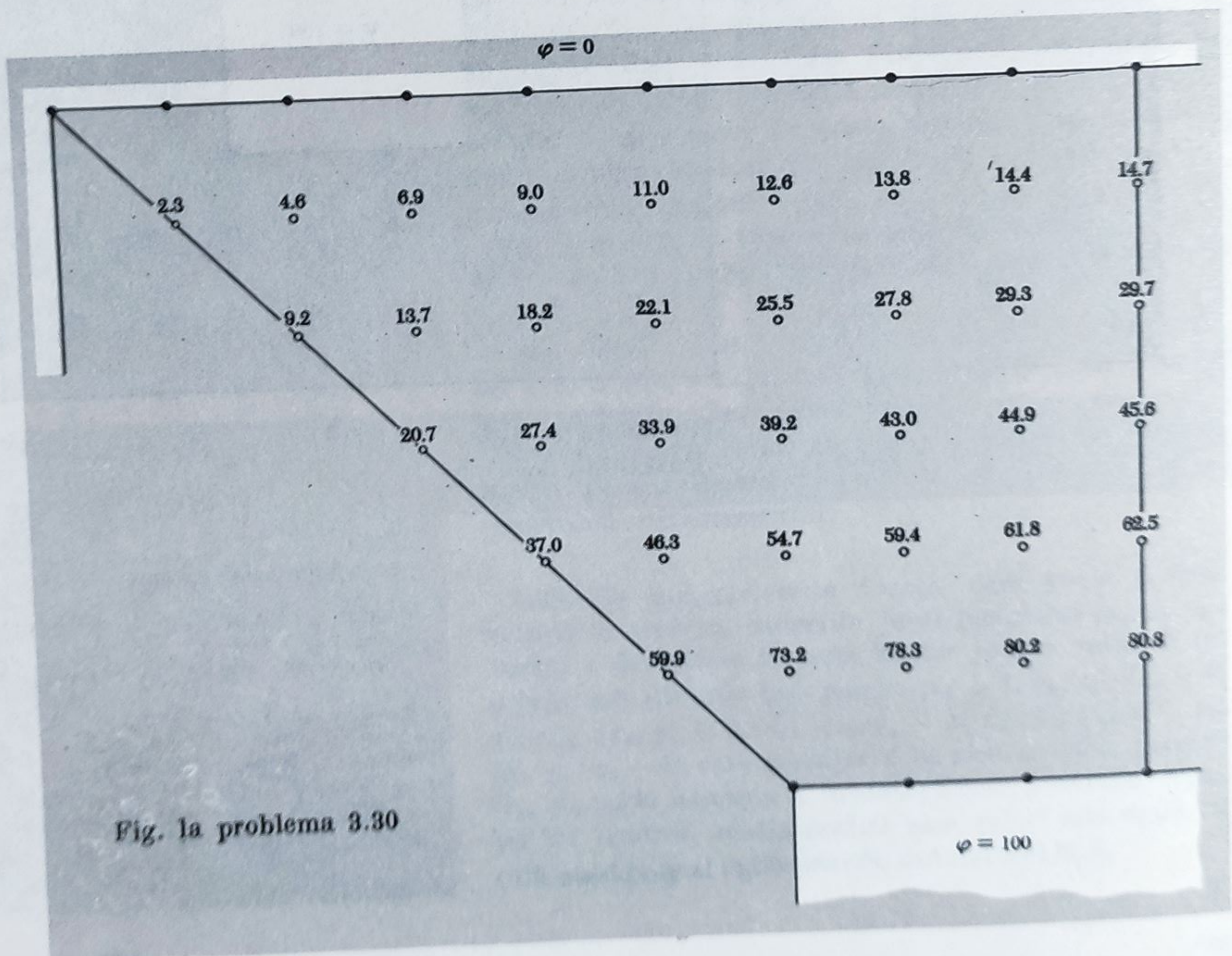


Fig. 1a problema 3.30



ori mai mică, obținut pe calculator (vezi figura). Calculatorul a fost programat să se oprească atunci când o nouă trecere nu schimba nici o valoare prin mai mult de 0,1. Calculatorul a făcut 41 de treceri peste rețea și a avut nevoie de 3 secunde pentru tot calculul. Puneți o bucată de hîrtie de copiat peste figură și localizați una sau două curbe echipotențiale, folosind interpolarea liniară între puncte. Cum ați putea afla, din datele figurii, capacitatea pe unitate de lungime a unui condensator cu această secțiune transversală?

*Întrebări pentru discuție:*  
Semnificația fizică a metodei de relaxare.

**3.31.** Modul în care variază potențialul în spațiul dintre doi cilindri încărcăți are un analog exact într-un fenomen fizic diferit, forma luată de o membrană elastică. Imaginați-vă rețeaua de puncte ilustrată în Problema 3.29, incluzînd punctele de pe frontieră, ca fiind conectate prin benzi de cauciuc toate întinse la aceeași tensiune. Acum imaginați frontiera interioară ridicată, ca în ilustra-

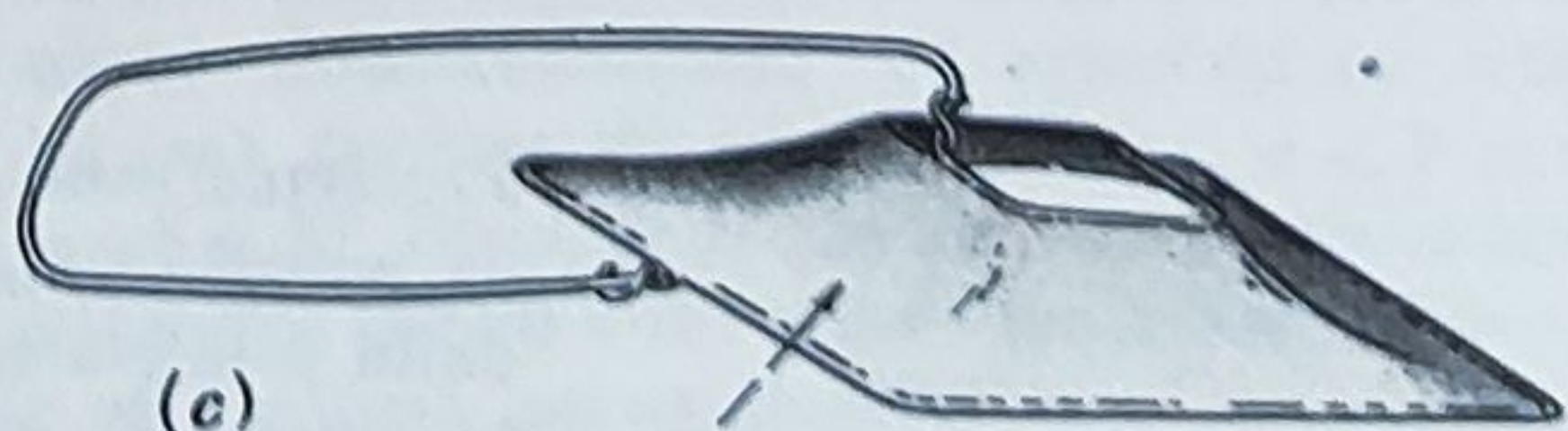
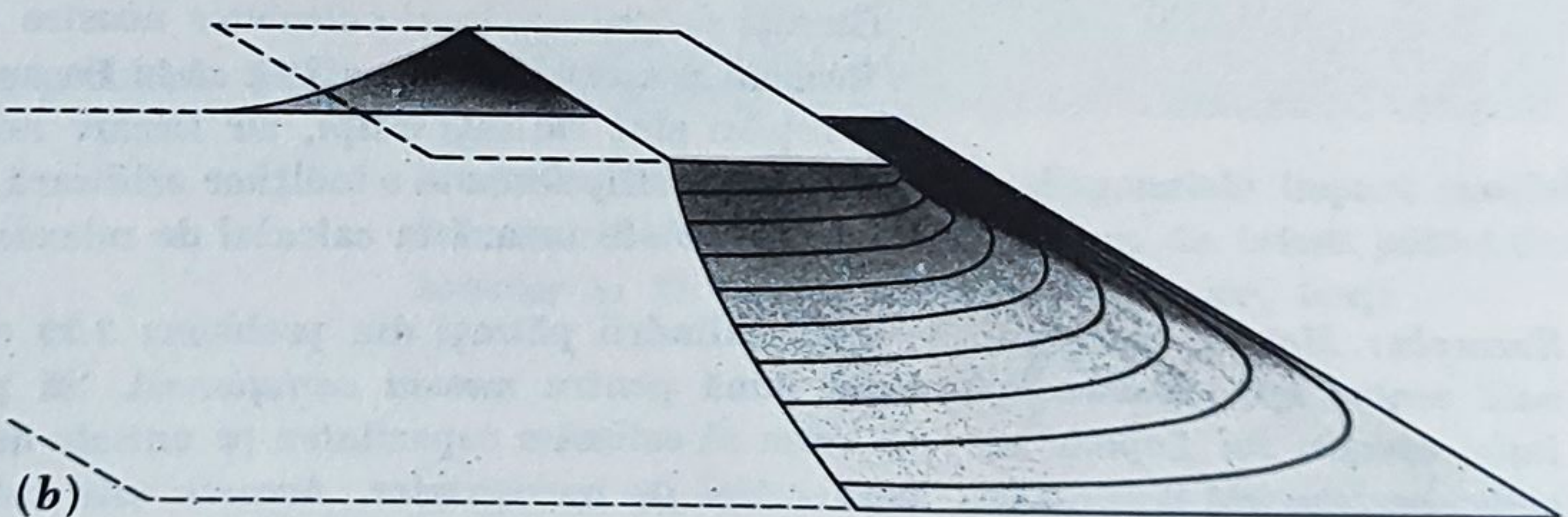
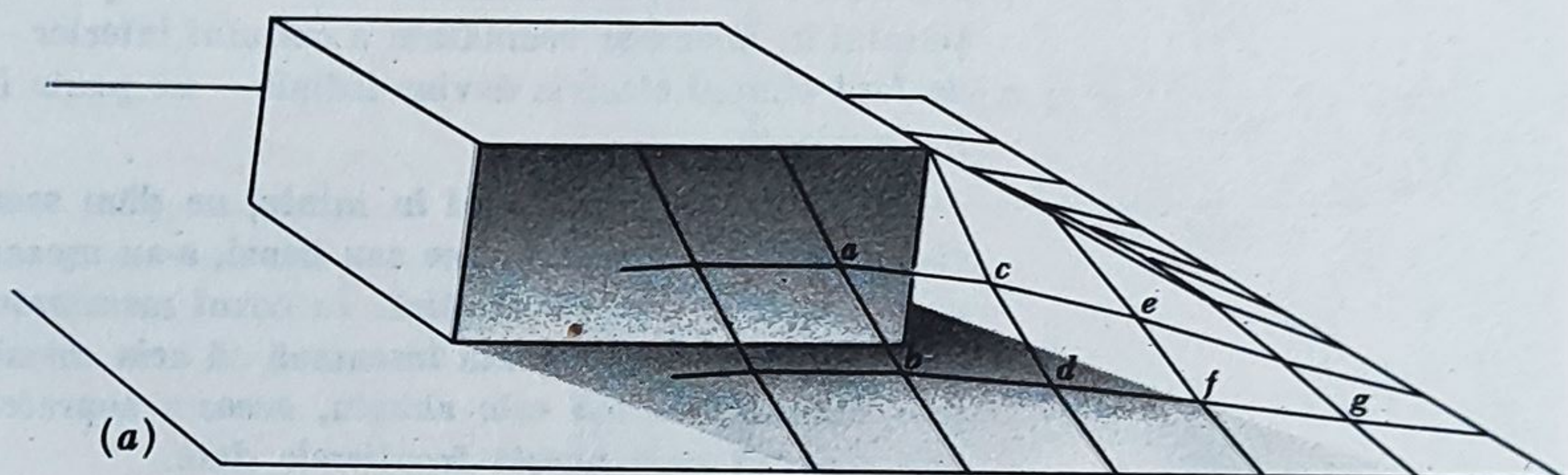


Fig. la problema 3.31

(c)  
Peliculă de săpun



ție pentru această problemă, la o înălțime reprezentând diferența de potențial  $\Phi_0$ . Presupunind că toate pantele sînt destul de mici pentru ca unghiurile  $\approx$  tangentele etc., înălțimea de echilibru a fiecărui punct de legătură, sau nod, va fi tocmai media înălțimilor celor patru vecini. De ce?

Dacă aveți o membrană elastică continuă în locul unei plase, înălțimea suprafeței urmează ecuația lui Laplace iar ridicarea cadrului interior face suprafața să ia forma ilustrată în partea (b). Aceasta este exact soluția pentru potențialul electrostatic între doi cilindri pătrați, și este de asemenea forma unei pelicule de săpun între două cadre pătratice, schițată în partea (c). Imaginea peliculei de săpun sau rețeaua benzilor de cauciuc este cîteodată de ajutor pentru a anticipa natura soluției unei probleme cu condiții la limită dintr-un alt domeniu al fizicii. În felul acesta am obținut valorile de pornire sugerate pentru calculul de relaxare. Compararea părților (b) și (a) ale figurii arată de ce nu ne putem aștepta ca o soluție pe o rețea să ne dea toate detaliile. Căderea abruptă a potențialului în imediata vecinătate a colțului interior — unde de fapt cîmpul electric devine infinit — nu poate fi pusă în evidență.

Cu principiul variațional în minte, ne dăm seama că sistemele elastice, membrane sau benzi, s-au așezat încît să minimizeze energia elastică. În cazul membranei sau peliculei de săpun, aceasta înseamnă că aria membranei este minimă. Forma este simplă, aceea a suprafeței de arie minimă care unește frontierele date.

Care este mărimea echivalentă, în sistemul electrostatic, a forței totale orientate în jos asupra cadrului interior, în sistemul elastic?

Gîndiți despre înțelesul calculelor noastre de relaxare în termeni mecanici. Imaginați-vă că în fiecare din punctele rețelei sînt ridicați stîlpi, iar fiecare nod al plasei este legat de stîlpul său la o înălțime arbitrară, la început. Ce proces se efectuează în calculul de relaxare?

*Exemplu: Metoda variațională pentru aproximarea soluției ecuației lui Laplace cu valori pe frontieră date.*

3.32. Cilindrii pătrați din problema 3.29 constituie o temă bună pentru metoda variațională. Să presupunem că vrem să estimăm capacitatea pe unitate de lungime a unui astfel de condensator. Aceasta este echivalent cu estimarea energiei înmagazinate, pe unitate de lungime, pentru o diferență de potențial dată, deoarece

$$U = \frac{1}{2} C \Phi_{12}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int |\nabla \Phi|^2 dv.$$

Problema este de a evalua această integrală cu funcția de potențial adevărată  $\Phi$ , pe care nu o cunoaștem, înlocuită printr-o funcție de încercare  $\psi(x, y)$ .  $\psi$  trebuie să îndeplinească condițiile de frontieră impuse; adică, trebuie



să se reducă la  $\varphi_0$  pe pătratul mic și la 0 pe pătratul mare. În rest sintem liberi să o alegem cum dorim. Strategia este de a alege o funcție pentru care integrarea se poate efectua și una care se comportă calitativ ca soluție reală. Drept prin pas sugerăm o simplă funcție liniară în fiecare

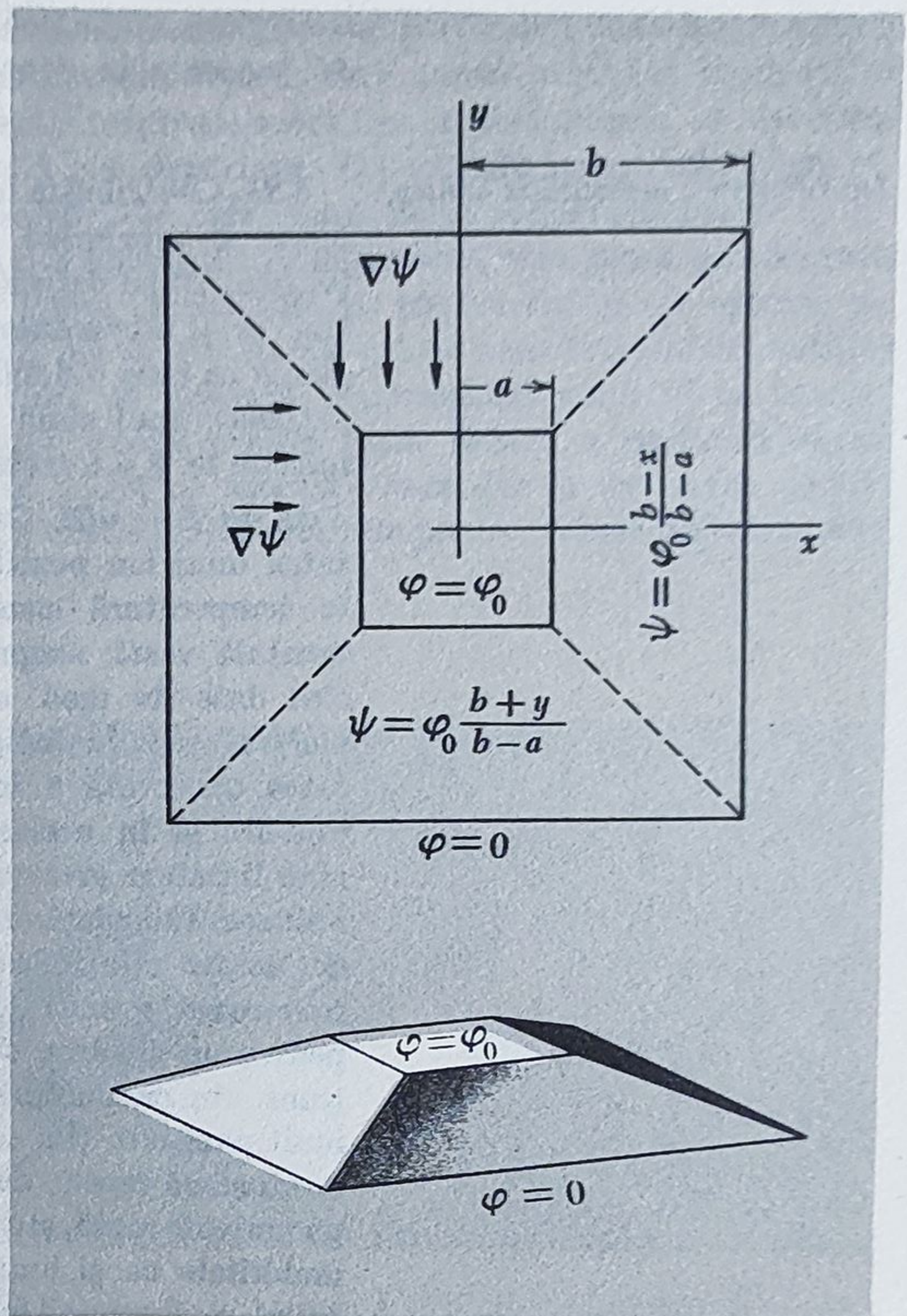


Fig. 1a problema 3.32

din cele patru părți în care diagonalele împart spațiul interior. Referindu-ne la figură, cu  $2a$  latura pătratului interior și  $2b$  latura pătratului exterior, luați

$$\psi = \varphi_0 \frac{b-x}{b-a}$$

în spațiul din dreapta etc. Graficul lui  $\psi$  este un trunchi de piramidă. Acum deși  $\nabla^2\psi = 0$  aproape peste tot,  $\psi$  nu satisface ecuația lui Laplace. De ce nu? Calculați integrala lui  $U$  și obțineți în acest fel o estimare a capacității. Va fi capacitatea adevărată mai mică sau mai mare decât estimarea dumneavoastră? Vă așteptați ca estimarea să fie mai aproape de adevăr pentru  $a \ll b$  sau pentru  $(b-a) \ll b$ ? Dacă ar fi nevoie de o aproximație mai bună, ați putea sugera o funcție de încercare îmbunătățită care să fie încă manipulabilă?



## Capitolul 4

*Întrebare pentru discuție.*

4.20. Dacă situația este astfel încît legea lui Ohm nu se mai aplică din motivul discutat în § 4.5, v-ați aștepta ca o creștere de 10 procente în cîmpul electric să producă o creștere mai mică, sau mai mare decît o creștere de 10 procente în densitatea de curent?

*Introducere a mobilității ionice.*

4.21. Contribuția unui ion la conductibilitatea electrică poate fi exprimată printr-o mărime numită *mobilitatea* ionului. După definiție, are dimensiunile de viteză împărțită prin intensitatea de cîmp electric. Ea este viteza medie pe care o dobîndește un astfel de ion cînd este sub acțiunea unui cîmp de intensitate unitate. Cu notațiile folosite în § 4.4 mobilitatea, pe care o vom nota  $\mu$ , ar fi dată de  $E = \bar{u}/E$ . Cum v-ați aștepta să depindă mobilitatea unui ion pozitiv într-un gaz de densitatea gazului la temperatură constantă? Există o literatură experimentală vastă asupra mobilităților ionice. Mobilitățile sînt date în mod obișnuit în cm/s pe volt/cm, sau cm<sup>2</sup>/volt-sec. În heliu foarte pur la 1 atmosferă mobilitatea observată a ionilor de heliu He<sup>+</sup> este 5,1 cm<sup>2</sup>/volt-sec și în același gaz mobilitatea ionilor negativi, care îi putem presupune ca fiind electroni, este 500 cm<sup>2</sup>/volt-sec. Calculați valorile lui  $\tau_+$  și  $\tau_-$  care sînt implicate de aceste cifre. Dacă putem asocia  $\tau$  cu un timp de traversare a unui „drum liber“, este drumul mai lung pentru un electron sau pentru un ion pozitiv? Ce fracțiune din conductibilitatea heliului ionizat este dată de ionii pozitivi? (În cele mai multe gaze electronii liberi se atașează repede de atomi. Astfel îngreunați, electronul nu mai este rapid, și acești ioni negativi au în mare aceeași mobilitate ca și ionii pozitivi. Cîteva gaze, printre care heliul, nu formează ioni negativi, prin atașarea de electroni și de aceea sînt ideali pentru experiențe asupra mobilității electronice reale.)

*Întrebare pentru discuție.*

4.22. Un ion care înaintează printr-un gaz de atomi neutrii sub influența unui cîmp electric se comportă oarecum ca o bilă într-un automat cu bile și cuie, pentru jocuri de noroc. Dezvoltați analogia. Care sînt asemănările și deosebiri? Formulați legea lui Ohm echivalentă pentru modelul automatului cu bile și cuie. Imaginați-vă că vi se dă sarcina de a proiecta un model de demonstrație pentru un muzeu științific. Cum ar trebui proiectată rețeaua de cuie pentru a da reprezentarea bidimensională cea mai realistă a conducției ionice? Discutați probleme cum sînt situarea cuielor, elasticitatea cuielor, posibilitatea de a simula energia termică, posibilitatea de a reprezenta deopotrivă atît sarcinile pozitive cît și cele negative.



Studiu al pulsului de curent datorat trecerii unei particule încărcate individuală. Puncte esențiale pentru înțelegerea dispozitivelor de detecție a particulelor din fizica modernă. Mai întâi revedeți Problema 3.17.

**4.23.** Rezultatul Problemei 3.17 ne poate ajuta să înțelegem curgerea curentului într-un circuit, care în parte constă din particule încărcate care se mișcă prin spațiul dintre electrozi. Întrebarea este, care este natura curentului când doar o particulă traversează spațiul? (Dacă putem afla aceasta, putem descrie ușor orice curgere implicând un număr mare de particule.) Considerăm circuitul simplu din figură, care constă din doi electrozi în vid legați printr-un scurt fir. Să presupunem că electrozii sînt la 2 mm depărtare. O particulă alpha relativ lentă, de sarcină  $+2e$ , este emisă de un nucleu radioactiv de pe placa din stînga. El se deplasează spre placa din dreapta cu o viteză constantă de  $10^8$  cm/sec și se oprește pe această placă. Faceți un grafic cantitativ al curentului prin firul de legătură, reprezentînd curentul în funcție de timp. Faceți același lucru pentru o particulă alpha care se mișcă cu aceeași viteză dar la un unghi de  $45^\circ$  față de normală. (În realitate pentru pulsuri atît de scurte

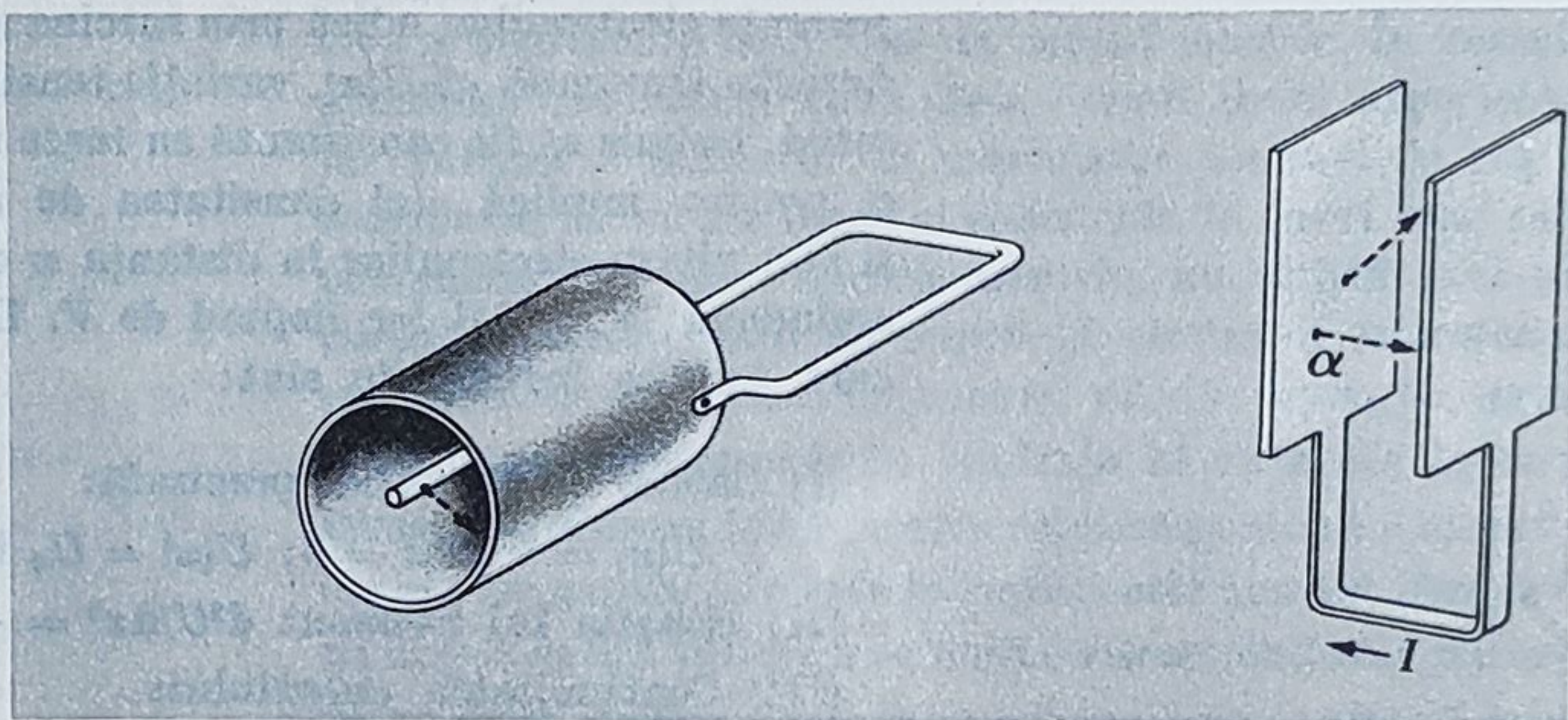


Fig. la problema 4.23

ca acesta inductanța firului de legătură, aici neglijată, ar modifica forma pulsului.) Să presupunem că aveam un aranjament cilindric de electrozi, particulele alfa fiind emise de pe un fir subțire de pe axa unui mic electrod cilindric. Ar avea pulsul de curent aceeași formă?

*Aplicare a unor idei din problemele 4.21 și 4.23.*

**4.24.** O cameră de ionizare constă dintr-o cutie metalică arătată în figură, conținînd argon la presiune atmosferică în care condiții mobilitățile ionilor pozitivi de argon și electronilor sînt  $1,6$  și  $800$  cm<sup>2</sup>/volt-sec, respectiv. Placa centrală care formează electrodul central este sprijinită pe un izolator și este conectată printr-o rezistență mare la un potențial de 500 de volți. Ea este de asemenea legată la un amplificator al cărui semnal de ieșire poate fi presupus proporțional curentului prin fir de la electrodul central, și poate fi văzut pe un osciloscop. Descrieți natura pulsurilor pe care v-ați aștepta să le vedeți pe



ecranul osciloscopului când o particulă de energie înaltă trece prin cameră, lăsând o dîră de ioni de-a lungul traiectoriei. (Puteți presupune că există mijloace de a ajusta baleiajul osciloscopului cu trecerea particulei.) Ce viteză de baleiaj ar fi de dorit pentru studiul pulsului?

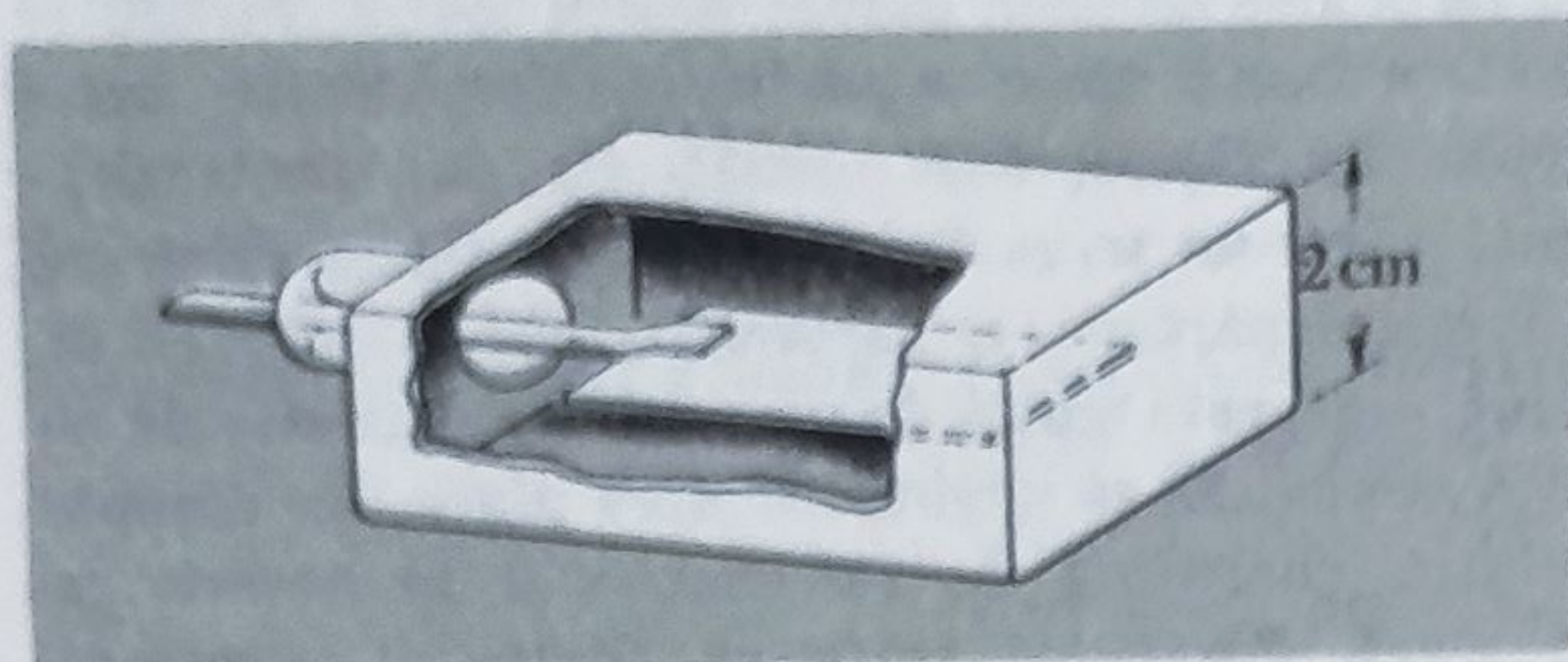


Fig. la problema 4.31

Dioda cu limitare de sarcină spațială: o aplicație importantă a ecuației lui Poisson; deducerea legii „trei pe doi”.

4.25. Ne referim la figura 4.2 și ați face bine să vă încălziți făcînd problema 4.4 dacă încă nu ați făcut-o. Vom studia deplasarea electronilor în dioda de vid. Vom presupune, ca în problema 4.4 că electronii părăsesc catodul cu viteza inițială zero, că potențialul catodului este zero și potențialul anodului este  $U_0$ . Dar acum cîmpul electric dintre anod și catod este vizibil afectat prin prezența electronilor, adică prin sarcina spațială negativă. Aceasta înseamnă că  $U(x)$ , variația tensiunii între anod și catod, trebuie să fie consistentă cu toate celelalte condiții, și acestea implică  $\rho(x)$  densitatea de sarcină spațială și  $v(x)$  viteza electronilor la distanța  $x$  de la catod, care amîndouă la rîndul lor depind de  $V$ . Diferitele condiții care trebuie îndeplinite sînt:

(I) Cădere de potențial precizată:

$$U(x) = 0 \text{ la } x = 0; \quad U(x) = U_0 \text{ la } x = s.$$

(II) Ecuația lui Poisson:  $d^2U/dx^2 = -\rho/\epsilon_0$ .

(III) Continuitatea curentului:

$$\rho v = J = -I/A \text{ (o constantă).}$$

(IV) Dinamica electronului:  $\frac{1}{2}mv^2 = eU(x)$ .

Arătați cum ultimele trei ecuații conduc la o ecuație diferențială care leagă  $U$  și  $x$ , de forma  $d^2U/dx^2 = K/U^{1/2}$ , unde  $K$  este o constantă formată din diferitele constante din probleme. Căutăm situații ale acestei ecuații care vor îndeplini condiția (I), condiția la limită asupra lui  $U(x)$ . De fapt o întreagă familie de soluții o vor îndeplini. Trebuie să folosim un argument fizic pentru a impune încă o restricție. Sîntem interesați în cazul limită cînd, pentru  $U_0$  dat, efectul repulsiv al sarcinii spațiale este atît de mare încît să nu poată trece mai mulți electroni chiar dacă ar putea fi eliberați mai mulți de la catod. Trăsătura care caracterizează această condiție este că cîmpul electric este zero, la catod. Gîndiți-vă, de ce. Ce s-ar întîmpla dacă cîmpul nu era zero, și pozitiv? Astfel că cerem  $dU/dx = 0$  la  $x = 0$ . Pentru a găsi o soluție



ecranul osciloscopului când o particulă de energie înaltă trece prin cameră, lăsând o dîră de ioni de-a lungul traiectoriei. (Puteți presupune că există mijloace de a ajusta baleiajul osciloscopului cu trecerea particulei.) Ce viteză de baleiaj ar fi de dorit pentru studiul pulsului?

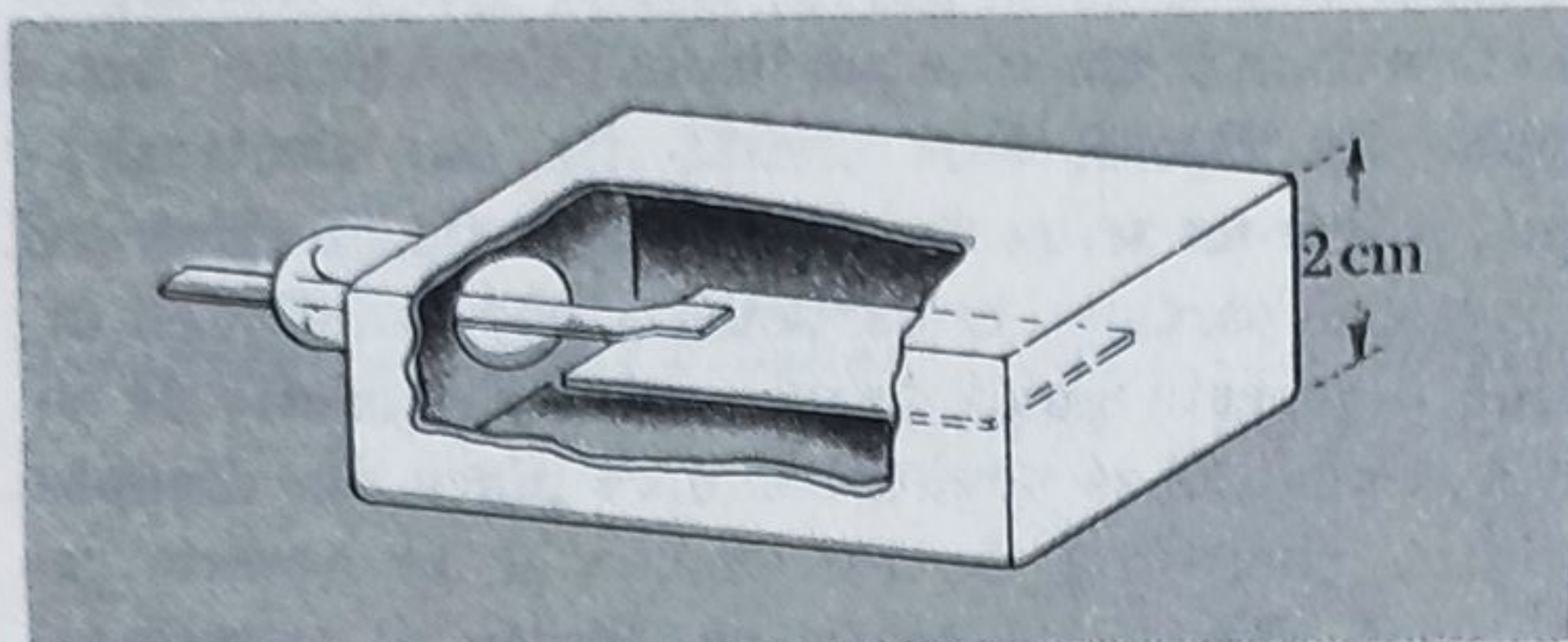


Fig. la problema 4.31

Dioda cu limitare de sarcină spațială: o aplicație importantă a ecuației lui Poisson; deducerea legii „trei pe doi”.

4.25. Ne referim la figura 4.2 și ați face bine să vă încălziți făcînd problema 4.4 dacă încă nu ați făcut-o. Vom studia deplasarea electronilor în dioda de vid. Vom presupune, ca în problema 4.4 că electronii părăsesc catodul cu viteza inițială zero, că potențialul catodului este zero și potențialul anodului este  $U_0$ . Dar acum cîmpul electric dintre anod și catod este vizibil afectat prin prezența electronilor, adică prin sarcina spațială negativă. Aceasta înseamnă că  $U(x)$ , variația tensiunii între anod și catod, trebuie să fie consistentă cu toate celelalte condiții, și acestea implică  $\rho(x)$  densitatea de sarcină spațială și  $v(x)$  viteza electronilor la distanța  $x$  de la catod, care amîndouă la rîndul lor depind de  $V$ . Diferitele condiții care trebuie îndeplinite sînt:

(I) Cădere de potențial precizată:

$$U(x) = 0 \text{ la } x = 0; \quad U(x) = U_0 \text{ la } x = s.$$

(II) Ecuația lui Poisson:  $d^2U/dx^2 = -\rho/\epsilon_0$ .

(III) Continuitatea curentului:

$$\rho v = J = -I/A \text{ (o constantă).}$$

(IV) Dinamica electronului:  $\frac{1}{2}mv^2 = eU(x)$ .

Arătați cum ultimele trei ecuații conduc la o ecuație diferențială care leagă  $U$  și  $x$ , de forma  $d^2U/dx^2 = K/U^{1/2}$ , unde  $K$  este o constantă formată din diferitele constante din probleme. Căutăm situații ale acestei ecuații care vor îndeplini condiția (I), condiția la limită asupra lui  $U(x)$ . De fapt o întreagă familie de soluții o vor îndeplini. Trebuie să folosim un argument fizic pentru a impune încă o restricție. Sîntem interesați în cazul limită cînd, pentru  $U_0$  dat, efectul repulsiv al sarcinii spațiale este atît de mare încît să nu poată trece mai mulți electroni chiar dacă ar putea fi eliberați mai mulți de la catod. Trăsătura care caracterizează această condiție este că cîmpul electric este zero, la catod. Gîndiți-vă, de ce. Ce s-ar întîmpla dacă cîmpul nu era zero, și pozitiv? Astfel că cerem  $dU/dx = 0$  la  $x = 0$ . Pentru a găsi o soluție



pentru ecuația diferențială, înmulțiți ambii membrii prin  $2(dU/dx)$ . Atunci membrul stâng este același ca  $(d/dx) (dU/dx)^2$ . Luați-o de aici. Ar trebui să puteți arăta că curentul  $I$  în regim „limitare prin sarcină spațială” este proporțional cu  $U_0^{3/2}$ . Acesta este un exemplu important de sistem care nu urmează legea lui Ohm! Incidental, electronii emiși de la catodul unei diode reale nu pleacă cu viteza exact zero, dar cu viteza corespunzătoare temperaturii catodului. Aceasta corespunde unei energii cinetice în jur de o zecime de electron volt. Câtă vreme ne ocupăm cu potențiale mult mai mari decât acesta, este o bună aproximație să presupunem viteza inițială zero.

#### Experiența Tolman-Stewart.

4.26. Faptul că electronii sînt răspunzători pentru conducția în metale a fost arătat pe o cale directă prin experiența lui Tolman și Stewart\*. Aceasta s-a bazat pe următoarea idee simplă. Dacă electronii sînt relativ liberi în metale, inerția lor îi va împiedica să urmeze exact mișcarea rețelei cristaline, dacă aceasta din urmă este făcută să se miște accelerat. Dacă agitați o bucată de metal, electronii vor avea tendința să rămîină în urmă. Aceasta va rezulta într-o mișcare *relativă* a sarcinii pozitive și negative și deci, într-un curent electric. În această problemă dezvoltăm ideea de-a lungul liniei experienței lui Tolman — Stewart. Să considerăm un inel de cupru rotindu-se cu viteză mare și constantă în jurul axei sale principale. Ea este electric neutră; nu există nici un curent deoarece ionii de cupru și electronii în rețeaua cristalină se deplasează cu aceeași viteză. Acum să oprim brusc inelul. Electronii au tendința să se miște în continuare, și singura forță pe care rețeaua poate să o exercite asupra lor pentru ai aduce în repaus este aceeași „frecare” pe care o aplică pentru a le limita viteza cînd sînt purtați de un cîmp electric. Trebuie să existe o relație simplă între accelerația electronului din această experiență și intensitatea cîmpului electric  $E$  care, într-un conductor staționar, ar produce aceeași mișcare relativă a electronului și rețelei. Dacă urmăriți acestea veți găsi că oprirea inelului produce *curgerea unei cantități definite de sarcină*. Adică, integrala  $\int Idt$  este determinată simplu de viteza inițială a inelului înainte de oprire, conductivitatea cuprului, și raportul sarcină-pe-masă al purtătorilor liberi. Deduceți formula. Experiența dă de asemenea și *sensul* purtătorilor. Tolman și Stewart au folosit o bobină din multe spire de sîrmă subțire, în loc de un singur inel, astfel încît au putut scoate ușor curentul într-un circuit exterior pentru măsurare.

\* R.C. Tolman și T. D. Stewart, *Phys. Rev.* 9, 164 (1917). Experiențele au fost efectuate în laboratoarele de chimie ale Universității din California.



pentru ecuația diferențială, înmulțiți ambii membrii prin  $2(dU/dx)$ . Atunci membrul stâng este același ca  $(d/dx) (dU/dx)^2$ . Luați-o de aici. Ar trebui să puteți arăta că curentul  $I$  în regim „limitare prin sarcină spațială” este proporțional cu  $U_0^{3/2}$ . Acesta este un exemplu important de sistem care nu urmează legea lui Ohm! Incidental, electronii emiși de la catodul unei diode reale nu pleacă cu viteza exact zero, dar cu viteza corespunzătoare temperaturii catodului. Aceasta corespunde unei energii cinetice în jur de o zecime de electron volt. Câtă vreme ne ocupăm cu potențiale mult mai mari decât acesta, este o bună aproximație să presupunem viteza inițială zero.


Experiența Tolman-Stewart.

4.26. Faptul că electronii sînt răspunzători pentru conducția în metale a fost arătat pe o cale directă prin experiența lui Tolman și Stewart\*. Aceasta s-a bazat pe următoarea idee simplă. Dacă electronii sînt relativ liberi în metale, inerția lor îi va împiedica să urmeze exact mișcarea rețelei cristaline, dacă aceasta din urmă este făcută să se miște accelerat. Dacă agitați o bucată de metal, electronii vor avea tendința să rămîină în urmă. Aceasta va rezulta într-o mișcare *relativă* a sarcinii pozitive și negative și deci, într-un curent electric. În această problemă dezvoltăm ideea de-a lungul liniei experienței lui Tolman — Stewart. Să considerăm un inel de cupru rotindu-se cu viteză mare și constantă în jurul axei sale principale. Ea este electric neutră; nu există nici un curent deoarece ionii de cupru și electronii în rețeaua cristalină se deplasează cu aceeași viteză. Acum să oprim brusc inelul. Electronii au tendința să se miște în continuare, și singura forță pe care rețeaua poate să o exercite asupra lor pentru ai aduce în repaus este aceeași „frecare” pe care o aplică pentru a le limita viteza cînd sînt purtați de un cîmp electric. Trebuie să existe o relație simplă între accelerația electronului din această experiență și intensitatea cîmpului electric  $E$  care, într-un conductor staționar, ar produce aceeași mișcare relativă a electronului și rețelei. Dacă urmăriți acestea veți găsi că oprirea inelului produce *curgerea unei cantități definite de sarcină*. Adică, integrala  $\int Idt$  este determinată simplu de viteza inițială a inelului înainte de oprire, conductivitatea cuprului, și raportul sarcină-pe-masă al purtătorilor liberi. Deduceți formula. Experiența dă de asemenea și *semnul* purtătorilor. Tolman și Stewart au folosit o bobină din multe spire de sîrmă subțire, în loc de un singur inel, astfel încît au putut scoate ușor curentul într-un circuit exterior pentru măsurare.

\* R.C. Tolman și T. D. Stewart, *Phys. Rev.* 9, 164 (1917). Experiențele au fost efectuate în laboratoarele de chimie ale Universității din California.



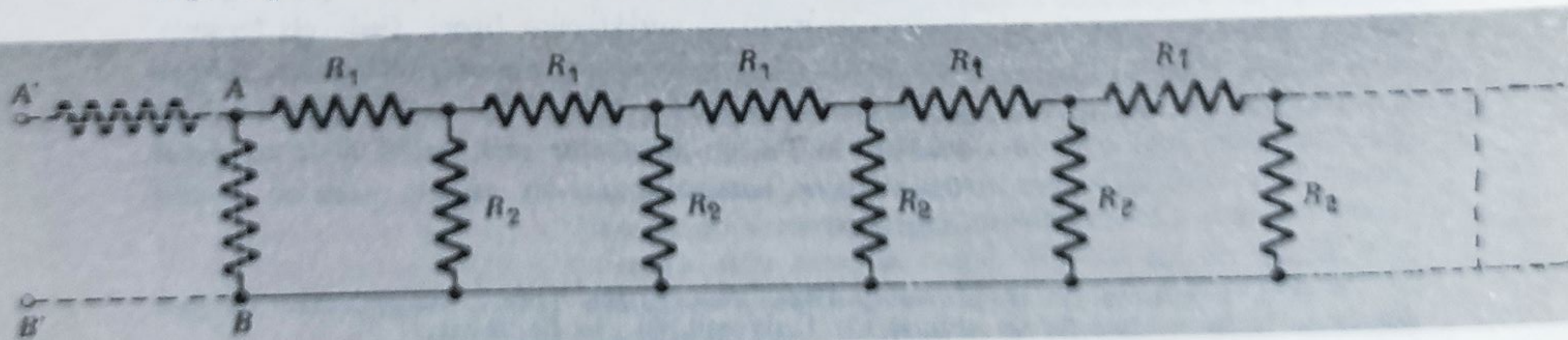
O problemă de rețele implicând simetrie.

4.27. Toate rețelele se pot desena plane dacă alegem un mod convențional de a reprezenta o „încrucișare fără atingere”, ca de exemplu  Să presupunem că un cub are o rezistență de-a lungul fiecărei muchii. La fiecare vîrf conductorii de la trei rezistențe sînt legați împreună. Desenați acest circuit într-o diagramă plană. Găsiți rezistența echivalentă dintre două noduri care reprezintă două colțuri diagonal opuse ale cubului, în cazul în care toate rezistențele au aceeași valoare  $R_0$ . Pentru aceasta nu este nevoie să rezolvați un număr de ecuații simultane; în schimb folosiți argumente de simetrie. Acum găsiți rezistența echivalentă dintre două noduri care corespund la colțuri diagonal opuse ale unei fețe a cubului. Aici din nou, considerații de simetrie vor reduce problema la una foarte simplă. Pentru amîndouă aceste calcule, o schiță a structurii ca un cub, mai degrabă decît una plană, vă va ajuta să identificați simetriile necesare ale curenților.

Rețeaua în scară.


4.28. Unele tipuri importante de rețele sînt infinite ca extindere. Figura arată un lanț de rezistențe în serie și paralel care se întinde fără sfîrșit spre dreapta. Linia de jos este firul de întoarcere fără rezistență pentru toate. Aceasta se numește uneori un lanț de atenuare, sau rețea în scară. Problema este de a găsi rezistența „de intrare”, adică, rezistența echivalentă între terminalii  $A$  și  $B$ . Interesul nostru în această problemă este în principal pentru metoda de soluție, care ia o întorsătură neașteptată, și care poate fi folosită în alte locuri în fizică în care avem iterații de dispozitive identice (chiar un șir infinit de lentile, în optică). Esența este că rezistența de intrare pe care încă nu o știm — să o numim  $R$  — nu va fi schimbată prin adăugarea unui nou set de rezistențe la capătul din față al șirului pentru a-l face mai lung cu o unitate. Dar acum, adăugînd această secțiune, vedem că această nouă rezistență de intrare este chiar  $R_1$  în serie cu combinația paralelă a lui  $R_2$  și  $R$ . Obținem imediat o ecuație care poate fi rezolvată pentru  $R$ . Arătați că dacă tensiunea  $V_0$  este aplicată la intrarea unui astfel de lanț, tensiunea la noduri succesive descrește în progresie geometrică. Care este raportul necesar pentru rezistențe pentru a face scara un atenuator care înjumătățește tensiunea la fiecare pas? Evident o scară cu adevărat

Fig. la problema 4.28





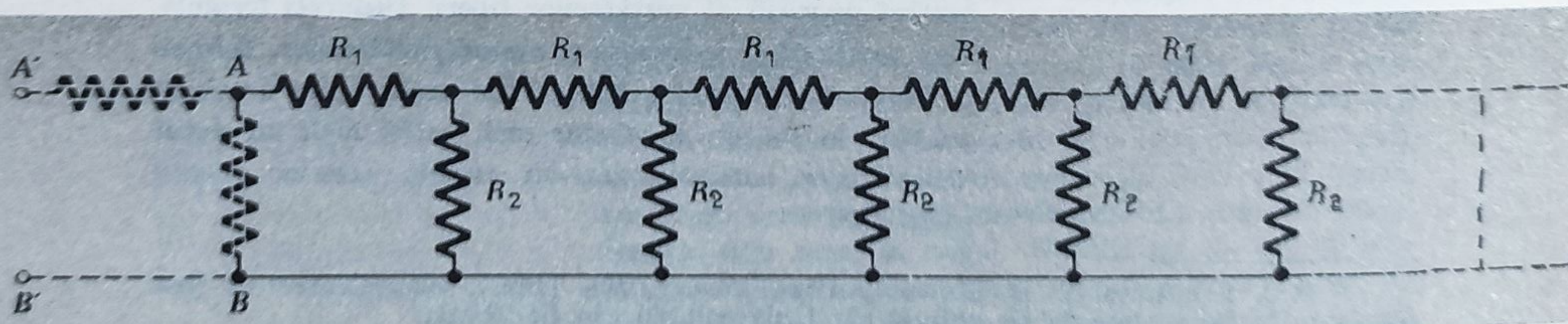
O problemă de rețele implicând simetrie.

4.27. Toate rețelele se pot desena plane dacă alegem un mod convențional de a reprezenta o „încrucișare fără atingere“, ca de exemplu  Să presupunem că un cub are o rezistență de-a lungul fiecărei muchii. La fiecare vîrf conductorii de la trei rezistențe sînt legați împreună. Desenați acest circuit într-o diagramă plană. Găsiți rezistența echivalentă dintre două noduri care reprezintă două colțuri diagonal opuse ale cubului, în cazul în care toate rezistențele au aceeași valoare  $R_0$ . Pentru aceasta nu este nevoie să rezolvați un număr de ecuații simultane; în schimb folosiți argumente de simetrie. Acum găsiți rezistența echivalentă dintre două noduri care corespund la colțuri diagonal opuse ale unei fețe a cubului. Aici din nou, considerații de simetrie vor reduce problema la una foarte simplă. Pentru amîndouă aceste calcule, o schiță a structurii ca un cub, mai degrabă decît una plană, vă va ajuta să identificați simetriile necesare ale curenților.

Rețeaua în scară.

4.28. Unele tipuri importante de rețele sînt infinite ca extindere. Figura arată un lanț de rezistențe în serie și paralel care se întinde fără sfîrșit spre dreapta. Linia de jos este firul de întoarcere fără rezistență pentru toate. Aceasta se numește uneori un lanț de atenuare, sau rețea în scară. Problema este de a găsi rezistența „de intrare“, adică, rezistența echivalentă între terminalii  $A$  și  $B$ . Interesul nostru în această problemă este în principal pentru metoda de soluție, care ia o întorsătură neașteptată, și care poate fi folosită în alte locuri în fizică în care avem iterații de dispozitive identice (chiar un șir infinit de lentile, în optică). Esența este că rezistența de intrare pe care încă nu o știm — să o numim  $R$  — nu va fi schimbată prin adăugarea unui nou set de rezistențe la capătul din față al șirului pentru a-l face mai lung cu o unitate. Dar acum, adăugînd această secțiune, vedem că această nouă rezistență de intrare este chiar  $R_1$  în serie cu combinația paralelă a lui  $R_2$  și  $R$ . Obținem imediat o ecuație care poate fi rezolvată pentru  $R$ . Arătați că dacă tensiunea  $V_0$  este aplicată la intrarea unui astfel de lanț, tensiunea la noduri succesive descrește în progresie geometrică. Care este raportul necesar pentru rezistențe pentru a face scara un atenuator care înjumătățește tensiunea la fiecare pas? Evident o scară cu adevărat

Fig. la problema 4.28





Un circuit simplu, analizat dintr-un punct de vedere nou, ilustrează un principiu variațional.

infinită nu ar fi practică. Puteți sugera un mod de a o termina după câteva secțiuni fără a introduce nici o eroare în atenuarea ei?

4.29. Figura arată două rezistențe în paralel, cu valori  $R_1$  și  $R_2$ . Curentul  $I_0$  se distribuie într-un oarecare mod între ele. Arătați că condiția  $I_1 + I_2 = I_0$  împreună cu cerința de *putere disipată minimă* conduce la aceleași valori de curent pe care le-am calcula prin formule de circuit obișnuite. Aceasta ilustrează un principiu variațional general care are loc pentru rețele de curent continuu. Distribuția curenților în rețea, pentru un curent de intrare  $I_0$  dat, este totdeauna aceea care dă disiparea de putere totală minimă.

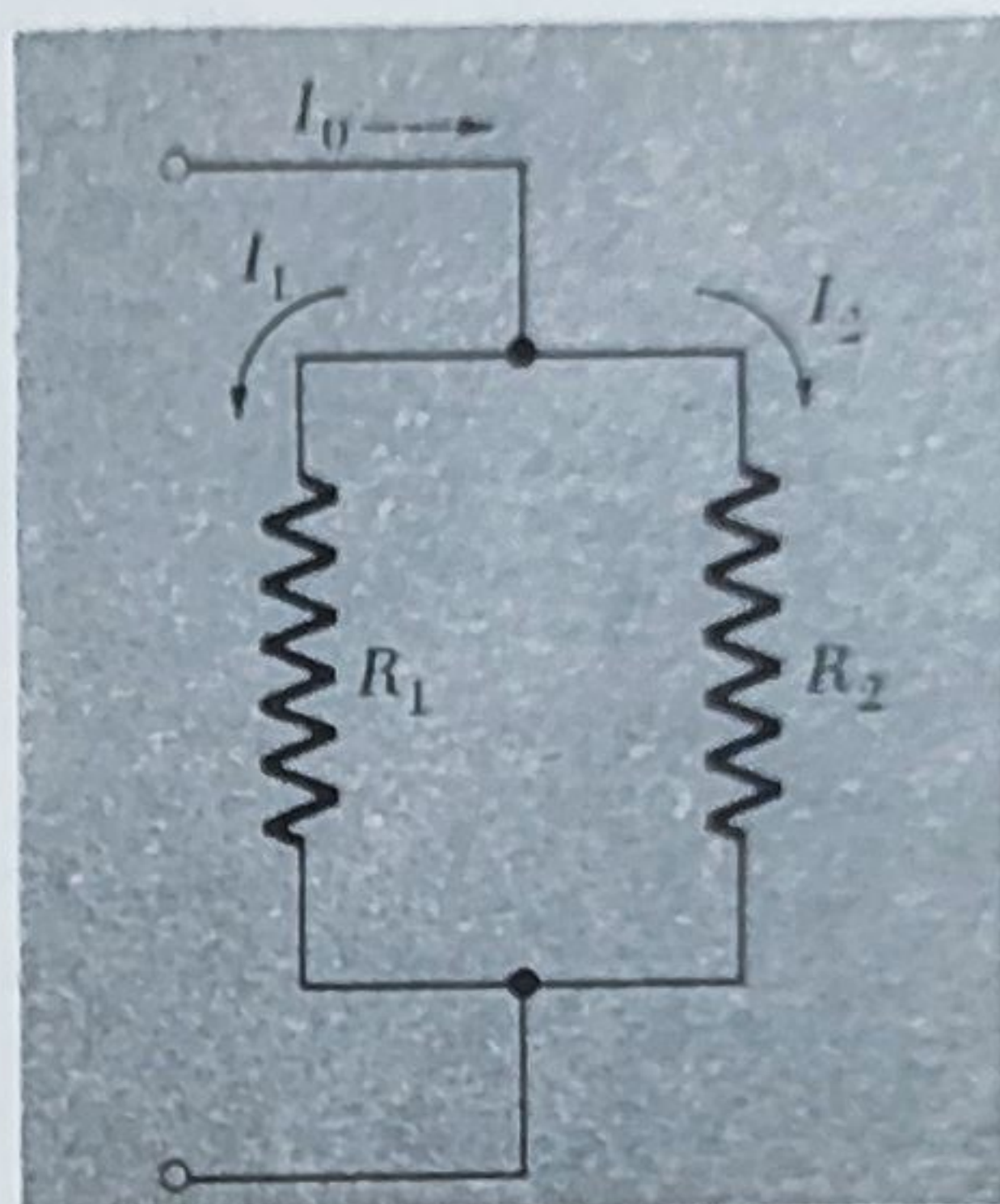


Fig. la problema 4.29

O aplicație curioasă a superpoziției și simetriei.

4.30. O „problemă-ghicitoare” care a circulat printre inginerii electricieni câțiva ani în urmă a fost aceasta: Un număr infinit de rezistențe de 1 ohm sînt legate împreună pentru a alcătui o rețea bidimensională infinită cu ochiuri pătrate. Adică, în fiecare nod se întîlnesc conductori de la patru rezistențe. Care este rezistența echivalentă între un nod și unul dintre nodurile vecine cele mai apropiate? Această problemă este un exemplu surprinzător despre puterea simetriei și superpoziției. Folosind cu iscusință superpoziția, o puteți face aproape în minte. Încercați să o faceți în orice alt mod și veți aprecia eleganța primei soluții. Răspunsul este 0,5 ohm, dar nu vom dezlega ghicitoarea spunîndu-vă ce stări de curent să superpuneți.

Introducere la ideea circuitelor echivalente cu curenți și tensiuni variînd în timp. Analiză prin superpunerea de pulsuri scurte.

4.31. În această problemă veți investiga comportarea a două circuite cu tensiuni variabile în timp. Fiecare circuit este alcătuit din două rezistențe și un condensator, dar legate în mod diferit (vezi figura). Scopul dumneavoastră este de a demonstra un fapt destul de surprinzător. Dacă rezistențele  $R_3$  și  $R_4$  și capacitatea  $C$  au valori potrivite, circuitul din dreapta și circuitul din stînga sînt complet nedistins în orice măsurători exterioare. Aceasta înseamnă că orice tensiuni variabile în timp  $U(t)$  ar fi aplicate la borne, curentul  $I(t)$  va fi



infinită nu ar fi practică. Puteți sugera un mod de a o termina după câteva secțiuni fără a introduce nici o eroare în atenuarea ei?

Un circuit simplu, analizat dintr-un punct de vedere nou, ilustrează un principiu variațional.

4.29. Figura arată două rezistențe în paralel, cu valori  $R_1$  și  $R_2$ . Curentul  $I_0$  se distribuie într-un oarecare mod între ele. Arătați că condiția  $I_1 + I_2 = I_0$  împreună cu cerința de *putere disipată minimă* conduce la aceleași valori de curent pe care le-am calcula prin formule de circuit obișnuite. Aceasta ilustrează un principiu variațional general care are loc pentru rețele de curent continuu. Distribuția curenților în rețea, pentru un curent de intrare  $I_0$  dat, este totdeauna aceea care dă disiparea de putere totală *minimă*.

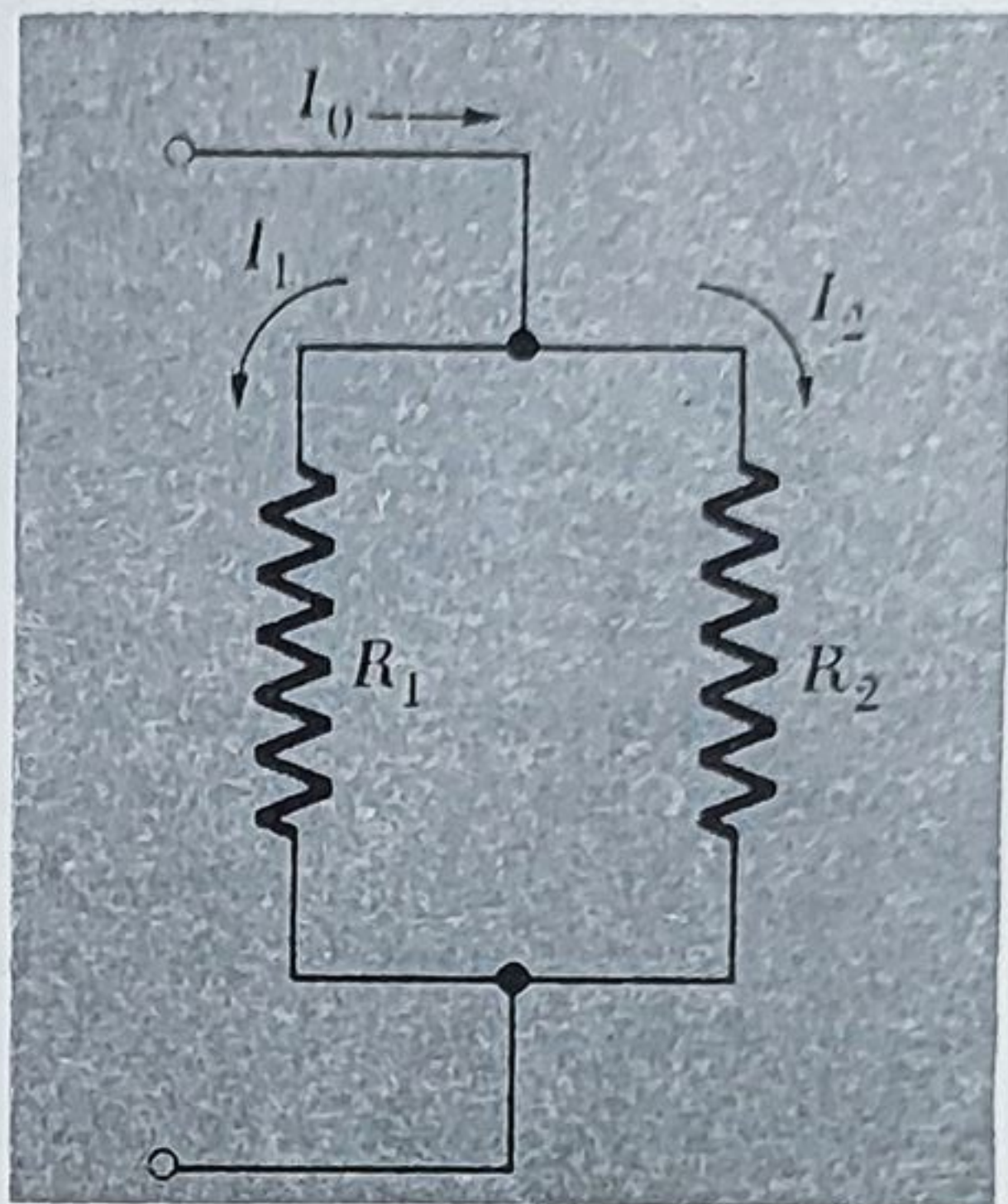


Fig. la problema 4.29

O aplicație curioasă a superpoziției și simetriei.

4.30. O „problemă-ghicitoare” care a circulat printre inginerii electricieni câțiva ani în urmă a fost aceasta: Un număr infinit de rezistențe de 1 ohm sînt legate împreună pentru a alcătui o rețea bidimensională infinită cu ochiuri pătrate. Adică, în fiecare nod se întîlnesc conductori de la patru rezistențe. Care este rezistența echivalentă între un nod și unul dintre nodurile vecine cele mai apropiate? Această problemă este un exemplu surprinzător despre puterea simetriei și superpoziției. Folosind cu iscusință superpoziția, o puteți face aproape în minte. Încercați să o faceți în orice alt mod și veți aprecia eleganța primei soluții. Răspunsul este 0,5 ohm, dar nu vom dezlega ghicitoarea spunîndu-vă ce stări de curent să superpuneți.

Introducere la ideea circuitelor echivalente cu curenți și tensiuni variînd în timp. Analiză prin superpunerea de pulsuri scurte.

4.31. În această problemă veți investiga comportarea a două circuite cu tensiuni variabile în timp. Fiecare circuit este alcătuit din două rezistențe și un condensator, dar legate în mod diferit (vezi figura). Scopul dumneavoastră este de a demonstra un fapt destul de surprinzător. Dacă rezistențele  $R_3$  și  $R_4$  și capacitatea  $C$  au valori potrivite, circuitul din dreapta și circuitul din stînga sînt complet de nedistins în orice măsurători exterioare. Aceasta înseamnă că *orice* tensiuni variabile în timp  $U(t)$  ar fi aplicate la borne, curentul  $I(t)$  va fi



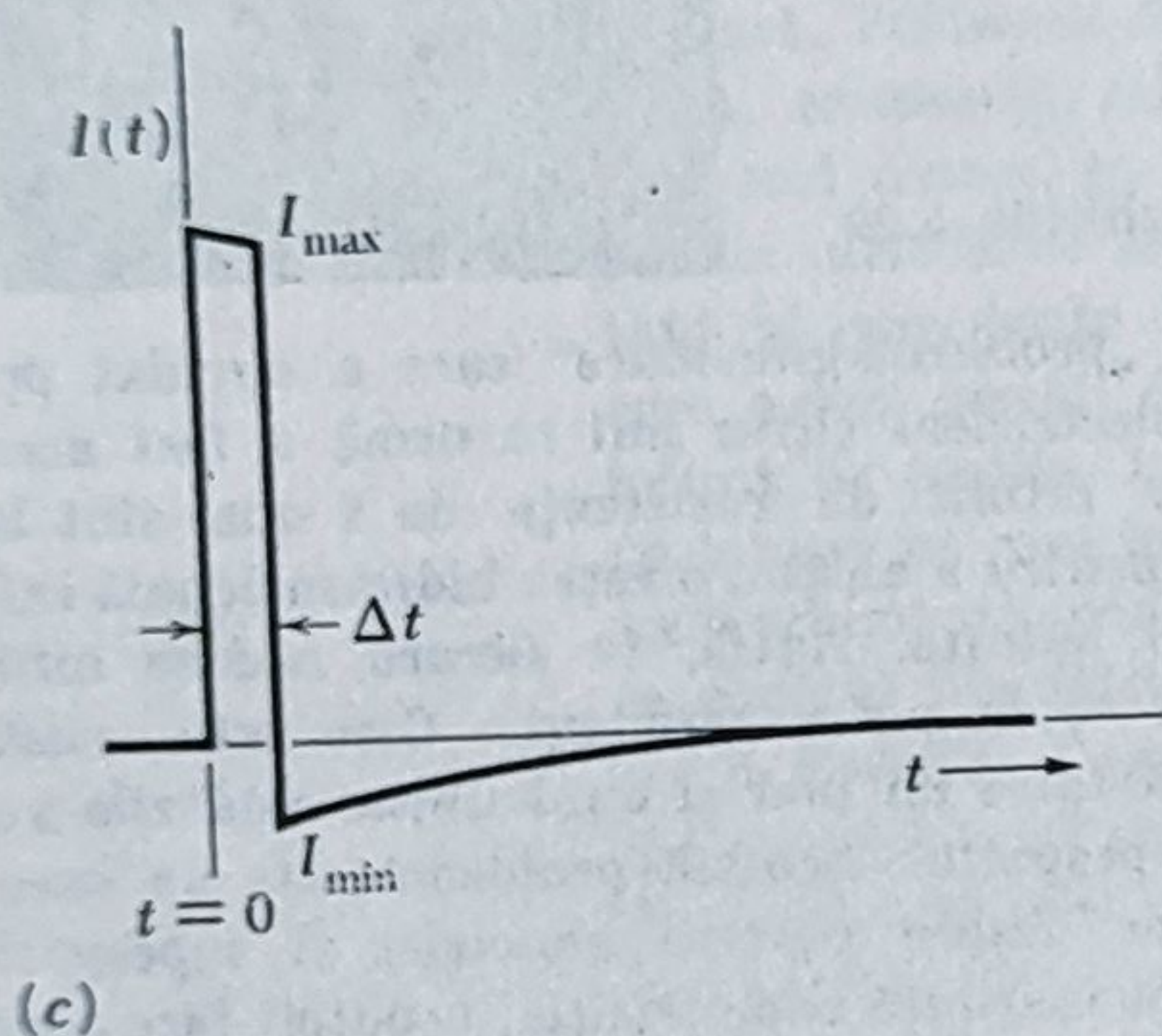
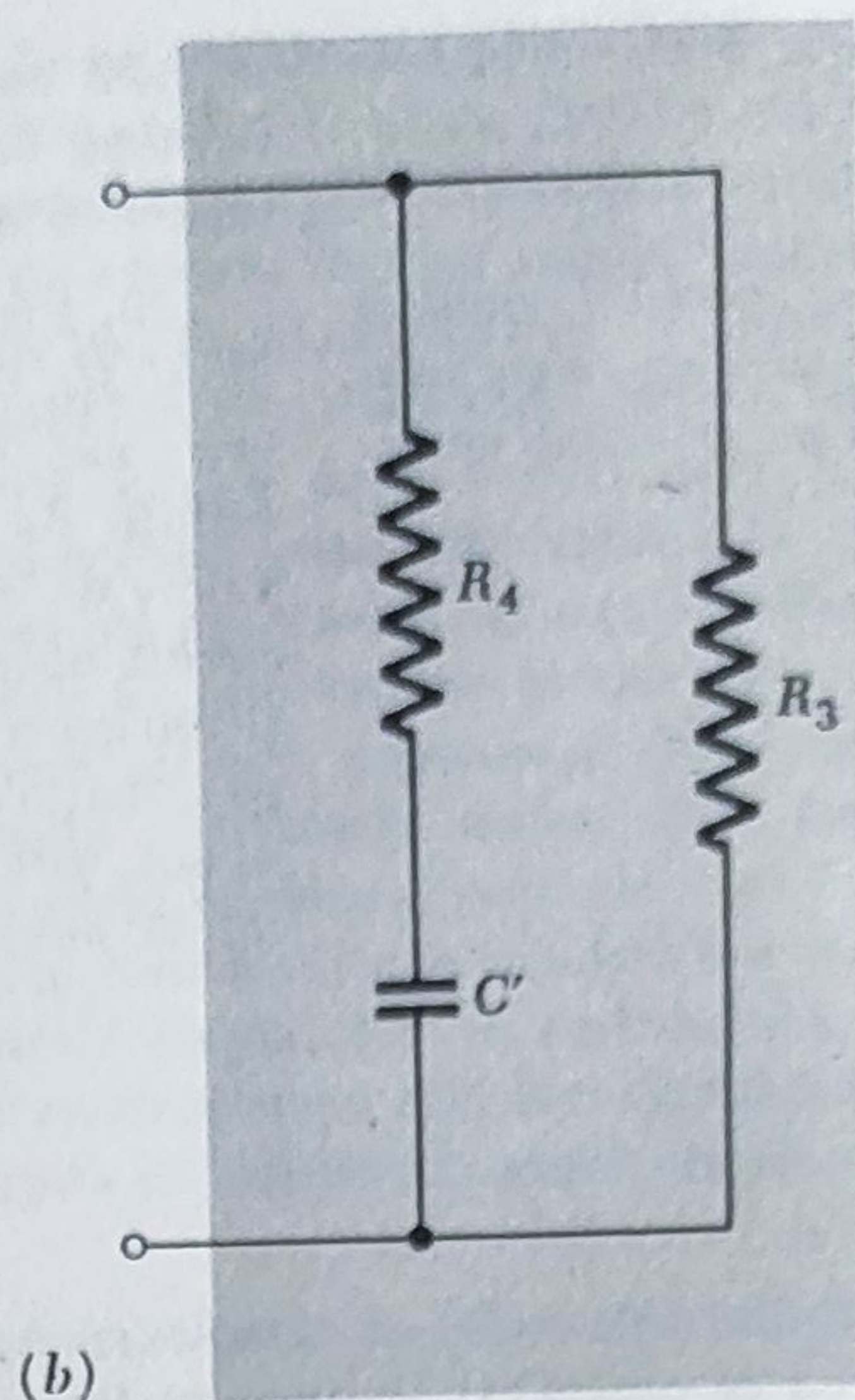
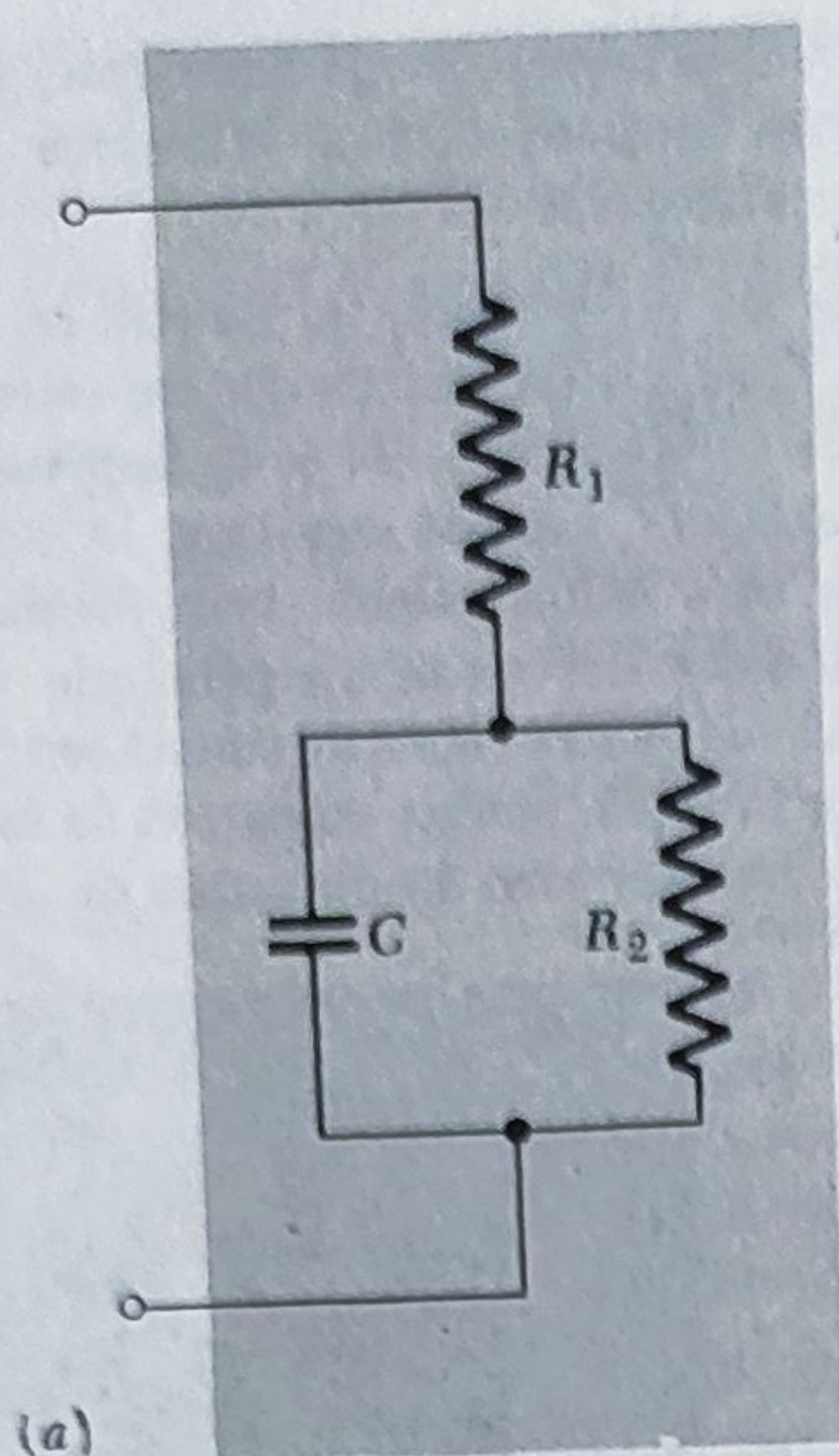


Fig. la problema 4.31

același în cele două circuite. Demonstrația vă va introduce o metodă destul de generală și puternică bazată pe principiul de superpoziție. Mai întâi, să considerăm ce se va întâmpla în circuitul din stînga dacă tensiunea între borne este un puls scurt:

$$U = 0, \quad t < 0; \quad U = U_0, \quad 0 < t < \Delta t; \quad U = 0, \quad t > \Delta t.$$

Adică, ținem bornele exterioare scurtcircuitate pînă la  $t = 0$ , îndepărtăm scurtcircuitul și legăm instantaneu o baterie pentru un timp scurt  $\Delta t$ , îndepărtăm bateria și reinstalăm instantaneu scurtcircuitul. Menținem timpul  $\Delta t$  atît de scurt încît tensiunea pe condensator poate



să ajungă doar la o fracțiune foarte mică din  $U_0$ . Calculând curentul prin condensator pe acest interval putem presupune că tensiunea completă se distribuie de-a lungul lui  $R_1$ . La momentul  $\Delta t$  condensatorul rămîne cu o oarecare cantitate de sarcină, pe care începe să o descarce prin  $R_1$  și  $R_2$  în paralel. O parte a acestui curent de descărcare apare drept curent în circuitul exterior. Astfel întreg răspunsul de curent la pulsul  $U(t)$  trebuie să arate asemănător cu partea (c) a figurii. Trebuie să aflați  $I_{max}$ ,  $I_{min}$  și constanta de timp a cozii lungi. Analizați acum în același mod circuitul din partea (b) a figurii. Arătați că un  $I(t)$  asemănător va fi observat drept răspuns la puls. Arătați că prin potrivirea lui  $R_3$ ,  $R_4$  și  $C'$  este posibil a face cele două răspunsuri identice. Aceasta este de fapt suficient pentru a dovedi că cele două circuite, cu valorile corect corelate, vor răspunde asemănător la orice  $U(t)$ . Aceasta deoarece orice  $U(t)$  poate fi privit drept superpoziția multor pulsuri; circuitele fiind lineare, răspunsurile lor vor fi în mod corespunzător superpoziția răspunsurilor la pulsurile individuale. De fapt răspunsul unui circuit la o funcție de comandă complicată  $U(t)$  este adeseori cel mai ușor de găsit prin analiza răspunsului la un puls scurt. Ați putea încerca aceasta pe unul din aceste circuite. Să presupunem că tensiunea aplicată este un puls dreptunghiular care *nu este scurt* în comparație cu constanta de timp  $RC$ . Morala pe care o aduce această problemă: Circuitele echivalente nu sînt totdeauna unice.

## Capitolul 5

5.11. Ce ar fi dacă sarcina ar fi variat cu viteza purtătorului de sarcină după factorul  $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ ? Estimați (doar ordinul de mărime) diferența în sarcina netă care ar putea fi așteptată între molecula de hidrogen și atomul de heliu. Presupuneți că energia cinetică a protonului crește de la ceva neglijabil pînă la aproximativ 1 Mev în trecerea de la molecula de  $H_2$  la nucleul de He, în timp ce energia cinetică a celor doi electroni crește prin cîteva zeci de volți, de la  $H_2$  la He. Dacă, în aceste circumstanțe, molecula de  $H_2$  s-ar fi întîmplat să fie accidental neutră, cît de mult exces de sarcină ați aștepta să găsiți într-un litru de heliu la presiune și temperatură normală? Care ar fi ordinul de mărime al cîmpului electric resultant?

5.12. Să presupunem că în sistemul laboratorului din figura 5.20 sarcinile pozitive sînt în repaus și se mișcă doar sarcinile negative. Efectuați deducerea forței asupra sarcinii de probă în mișcare în acest caz.



Aplicare a ideilor din Problema 5.9.

5.13. Într-un accelerator de particule de „fascicule încrucișate” un electron și un proton, fiecare avînd o energie de 2 GeV trec unul pe lângă celălalt mergînd în direcții opuse. Întîlnirea este atît de apropiată încît fiecare este deviat de la direcția inițială de zbor cu  $10^{-2}$  radiani. Folosiți rezultatele problemei 5.9 pentru a estima cea mai mică distanță de apropiere.

5.14. Ce densitate de sarcină necompensată pe fiecare din firele de cupru din aranjamentul figurii 6.3 ar fi necesară pentru a produce o forță prin interacție electrostatică egală în mărime cu aceea pe care am calculat-o pentru interacția magnetică? Estimați intensitatea cîmpului la suprafața unui fir cu diametrul de 1 mm care poartă o astfel de sarcină. Comparați mărimea acestui cîmp, în volt/cm, cu mărimea cîmpului magnetic la suprafața firului din acest exemplu. Este rezultatul accidental, sau puteți arăta că totdeauna trebuie să se întîmple astfel?

Se arată cum se transformă curentul și densitatea de sarcină lineară cînd există mai multe feluri de purtători de sarcină.

5.15. Să considerăm o sarcină liniară compusă, din multe feluri de purtători, fiecare cu propria sa viteză. Așa cum se vede în sistemul laboratorului, componenta  $k$  constă din  $n_k$  sarcini pe centimetru, de sarcină  $q_k$  fiecare, în mișcare cu viteza  $v_k = \beta_k c$ . În acest sistem, atunci, curentul total  $I$  și densitatea de sarcină liniară  $\lambda$  sînt date de:

$$I = c \sum_k n_k q_k \beta_k \quad \lambda = \sum_k n_k q_k.$$

Acum să trecem la un sistem în mișcare cu viteza  $\beta c$ . Așa cum am arătat în relația cu figura 5.20, vitezele și densitățile de sarcină se transformă astfel:

$$\beta'_k = \frac{\beta_k + \beta}{1 + \beta\beta_k} \quad n'_k = \frac{n_k \gamma'_k}{\gamma_k} \quad q'_k = q_k.$$

Arătați că în noul sistem

$$I' = \gamma(I + c\beta\lambda) \quad \lambda' = \gamma\left(\lambda + \frac{\beta I}{c}\right).$$

Aceasta arată că rezultatul nostru anterior este cu totul independent de model. El arată de asemenea, că dacă o sarcină are curent *total* zero și sarcină *totală* zero într-un sistem, el are astfel în *toate* sistemele, orice ar face curenții și sarcinile componente — un fapt simplu plăcut care probabil nu este atît de evident.

Un studiu  
Rowland

Exercițiu

că doi  
sînt un  
Doi sol  
un soles  
infinit  
de dep  
astfel:

(a)  
figurii,  
este ap  
centru.  
mai pu  
(b)  
figurii,  
înfășur

Fig. la



Aplicare a ideilor din Problema 5.9.

5.13. Într-un accelerator de particule de „fascicule încrucișate” un electron și un proton, fiecare avînd o energie de 2 GeV trec unul pe lîngă celălalt mergînd în direcții opuse. Întîlnirea este atît de apropiată încît fiecare este deviat de la direcția inițială de zbor cu  $10^{-2}$  radiani. Folosiți rezultatele problemei 5.9 pentru a estima cea mai mică distanță de apropiere.

5.14. Ce densitate de sarcină necompensată pe fiecare din firele de cupru din aranjamentul figurii 6.3 ar fi necesară pentru a produce o forță prin interacție electrostatică egală în mărime cu aceea pe care am calculat-o pentru interacția magnetică? Estimați intensitatea cîmpului la suprafața unui fir cu diametrul de 1 mm care poartă o astfel de sarcină. Comparați mărimea acestui cîmp, în volt/cm, cu mărimea cîmpului magnetic la suprafața firului din acest exemplu. Este rezultatul accidental, sau puteți arăta că totdeauna trebuie să se întîmple astfel?

Se arată cum se transformă curentul și densitatea de sarcină lineară cînd există mai multe feluri de purtători de sarcină.

5.15. Să considerăm o sarcină liniară compusă, din multe feluri de purtători, fiecare cu propria sa viteză. Așa cum se vede în sistemul laboratorului, componenta  $k$  constă din  $n_k$  sarcini pe centimetru, de sarcină  $q_k$  fiecare, în mișcare cu viteza  $v_k = \beta_k c$ . În acest sistem, atunci, curentul total  $I$  și densitatea de sarcină liniară  $\lambda$  sînt date de:

$$I = c \sum_k n_k q_k \beta_k \quad \lambda = \sum_k n_k q_k.$$

Acum să trecem la un sistem în mișcare cu viteza  $\beta c$ . Așa cum am arătat în relația cu figura 5.20, vitezele și densitățile de sarcină se transformă astfel:

$$\beta'_k = \frac{\beta_k + \beta}{1 + \beta\beta_k} \quad n'_k = \frac{n_k \gamma'_k}{\gamma_k} \quad q'_k = q_k.$$

Arătați că în noul sistem

$$I' = \gamma(I + c\beta\lambda) \quad \lambda' = \gamma\left(\lambda + \frac{\beta I}{c}\right).$$

Aceasta arată că rezultatul nostru anterior este cu totul independent de model. El arată de asemenea, că dacă o sarcină are curent *total* zero și sarcină *totală* zero într-un sistem, el are astfel în *toate* sistemele, orice ar face curenții și sarcinile componente — un fapt simplu plăcut care probabil nu este atît de evident.

Un s  
Rowla

Exerciț

că doi  
sînt un  
Doi sol  
un sole  
infinit  
de depa  
astfel:

(a) 1

figurii,  
este ap  
centru.

mai pu  
(b) 1

figurii,  
înfășura

Fig. 1a

E<sub>2</sub>



## Capitolul 6

Un studiu al experienței lui Rowland.

**6.16.** Calculați aproximativ câmpul magnetic care este de așteptat chiar deasupra discului rotitor în experiența lui Rowland. Luați datele relevante din descrierea din pagina lucrării sale care este reprodusă în figura 6.27. Veți avea nevoie să cunoașteți de asemenea că potențialul discului rotitor, față de plăcile puse la pământ de deasupra și de dedesubt, a fost în jur de 10 kV în cele mai multe din cazuri. Această informație este desigur dată mai departe în articolul său, ca o descriere a unei părți cruciale a aparatului, magnetometrul „astatic” arătat în tubul vertical din stînga. Acesta este un montaj în care două ace magnetice, orientate opus, sînt legate rigid unul de altul pe o suspensie astfel încît cuplurile produse de câmpul terestru se anulează unul pe celălalt. Câmpul produs de discul rotitor, acționînd în principal asupra acului mai apropiat, poate fi atunci detectat în prezența unui câmp uniform mult mai slab. Aceasta nu a fost în nici un caz singura precauție pe care Rowland a trebuit să o ia.

Exercițiu în superpoziție.

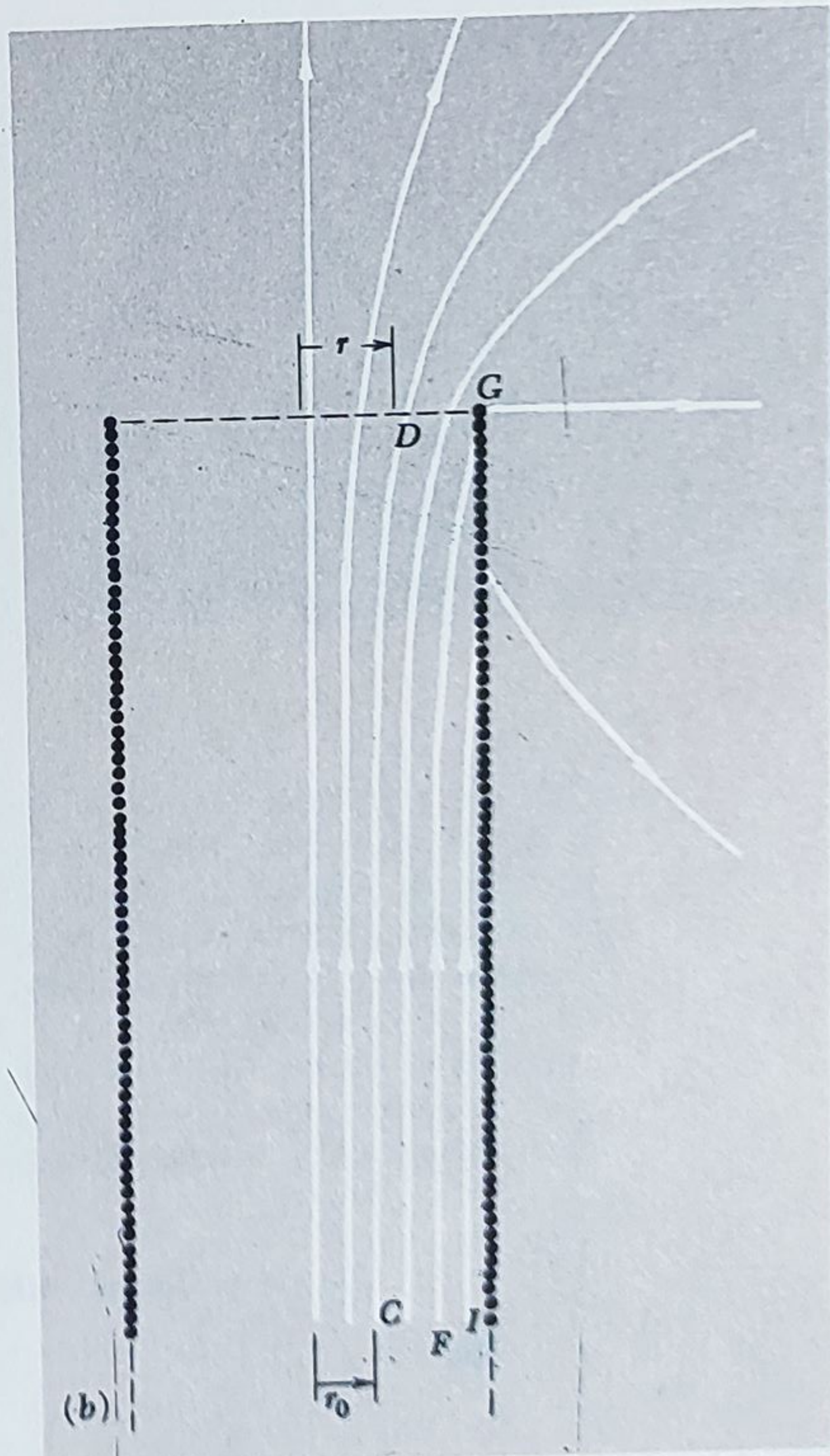
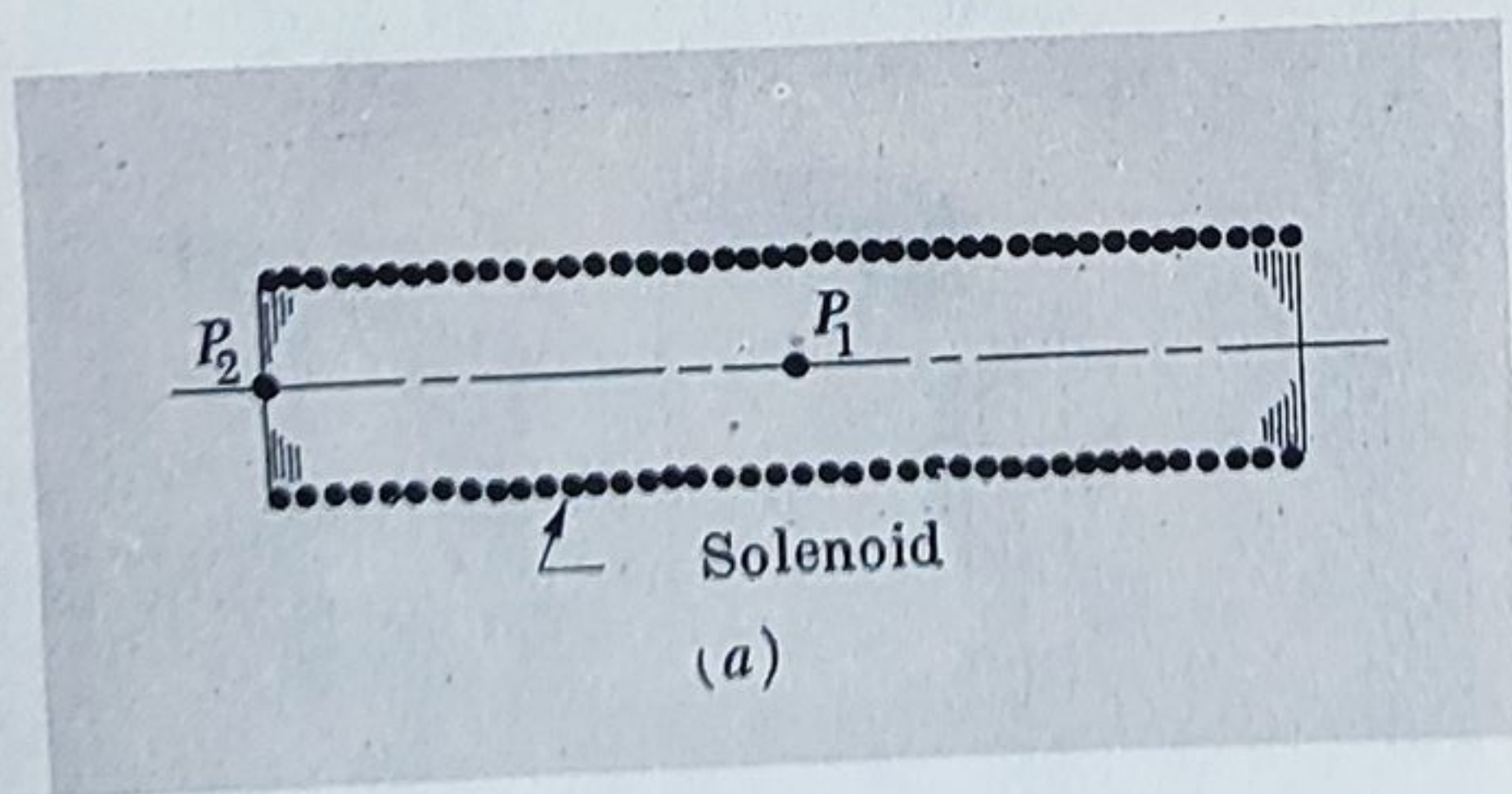
**6.17.** Un număr de fapte simple despre câmpul unui solenoid pot fi găsite folosind superpoziția. Ideea este

că doi solenoizi de același diametru și lungime  $L$ , dacă sînt uniți la capete, alcătuiesc un solenoid de lungime  $2L$ . Doi solenoizi semi-infiniți îmbinați la un loc alcătuiesc un solenoid infinit și așa mai departe. (Un solenoid semi-infinit este unul care are un capăt aici și celălalt infinit de departe.) Iată cîteva lucruri pe care le puteți arăta astfel:

(a) În solenoidul cu lungime finită din partea (a) a figurii, câmpul magnetic pe axă în punctul  $P_2$  la un capăt este aproximativ jumătate din câmpul în punctul  $P_1$  la centru. (Este ceva mai mare decît jumătate, sau ceva mai puțin decît jumătate?)

(b) În solenoidul semi-infinit arătat în partea (b) a figurii, linia de câmp FGH care trece chiar prin capătul înfășurării este o linie dreaptă de la G la infinit.

Fig. la problema 6.17.





(c) Fluxul lui  $B$  prin fața de la capătul solenoidului semiinfinit este exact jumătate din fluxul prin bobină la o distanță mare în interior.

(d) Orice linie de câmp care este  $r_0$  cm de la axă departe în interiorul bobinei iese la capătul bobinei la o rază  $r_1$  care este exact  $\sqrt{2}r_0$ . Arătați că aceste afirmații sint corecte. Ce altceva puteți găsi?

Provocare la invenție.

6.18. Un mod de a produce un câmp magnetic foarte uniform este de a folosi un solenoid foarte lung și de a lucra doar în secțiunea mediană din interiorul său. Aceasta este adesea neconvenabil, și înseamnă risipă de spațiu și putere. Puteți sugera moduri în care un număr de bobine sau solenoizi scurți ar putea fi combinați în mod convenabil pentru a obține o bună uniformitate a câmpului pe o regiune limitată? (După ce ați lucrat asupra acestei probleme, priviți la „bobine Helmholtz” în indexul oricărei cărți de referință asupra electricității și magnetismului, și vedeți dacă vreuna dintre invențiile dumneavoastră se aseamănă cu aranjamentul descris acolo.)

6.19. O bobină este înfășurată uniform pe un tor de secțiune transversală dreptunghiulară. Există cu totul  $N$  spire de sîrmă. Doar cîteva sînt arătate în figură. Cu atît de multe spire, vom presupune că curentul pe suprafața torului curge exact radial, pe fețele inelare și exact longitudinal pe suprafețele cilindrice interioară și exterioară. Mai întîi convingeți-vă că în această presupunere simetria cere ca câmpul magnetic să fie orientat peste tot într-o direcție „circumferențială”, adică, toate liniile de câmp sînt cercuri în jurul axei torului. În al doilea rînd, arătați că câmpul este zero în toate punctele din afara torului, inclusiv interiorul găurii centrale. În al treilea rînd, găsiți mărimea câmpului în interiorul torului, ca funcție de rază.

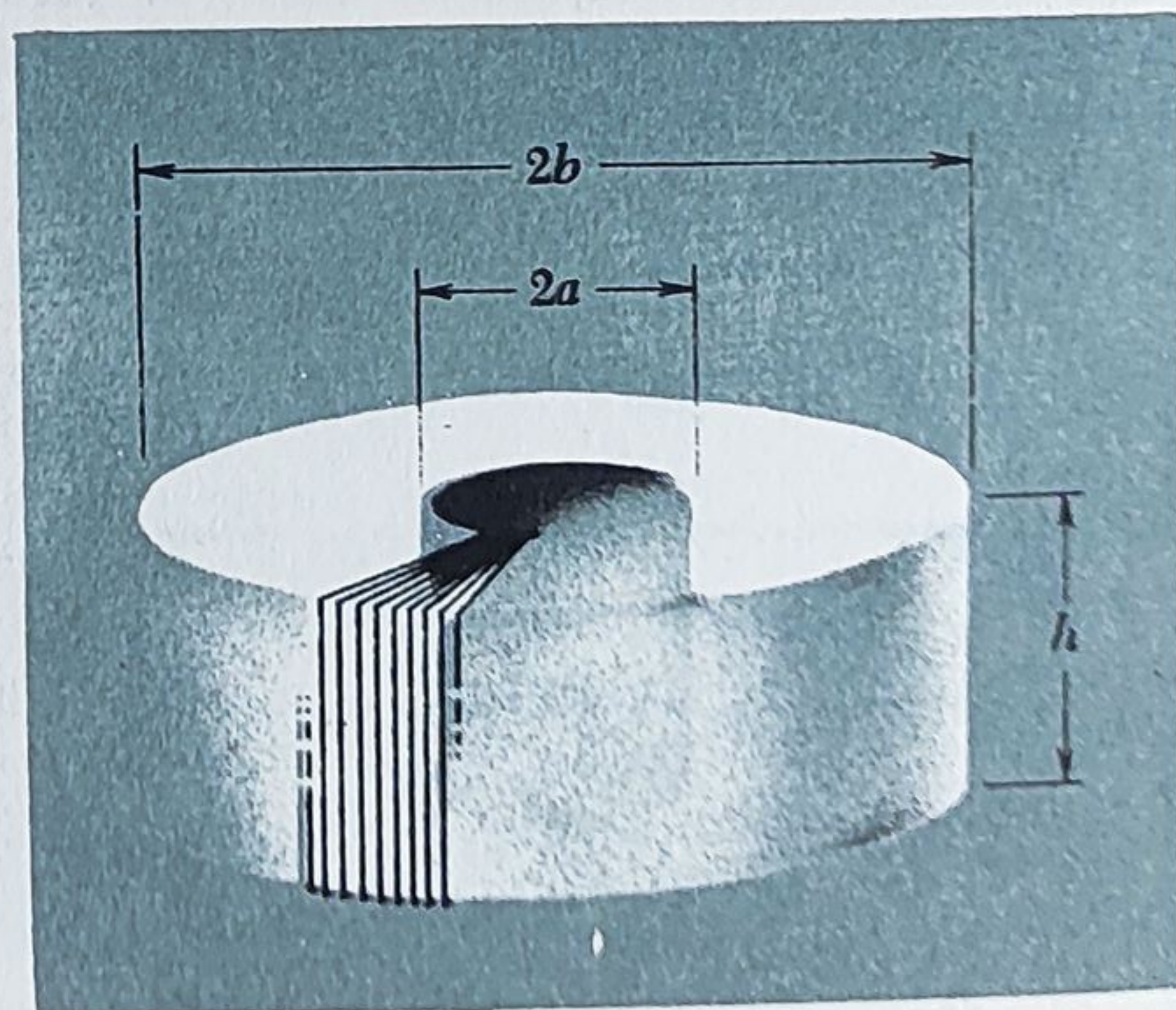


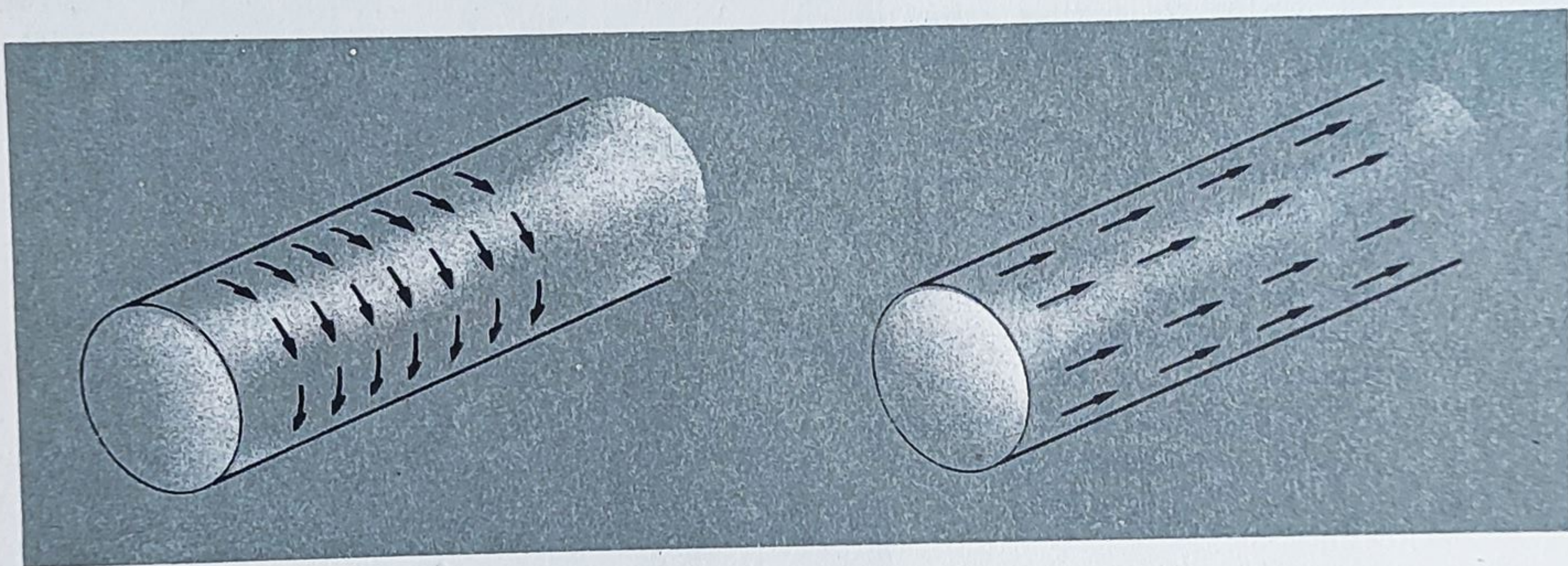
Fig. la problema 6.19.



6.20. Pentru o experiență magnetică delicată, un fizician vrea să anuleze câmpul magnetic al pământului pe un volum în mărime de circa 30 pe 30 cm, astfel încât câmpul rezidual din această regiune nu va fi mai mare de 10 miligauss în orice punct. Intensitatea câmpului terestru în acest loc este 0,55 gauss, făcând un unghi de  $30^\circ$  cu verticala. (Câmpul terestru însuși nu variază în nici într-un caz atât de mult în acea regiune, dar într-un laborator există adesea perturbații locale.) Sugați un montaj de bobine potrivite pentru scopul propus, și estimați numărul de amperi-spiră necesari pentru sistemul de compensare.

*Întrebare pentru discuție.*

6.21. Orice solenoid obișnuit este în realitate o elice. Există o anumită componentă de curgere longitudinală care însoțește curgerea circumferențială principală, deoarece înfășurarea trebuie să progreseze de la un capăt la celălalt. Să presupunem că privim curentul ca superpoziție unui strat de curent complet circumferențial și a unui „tub” de curent complet longitudinal, așa cum se arată în figură. Descrieți câmpul magnetic al combinației, atât în interiorul cât și în exteriorul cilindrului. (Presupuneți că cilindrul este infinit lung.) Puteți corela raportul intensităților câmpului în interiorul și în exteriorul cilindrului cu panta de înfășurare a elicei pe care această distribuție de curent se presupune că o reprezintă?



Problema 6.21.

*Cuplul asupra unei bucle de curent.*

6.22. Scopul principal al acestei probleme este de-a găsi cuplul care acționează asupra unei bucle de curent într-un câmp magnetic constant. Câmpul de inducție constantă  $\mathbf{B}$  este orientat într-o direcție oarecare în spațiu. Vom orienta coordonatele astfel încât  $\mathbf{B}$  să fie perpendicular pe axa  $x$ , și bucla de curent să se afle în planul  $xy$ , cum se arată în figură. Forma și mărimea buclei sînt arbitrare; putem gândi despre curent ca fiind menținut prin fire răsucite asupra cărora orice forță



netă este zero. Să considerăm un mic element al buclei și să aflăm contribuția sa la cuplul în jurul axei  $x$ . Doar componenta  $z$  a forței asupra sa va fi implicată, și deci numai componenta  $y$  a câmpului de inducție  $\mathbf{B}$ , pe care am

indicat-o pe diagramă ca  $y\hat{B}_y$ . Formați integrala care va da cuplul total. Arătați că această integrală va da, pînă la factori constanți, *aria* buclei. *Momentul magnetic* al unei bucle de curent este definit drept un vector  $\mathbf{m}$  de mărime  $Ia$  unde  $I$  este curentul în amperi,  $a$  este aria buclei în metri pătrați, și direcția vectorului este normală la buclă cu o relație de șurub drept față de curent, cum se arată în figură. (Vom întâlni bucla de curent și momentul ei magnetic din nou în capitolul 10.) Arătați acum că rezultatul dumneavoastră implică faptul că cuplul  $\mathbf{N}$  asupra oricărei bucle de curent este dat de ecuația vectorială

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Care este forța totală asupra buclei?

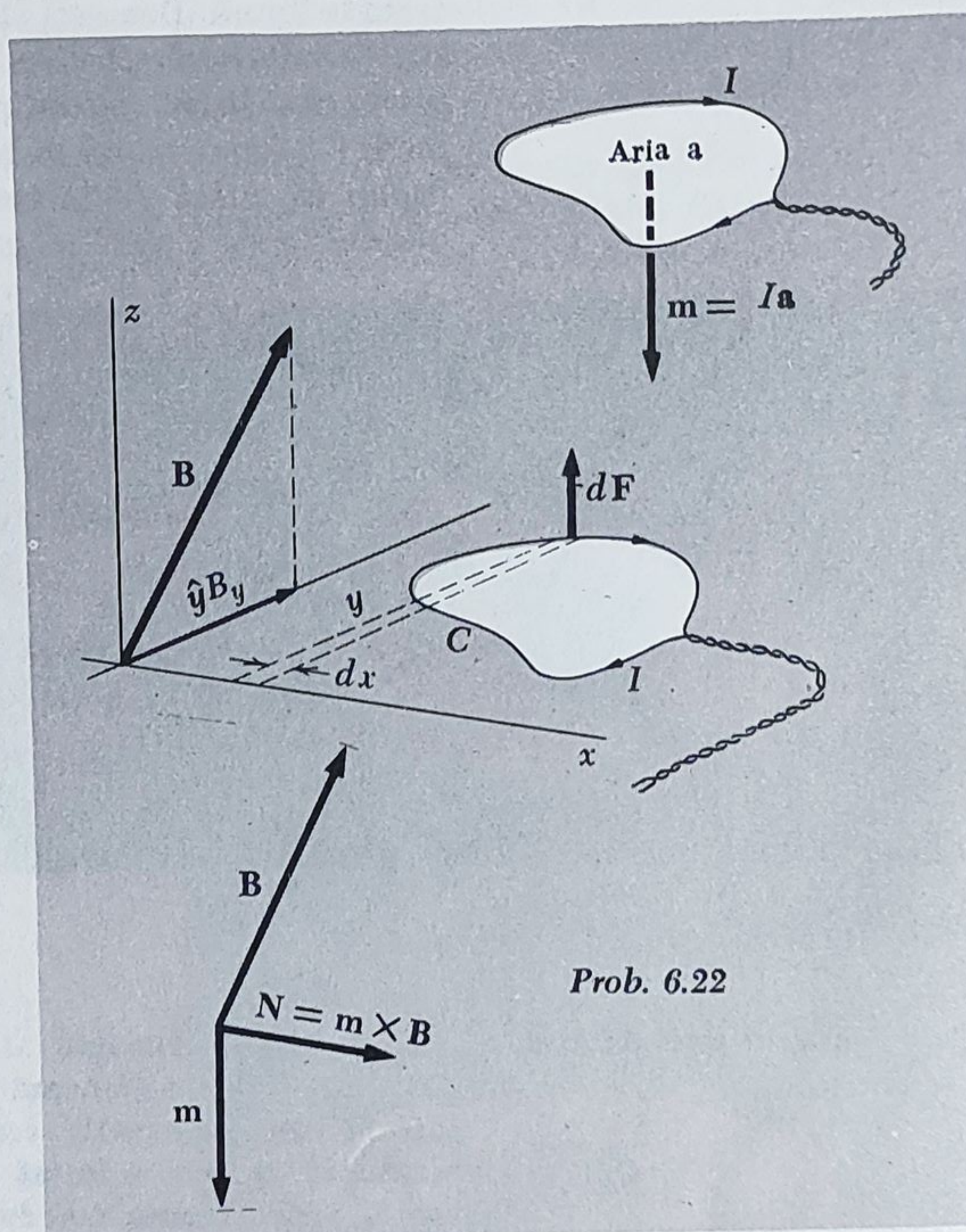


Fig. la problema 6.22.

**6.23.** Pentru unele scopuri este folositor de a accelera ioni de hidrogen negativi într-un ciclotron. Un ion de hidrogen negativ,  $\text{H}^-$ , este un atom de hidrogen cărui i s-a atașat un electron suplimentar. Atașamentul este



foarte slab; un câmp electric de numai  $4,5 \times 10^6$  volt/cm (un câmp destul de mic față la scara atomică) va elibera un electron, lăsând un atom de hidrogen. Dacă vrem să accelerăm ioni de  $H^-$  până la o energie cinetică de 1 GeV, care este câmpul magnetic cel mai înalt pe care îl putem întrebuința pentru ca să îi ținem pe o orbită circulară până la energia finală? (Pentru a găsi  $\gamma$  din această problemă aveți nevoie numai de masa de repaus a ionului de  $H^-$ , care este desigur practic identică cu aceea a protonului, aproximativ 1 GeV.)

*Întrebare pentru discuție.*

**6.24.** Un inventator propune să se facă un vitezometru de avion bazat pe măsurarea câmpului electric „indus”  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Discutați valoarea acestei propuneri. Este relevant pentru discuție faptul că în atmosfera terestră se găsesc în mod obișnuit câmpuri electrostatice, de mărime și direcție variabilă destul de greu de prezis, de ordinul a 3 volți/cm. La un moment dat a fost emisă o teorie a orientării porumbelului călător, după care porumbelul, știindu-și într-un mod oarecare viteza, simte mărimea câmpului „indus”  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , prin aceasta determinând  $\mathbf{B}$  și de aici ceva despre localizarea pe pământ. Are aceasta sens? Cum se pune problema măsurării lui  $\mathbf{B}'$ , în vehiculul în mișcare? Cât de multă imprecizie în valoarea dedusă a lui  $\mathbf{B}$  ar putea fi introdusă de câmpurile electrice atmosferice necunoscute de întindere mare și de ordinul de mărime menționat mai sus?

**6.25.** O traversă metalică de masă  $m$  alunecă fără frecare pe două șine conductoare paralele lungi la distanța  $b$  între ele. O rezistență  $R$  este conectată de-a lungul șinelor la un capăt; în comparație cu  $R$ , rezistența barei și a șinelor este neglijabilă. Există un câmp uniform de inducție  $\mathbf{B}$  perpendicular pe planul figurii. La timpul  $t = 0$  i se dă traversei o viteză  $v_0$  spre dreapta. Ce se întâmplă apoi? (a) Se oprește vreodată traversa? Dacă da, când? (b) Cât de departe merge? (c) Cum apare conservarea energiei?

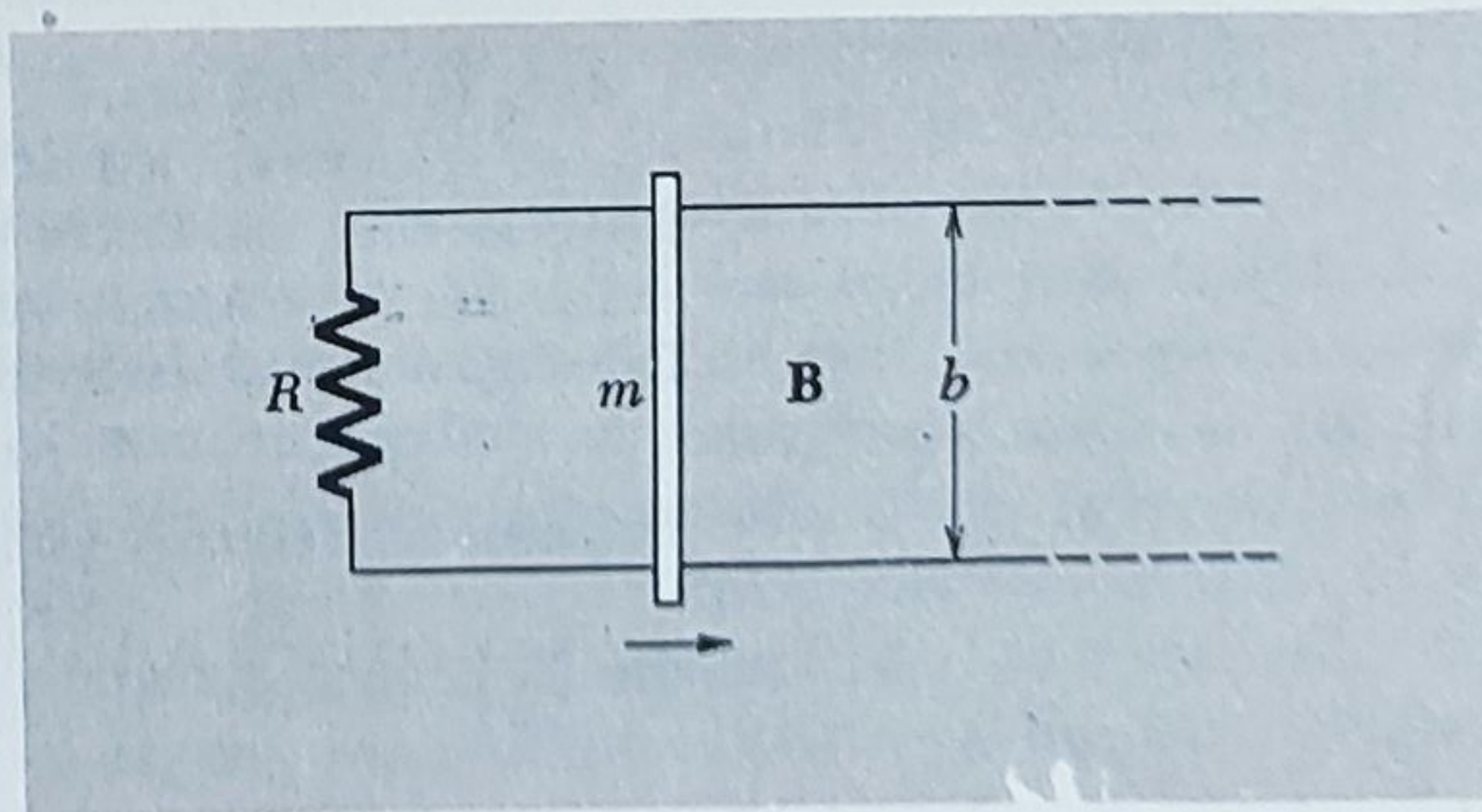


Fig. la problema 6.25.



6.26. Nu există nimic aparte în definirea vitezei relative a sistemelor  $F$  și  $F'$  de-a lungul direcției  $\hat{x}$  cum am făcut în deducerea ecuației 58. Dacă am fi ales viteza de-a lungul axei  $\hat{y}$ , cum ar arăta transformarea? Dacă preferați, puteți să deduceți în schimb formule generale pentru  $E_{\perp}$ ,  $E_{\parallel}$  etc., unde indicii indică o componentă paralelă sau perpendiculară pe  $v$ .

6.27. Presupuneți că aveți un câmp electric uniform  $E_y$  în direcția  $y$  și un câmp magnetic uniform  $B_z$  în direcția  $z$ ; presupuneți  $E_y < cB_z$ . Găsiți un sistem de referință în care câmpul electric este zero. Calculați valoarea lui  $B$  în acest sistem. Presupuneți  $E_y > cB_z$ . În acest caz, puteți găsi un sistem în care câmpul magnetic este zero?

*Paradox?*

6.28. Un student spunea, „Aproape m-ați convins că forța dintre curenți, pe care am crezut-o a fi magnetism, este explicată prin câmpul electric al sarcinilor în mișcare. Dar dacă este așa, de ce nu ecranează placa metalică din figura 5.1,  $c$  un fir de influența celui alt?” Puteți explica aceasta?

*Câmpul în jurul unei pinze de curent.*

6.29. Să presupunem că avem o situație în care componenta câmpului magnetic paralelă cu planul unui strat ar fi avut aceeași mărime de ambele părți, dar și-ar fi schimbat direcția cu  $90^\circ$  la trecerea prin strat. Ce urmează de aici? Ar exista o forță asupra stratului? S-ar aplica formula noastră pentru forța asupra unui strat de curent la astfel de cazuri?

*Tensiuni produse de presiunea magnetică.*

6.30. Să presupunem că solenoidul descris în prob. 6.7 este folosit pentru a produce un câmp foarte puternic pentru un timp foarte scurt conectându-l scurt la o sursă de înaltă tensiune, pentru a forța un curent foarte mare prin el. Lăsând la o parte toate celelalte limitări, să considerăm limita impusă de rezistența de rupere a firului. Presiunea magnetică, ca și presiunea într-un furtun, va avea tendința să desfacă solenoidul. Dacă rezistența de rupere a firului este  $2 \times 10^4$  newton/cm<sup>2</sup>, care este câmpul cel mai puternic care ar putea fi conținut în acel solenoid?

R. 4,2 tesla.

*Efectul Hall.*

6.31. Într-o măsurare a efectului Hall în sodiu metalic, câmpul transversal a fost determinat ca fiind 25 microvolți/cm cînd densitatea de curent prin conductorul de sodiu era 1 000 A/cm<sup>2</sup>, într-un câmp magnetic de 1 tesla. Calculați numărul electronilor de conducție pe centimetru cub implicat de această observație și comparați-l cu numărul de atomi din 1 cm<sup>3</sup> de sodiu (densitatea sodiului:

$$970 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}).$$



## Capitolul 7

7.16. Faraday descrie cu următoarele cuvinte o încercare nereușită de a detecta un curent indus când o parte din circuit constă din apă în mișcare prin câmpul magnetic terestru:

„Am făcut de aceea experiențe la Podul Waterloo, întinzînd un fir de cupru de nouă sute șazeci de picioare\* lungime de-a lungul podului, lăsînd de la extremități alte fire cu plăci întinse de metal atașate lor pentru a completa contactul cu apa. Astfel firul și apa alcătuiau un circuit conductor; și cînd apa venea sau pleca cu marea, speram să obțin curenți. Am obținut mereu deviații la galvanometru, dar ele erau foarte neregulate, și se datorau altor cauze decît aceleia cercetate. Starea diferită a apei în ceea ce privește puritatea pe cele două maluri ale râului; diferența de temperatură, mici diferențe în plăci, în sudura folosită, în contactul mai mult sau mai puțin perfect făcut prin răsucire; toate produceau efecte; și deși am experimentat doar asupra apei care trecea printre arcadele centrale; am folosit plăci de platină în loc de cupru (deși) am luat toate precauțiile, nu am putut după trei zile să obțin nici un rezultat satisfăcător (*Cercetări experimentale în electricitate*, vol. I, p. 55, Londra, 1839)“.

Presupuneți că componenta verticală a câmpului a fost  $5 \times 10^{-5}$  tesla, faceți o apreciere rezonabilă asupra vitezei curenților de maree pe Tamisa și estimați mărimea tensiunii induse pe care Faraday încerca să o măsoare.

7.17. Un cadru metalic pătratic este situat, cum se arată în figură, între polii unui electromagnet. Latura de sus a cadrului se află într-o regiune de câmp magnetic orizontal uniform de intensitate  $B$ . Latura de jos a cadrului este în afara regiunii magnetice unde câmpul, deși nenul, este neglijabil în această problemă. Arătați că dacă cadrul este lăsat liber și cade sub acțiunea propriei greutate, el va primi o viteză în jos care depinde doar de  $B$ , pentru un material de cadru dat, și este independentă de mărimea și secțiunea firului sau barei din care este alcătuit. Care este această viteză, în m/sec, dacă  $B$  este 1,5 tesla iar cadrul este alcătuit din aluminiu (densitate  $2,7 \text{ g/cm}^3$ , rezistivitate  $2,8 \times 10^{-8} \text{ ohm-cm}$ )? Cît de departe va cădea cadrul pînă va atinge viteza finală?

\* 1 picior = 30,47 cm (N. trad.).



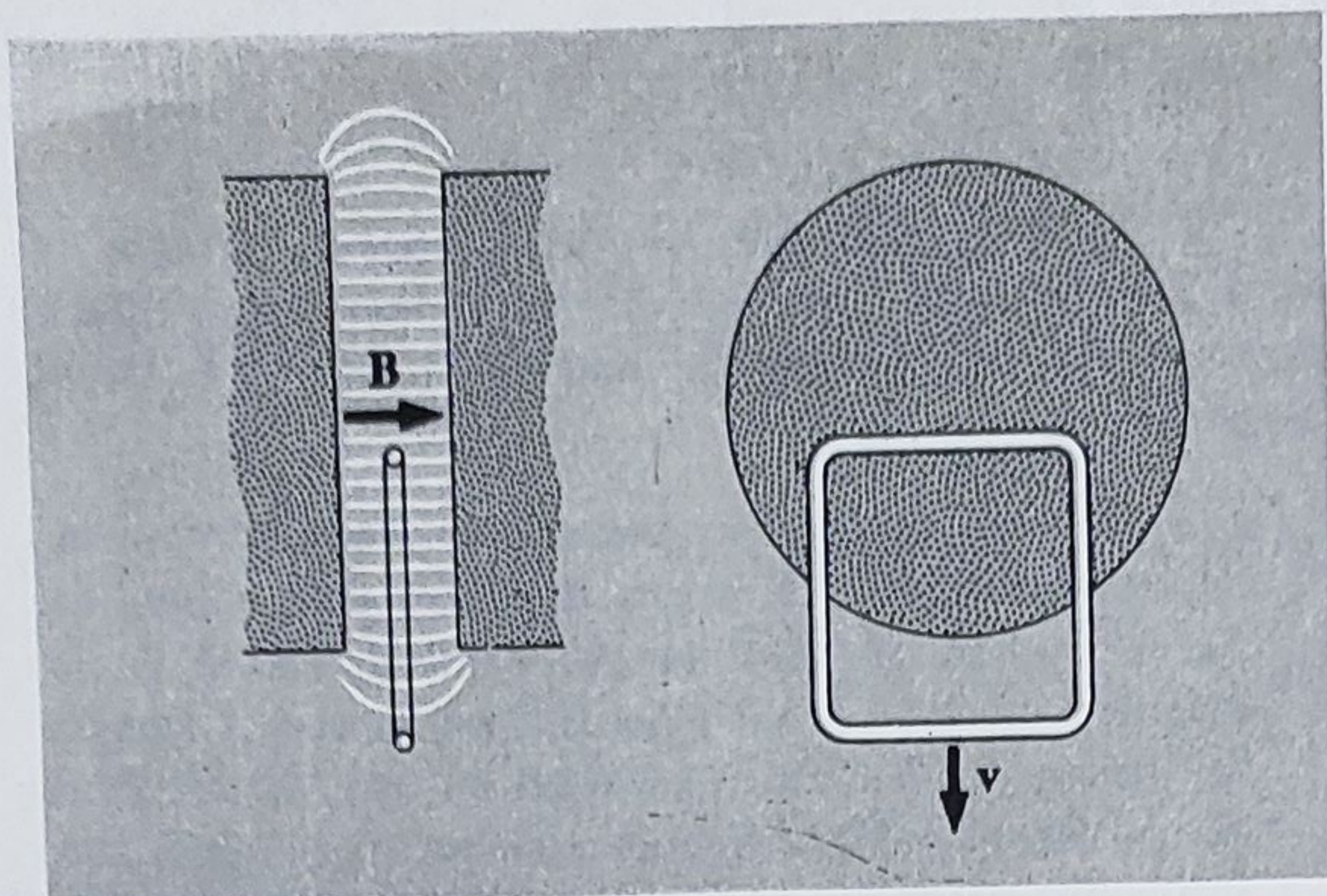


Fig. la problema 7.17.

*Întrebare pentru discuție.*

7.18. Să presupunem că bucla care se mișcă prin câmpul  $B$  al bobinei din figura 7.6 este făcută din sîrmă de rezistență foarte mică. Va produce forța electromotoare  $\mathcal{E}$  curgerea unui curent enorm în jurul buclei? Fie  $I_2$  curentul care este făcut să treacă prin buclă și  $B_2$  câmpul magnetic al acestui curent. Ce puteți spune despre relația dintre  $B_2$  și inducția  $B$ ? Puteți afla ce s-ar putea întâmpla dacă bucla ar fi fost făcută din fire supraconductoare, cu rezistența exact zero?

*O întrebare pentru a clarifica înțelesul fluxului printr-un circuit.*

7.19. Discutați implicațiile teoremei  $\Phi_{12} = \Phi_{21}$  în cazul inelelor concentrice mare și mic din figura 7.20. Cu un curent dat  $I_1$  în inelul exterior, evident  $\Phi_{21}$ , fluxul prin inelul interior, descrește dacă  $R_1$  este mărită, deoarece câmpul la centru devine mai slab. Dar cu curent fixat în inelul interior, de ce  $\Phi_{12}$ , fluxul prin inelul exterior, descrește cînd  $R_1$  crește, menținînd  $R_2$  constant? Trebuie să se facă astfel pentru a satisface teorema.

*Aplicație a teoremei de reciprocitate a inductanței mutuale.*

7.20. Puteți imagina un mod de a folosi teorema  $\Phi_{21} = \Phi_{12}$  pentru a găsi intensitatea câmpului magnetic datorat unui curent inelar în planul inelului la o distanță de la inel mult mai mare decît raza? (Indicație: Considerați efectul unei mici variații  $\Delta R_1$  în raza inelului exterior din figura 7.20; aceasta trebuie să aibă același efect asupra lui  $\Phi_{12}$  și asupra lui  $\Phi_{21}$ .)

*Inductanța mutuală a solenozilor concentrici.*

7.21. Figura arată un solenoid de rază  $a_1$  și lungime  $b_1$  situat în interiorul unui solenoid mai mare de rază  $a_2$  și lungime  $b_2$ . Numărul total de spire este  $N_1$  pe bobina interioară,  $N_2$  pe cea exterioară. Dezvoltați o formulă pentru inductanța mutuală  $M$ .



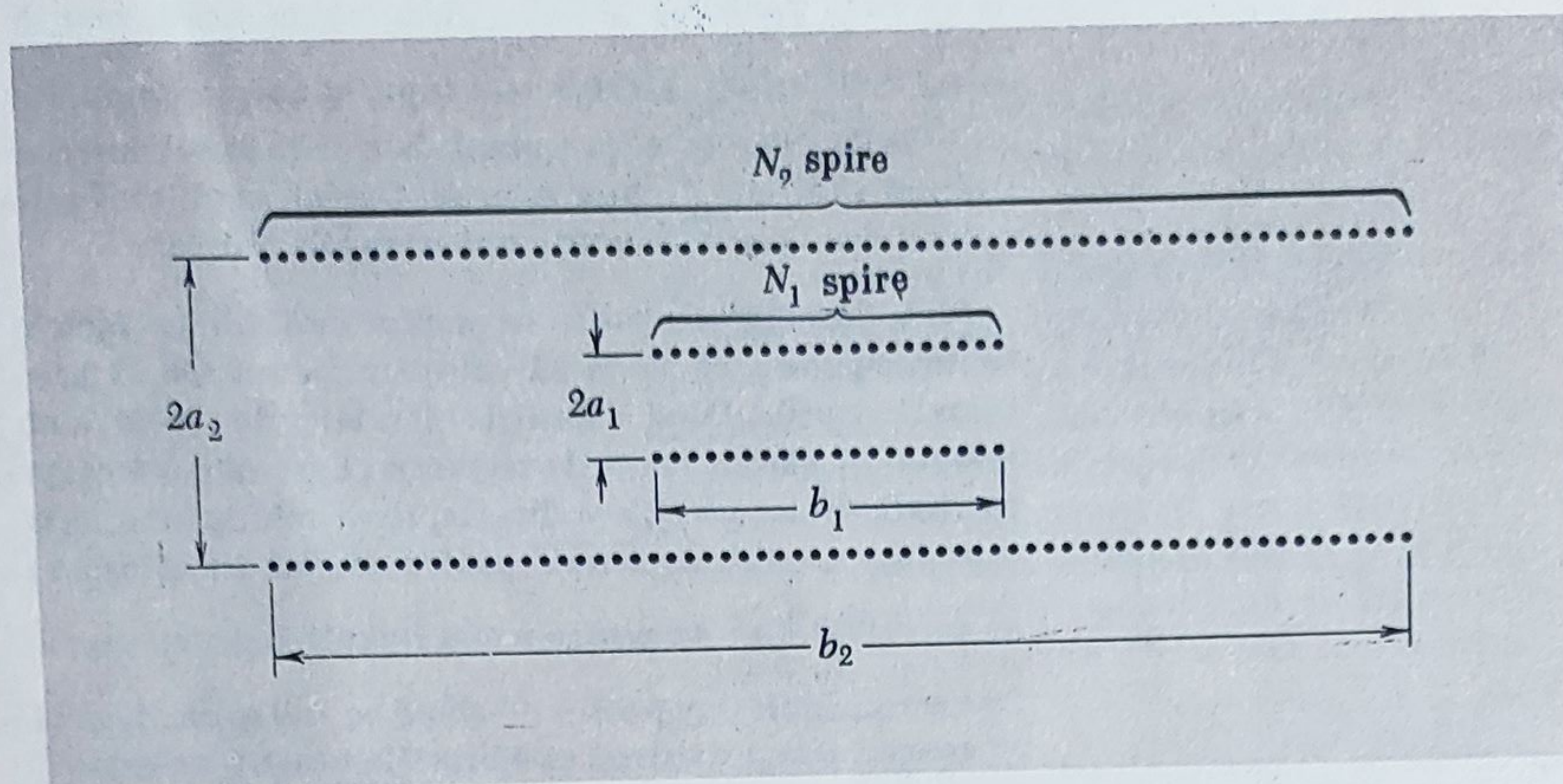


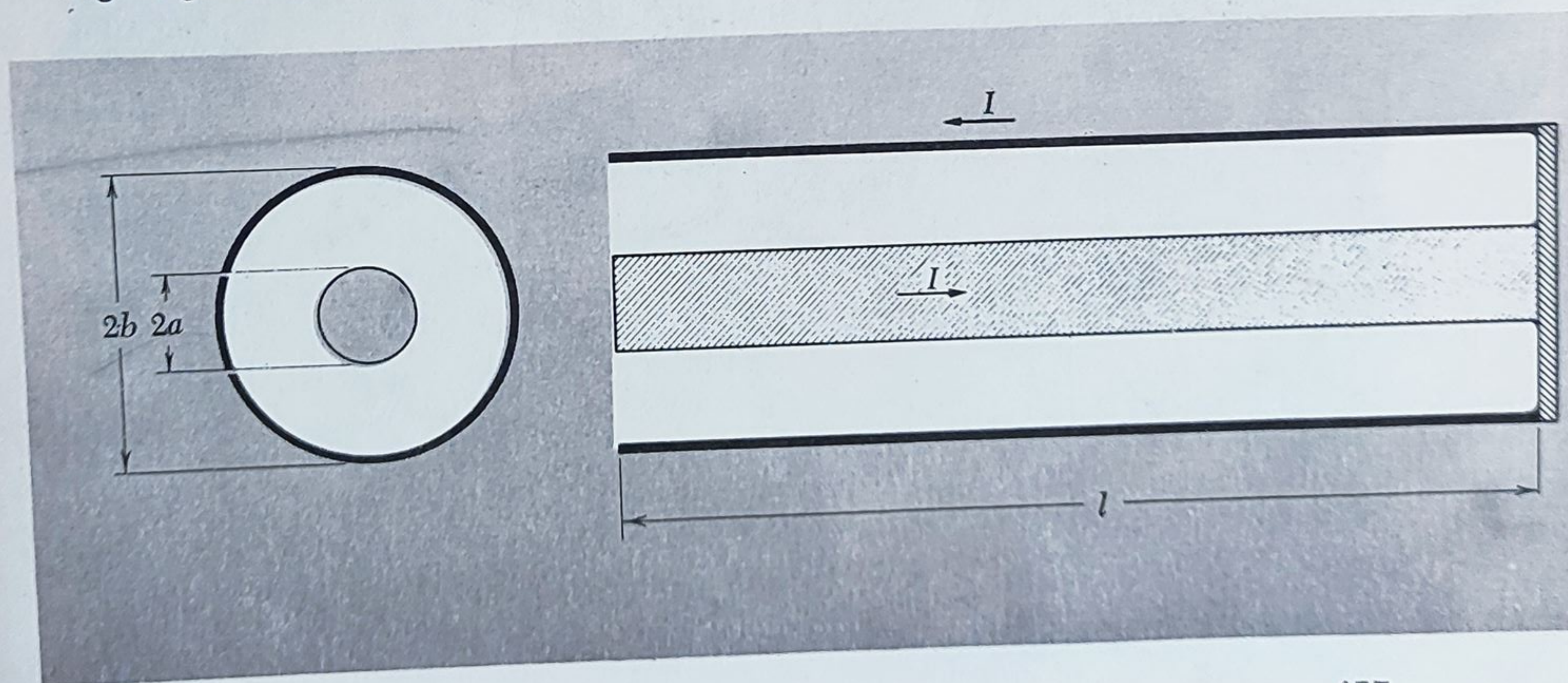
Fig. la problema 7.21.

Autoinductanța calculată cu ajutorul relației de energie.

**7.22.** Conductorul interior al liniei de transmisie coaxiale din figură constă dintr-o bară metalică solidă de rază  $a$ . Conductorul exterior este un tub metalic subțire de rază  $b$ . La un capăt un disc metalic este sudat la ambii conductori. Vrem să prezicem auto-inductanța  $L$  a unei secțiuni a liniei de lungime. Să presupunem că un curent care trece prin conductorul interior este distribuit uniform pe secțiunea barei. Pentru un curent dat  $I$  care este intensitatea câmpului magnetic  $B$  ca funcție de rază, atât în interiorul barei cât și în spațiul inelar?

Calculați energia totală înmagazinată în câmpul magnetic. Folosiți acum relația generală, energia înmagazinată

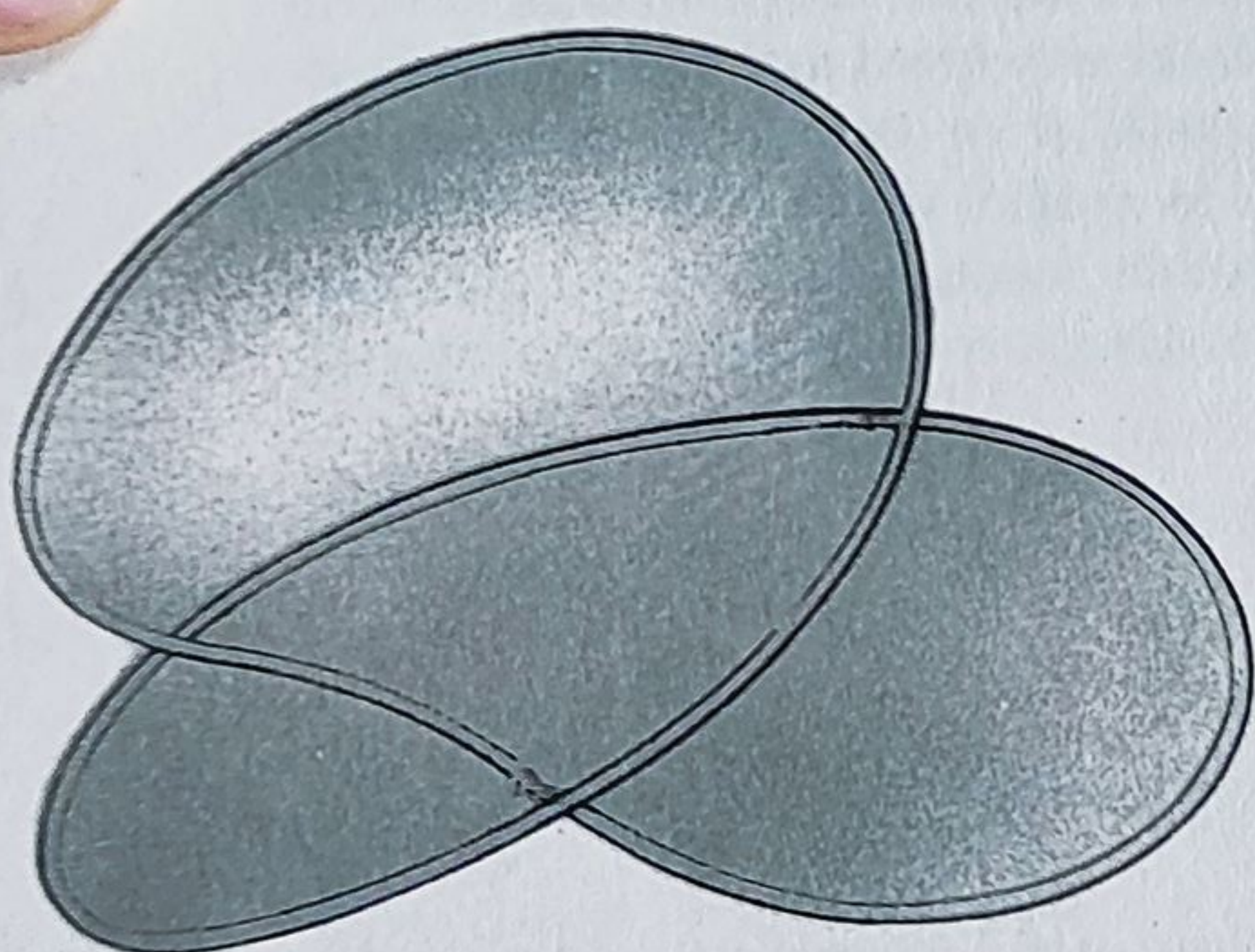
Fig. la problema 7.22.



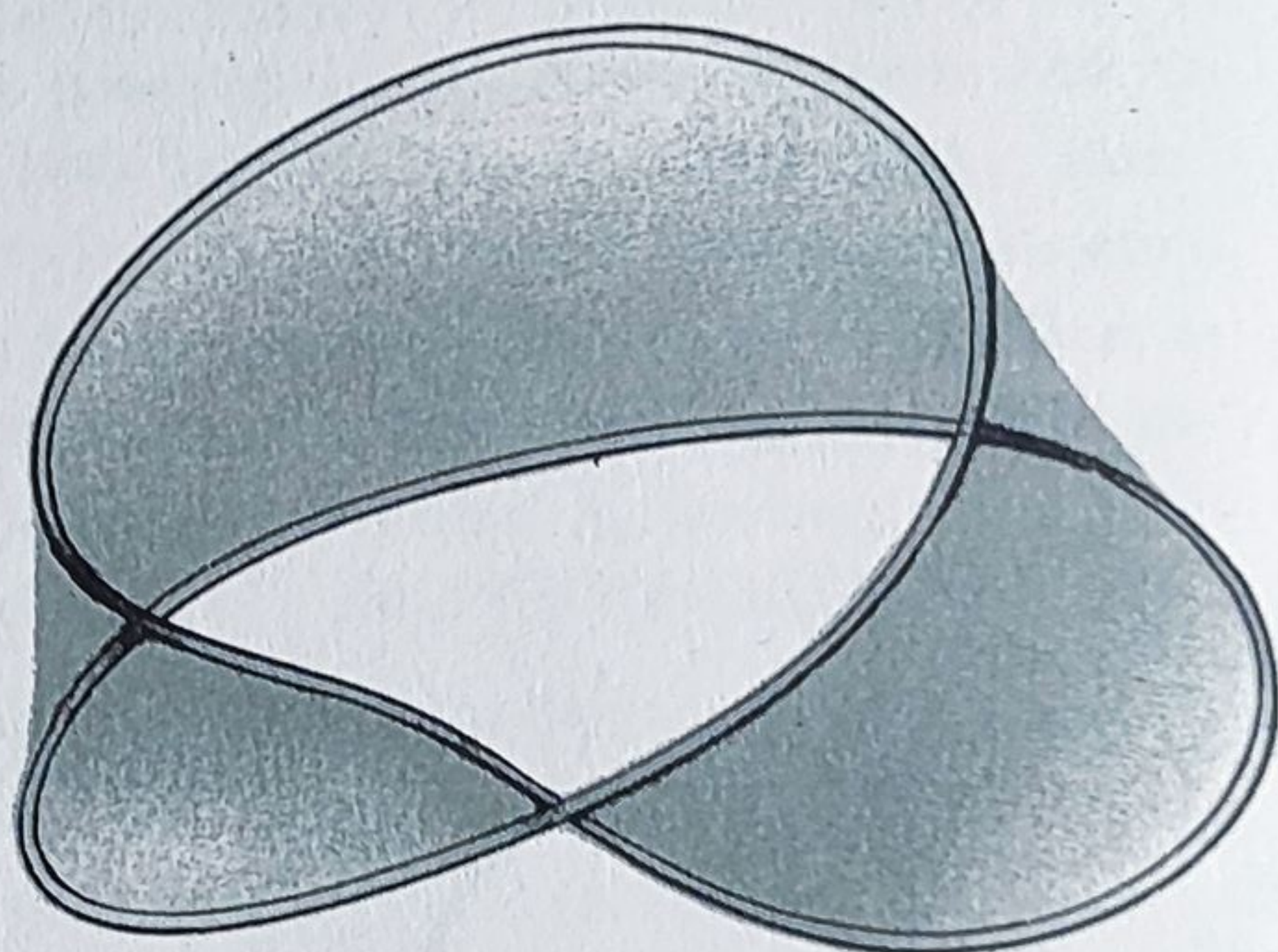


$= \frac{1}{2} LI^2$ , pentru a găsi  $L$ . Observați că acest mod de calcul evită orice probleme care ar putea apărea din faptul că diferite filamente de curent în conductorul interior cuprind cantități de flux diferite. Totuși, rezultatul este valabil doar pentru curenți lent variabili. De ce?

**7.23.** Considerăm bucla de curent arătată în figură. Să presupunem că vrem să calculăm fluxul din  $\mathbf{B}$  prin această buclă. Două suprafețe limitate de buclă sînt arătate, în părțile (a) și (b) respectiv. Care este diferența esențială dintre ele? Care din ele, dacă este vreuna, este suprafața corectă de folosit pentru efectuarea integralei de suprafață  $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$  pentru a afla fluxul? Descrieți suprafața corespunzătoare pentru o bobină cu trei spire. Arătați că aceasta este consistent cu afirmația noastră anterioară că pentru o bobină compactă de  $N$  spire forța electromotoare este de exact  $N$  ori cea care ar fi pentru o singură buclă de aceeași mărime și formă.



(a)



(b)

Fig. la problema 7.23.

„Fenomenul lui Arago“.

**7.24.** În cel de-al doilea paragraf citat la începutul cap. 7, Faraday a menționat „experiențele extraordinare ale lui Arago“.



Mai departe, într-o secțiune intitulată — Explicarea Fenomenului Magnetic al lui Arago, el le descrie astfel:

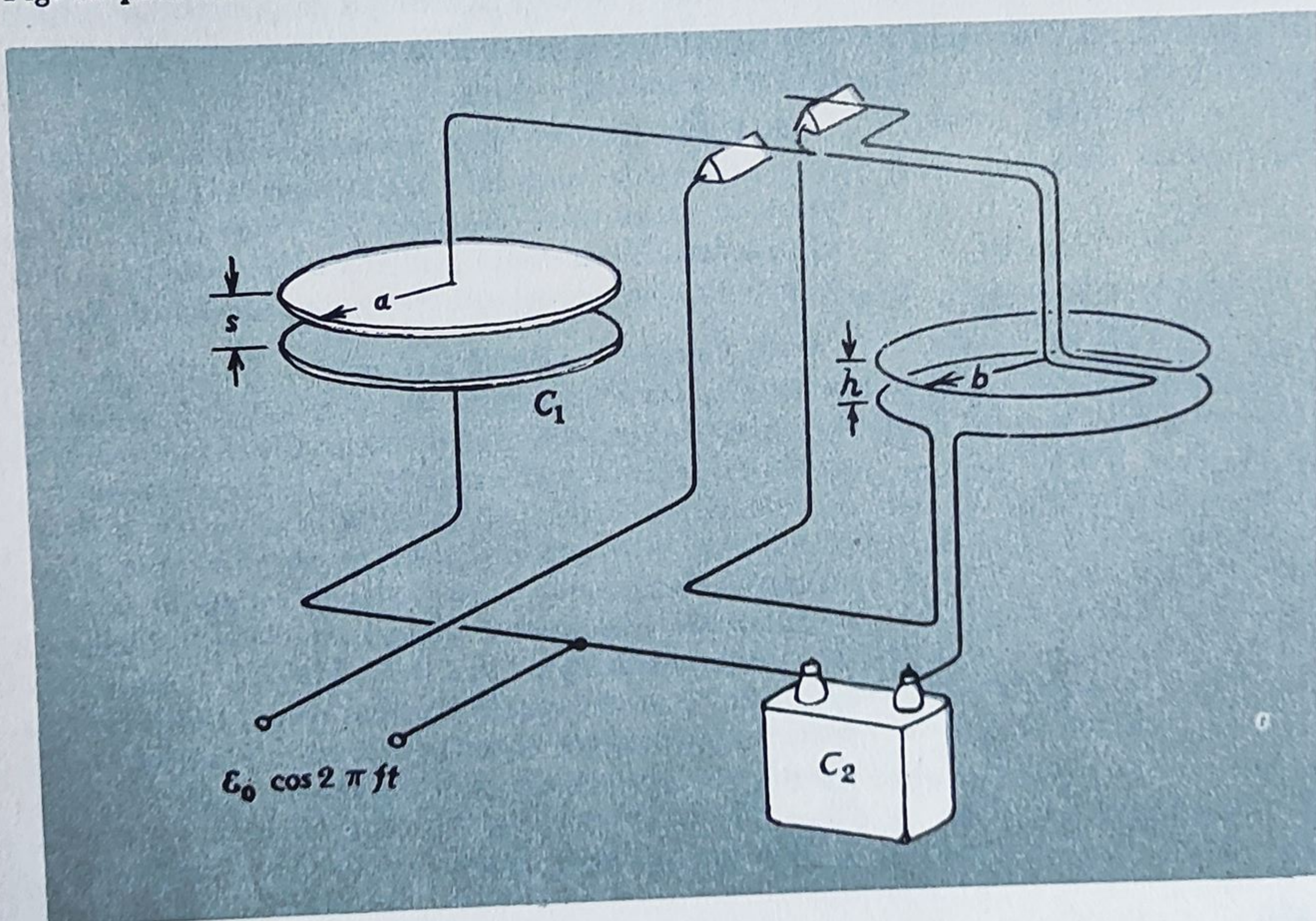
„Dacă o placă de cupru este rotită în apropierea unui ac magnetic, sau magnet, suspendat astfel încât ultimul se poate roti într-un plan paralel cu acela al plăcii, magnetul tinde să urmeze mișcarea plăcii, și efectul este atât de puternic, încât magnetul sau plăci în greutate de mai multe kilograme pot fi astfel întoarse. Dacă magnetul și placă sînt în repaus relativ, nici cel mai mic efect, atractiv sau repulsiv, sau de orice alt fel, nu poate fi observat între ele. Acesta este fenomenul descoperit de Arago.“

Dați propria dumneavoastră „explicație“ la fenomenul lui Arago.

*Prezicerea vitezei luminii din rezultatele unei experiențe electrice.*

7.25. Constanta  $c$  care apare în ecuațiile lui Maxwell poate fi determinată prin experiențe electrice implicînd doar cîmpuri de joasă frecvență. Să considerăm montajul arătat în figură. Forța dintre plăcile condensatorului este comparată cu forța dintre firele paralele care poartă curent în aceeași direcție. O tensiune sinusoidală de frecvență  $f$  cicli/s este aplicată condensatorului plan-paralel  $C_1$  și de asemenea condensatorului  $C_2$ . Sarcina care curge în și din  $C_2$  constituie curentul în inele. Să presupunem că  $C_2$  și diferitele distanțe implicate au fost potrivite

Fig. la problema 7.25.





astfel încât forța în jos asupra plăcii superioare a lui  $C_1$  să compenseze exact forța în jos asupra inelului superior. (Desigur, *greutățile* celor două părți trebuie potrivite încât să se echilibreze fără tensiune.) Arătați că în aceste condiții constanta  $c$  poate fi calculată din cantități măsurate astfel:

$$c = (2\pi)^{3/2} a \left( \frac{b}{h} \right)^{1/2} \left( \frac{C_2}{C_1} \right) f \text{ m/s.}$$

Observați că sînt necesare doar măsurători de *distanță* și *timp* (sau frecvență), în afara unei măsurări a raportului capacităților  $C_1$  și  $C_2$ . Unitățile electrice, ca atare, nu sînt implicate în rezultat. (Experiența se poate face la o frecvență de 50 cicli/sec dacă  $C_2$  este ales, să spunem, de  $10^6$  ori  $C_1$  iar inelele de curent sînt făcute din mai multe spir pentru a mări efectul unui curent mic.)

7.26. Discutați posibilitatea de a transmite semnale la distanțe prin inducție electromagnetică. Se poate face telegrafie fără fir care se bazează doar pe legea lui Faraday a inducției?

## Capitolul 8

*Se arată ce este special în cazul amortizării critice.*

8.8. Pentru circuitul  $RLC$  amortizat din figura 8.2, dezvoltăți o expresie pentru energia totală înmagazinată în circuit, energia în condensator și energie în inductanță, la orice timp  $t$ . Arătați că condiția de „amortizare critică”  $R = 2\sqrt{L/C}$ , este cea în care energia totală este disipată cel mai repede.

*Efectul amortizării asupra frecvenței de rezonanță.*

8.9. Folosind ec. 10 și 13, exprimați efectul amortizării asupra frecvenței unui circuit  $RLC$  serie. Fie  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  frecvența circuitului neamortizat. Presupuneți că se adaugă destulă rezistență pentru a aduce  $Q$  de la  $\infty$  pînă la 1000. Prin ce procent este frecvența  $\omega$  deplasată din  $\omega_0$ ?

8.10. Folosiți rezultatul problemei 7.7 pentru a scrie o formulă pentru auto-inductanța cilindrului conductor deschis arătat în partea (a) a figurii. Curgerea curentului considerat este circumferențială. Ca și în problema 7.7, acceptăm aproximația că cîmpul în interior este uniform pînă la capete. Acum să deschidem circuitul și să introducem un condensator, ca în partea (b) a figurii. Calculați frecvența de rezonanță a acestei combinații. Observați că aceasta este independentă de lungimea  $b$ . Primul magnetron care a făcut posibil radarul în cel de-al doilea război mondial conținea opt circuite rezonante de această formă. O secțiune transversală prin anodul de cupru al unuia din aceste tuburi este arătată, chiar în mărime naturală, în partea (c) a figurii. Estimați frecvența radiației emise.



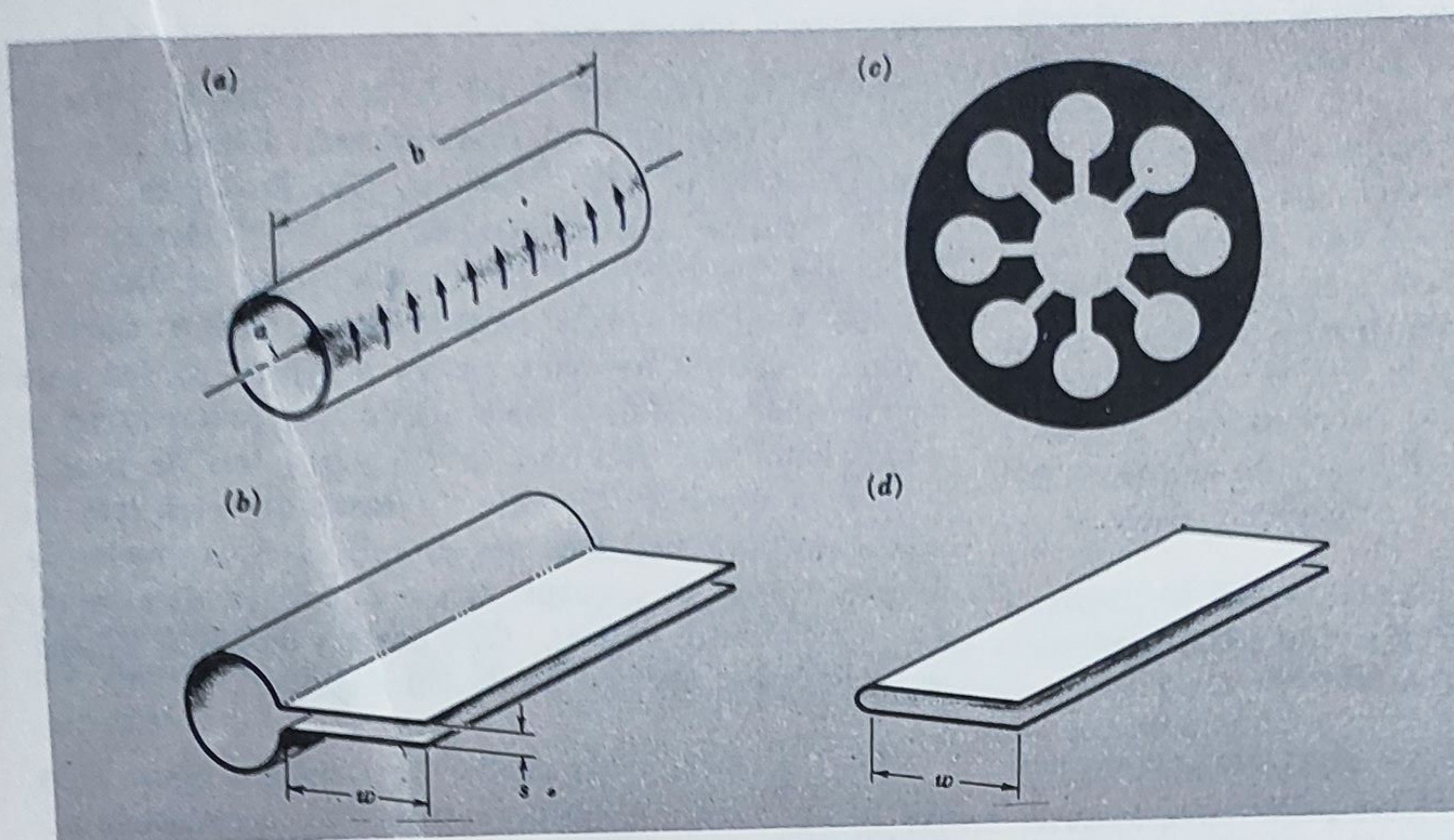


Fig. la problema 8.10.

(Frecvența nu este afectată prea mult de faptul că există opt cavități și nu una.) Să presupunem că menținând  $w$  și  $s$  fixe, încercăm să facem frecvența de rezonanță cât mai mare posibil prin reducerea diametrului cilindrului pînă cînd în final  $a = \frac{1}{2}s$  și dispozitivul arată ca în partea (d) a figurii. V-ați aștepta ca formula dumneavoastră să se aplice bine, în acest caz? Ar fi frecvența reală mai mare sau mai mică decît ar prezice formula dumneavoastră?

## Capitolul 9

**9.16.** Un circuit rezonant de „Q ridicat”, alcătuit dintr-o elice de cupru și un condensator făcut din plăci metalice este montat sub un clopot de sticlă astfel încît întreg dispozitivul poate fi vidat. Cu aer la presiune normală sub clopotul de sticlă, frecvența de rezonanță măsurată este  $41,405 \pm 0,002$  Mc/sec. Cînd clopotul de sticlă este evacuat, o redeterminare a frecvenței dă  $41,418 \pm 0,002$  Mc/sec. Din aceste date, ce concluzie puteți trage asupra constantei dielectrice a aerului? Puteți găsi alte efecte care ar putea contribui la variație?

**9.17.** Fenomenul de *hidratare* este important în chimia soluțiilor apoase. Aceasta se datorează faptului că un ion într-o soluție strînge în jurul său un ciorchine de



molecule de apă, care aderă de ion destul de puternic. [Vezi, de exemplu, G. C. Pimentel, ed., *Chimia, o știință experimentală*, p. 314 (Freeman, San Francisco, 1963); sau L. Pauling, *Chimie generală*, p. 205 (Freeman, San Francisco, 1953).] Forța de atracție dintre un dipol și o sarcină punctuală este răspunzătoare pentru aceasta. Estimați energia necesară pentru a separa un ion care poartă o sarcină  $e$  de o moleculă de apă, presupunând că inițial ionul este localizat la 1,5 angströmi de poziție efectivă a dipolului de  $H_2O$ . (Această distanță este de fapt o cantitate destul de vag definită deoarece molecula de apă, privită de aproape, este o distribuție de sarcină, nu un dipol infinitesimal.) Care parte a moleculei de apă se va găsi mai aproape de un ion negativ?

*Sferă dielectrică în câmp uniform.*

9.18. Din examinarea liniilor de câmp din figura 9.29 este posibil a deduce constanta dielectrică a materialului. Liniile au fost trase cu multă precizie. Vedeți dacă puteți găsi vreo trăsătură care este ușor de măsurat și comparat cu teoria, și prin aceasta deduceți, aproximativ, valoarea lui  $k$  folosită la obținerea acelei diagrame.

*Cavitate sferică în mediu dielectric.*

9.19. Într-un condensator mare, intensitatea maximă a câmpului în dielectricul de ulei, în regim de funcționare nominal, este 90 kV/cm. Constanta dielectrică a uleiului este 2,24. Să presupunem că în ulei există o bulă de gaz. Care este intensitatea câmpului în interiorul bulei de gaz? (Aceasta este problema sferei dielectrice, întoarsă în afară. Ar trebui să puteți adapta rezultatul nostru pentru sfera dielectrică la acest caz.) Ar fi bulele de gaz foarte de nedorit în condensatorul cu ulei?

*Întrebare pentru discuție.*

9.20. Care ar fi sensul unei polarizări negative? Credeți că ar putea să apară?

*În unele scopuri, simetria triplă este la fel de bună ca și simetria circulară completă.*

9.21. Imaginați-vă o moleculă triatomică alcătuită din atomi identici într-o configurație echilaterală. (În realitate, nu sînt cunoscute astfel de molecule, dar nu are

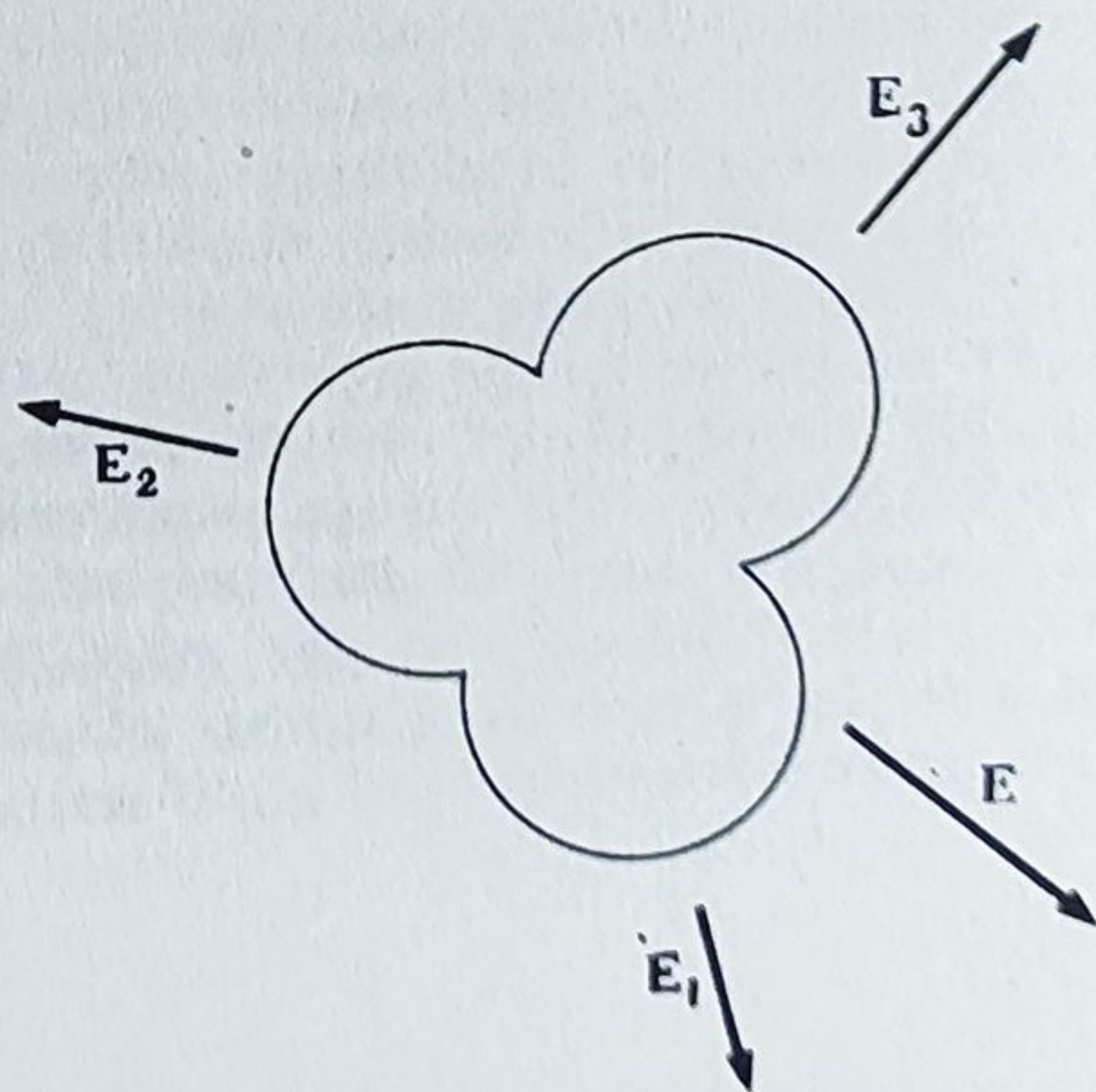


Fig. la problema 9.21.



importantă.) Să considerăm polarizarea acestei molecule printr-un câmp electric aplicat în planul triunghiului. Este evident din simetria moleculei că polarizabilitatea trebuie să fie aceeași pentru intensitățile câmpurilor  $E_1$ ,  $E_2$  și  $E_3$  aplicate în direcțiile arătate. Ar trebui să puteți arăta că din aceasta, folosind componente și superpoziții, că polarizabilitatea este aceeași pentru un câmp de intensitate  $E$  aplicat în *orice* direcție în plan. Veți fi demonstrat astfel că orice moleculă cu simetrie triplă este indistingibilă de una cu simetrie circulară completă, câtă vreme este implicată polarizabilitatea în acel plan. O teoremă asemănătoare cu aceasta în trei dimensiuni ne asigură că molecula tetraedrică de metan din figura 9.13 trebuie să aibă o polarizabilitate sferic simetrică.

*O demonstrație că tensorul de polarizare trebuie să fie simetric.*

**9.22.** Problema este de a construi, cu îndrumarea care va fi dată, o demonstrație a simetriei tensorului de polarizabilitate. Pentru simplitate, vom lucra doar în două dimensiuni, dar aceasta este suficient pentru a arăta natura raționamentului — o a treia dimensiune nu aduce nimic nou. Avem un obiect oarecare polarizabil, care nu are nici un fel de simetrie, pe care îl localizăm prin coordonate  $xy$ . Un câmp de intensitate  $E$  induce un moment dipolar  $p$ , legat linear de  $E$  prin

$$p_x = \epsilon_0(\alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y) \quad (1)$$

$$p_y = \epsilon_0(\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y)$$

Sarcina noastră este de a dovedi că  $\alpha_{xy}$  și  $\alpha_{yx}$  trebuie să fie egali.

Demonstrația se bazează pe conservarea energiei. Dacă, într-un câmp aplicat  $E$ , un sistem își schimbă momentul său dipolar de la  $p$  la  $p + dp$ , lucrul efectuat de câmp este  $dW = E \cdot dp$ . După cum s-a explicat în § 9.14, motivul este că  $dp$  reprezintă tocmai cantitatea de deplasare de sarcină din această variație, în timp ce proiecția lui  $dp$  după  $E$  este cantitatea de deplasare de sarcină în direcția câmpului. Să presupunem că sistemul este într-un câmp  $E_1$ , cu un moment dipolar corespunzător  $p_1$ , care va fi dat desigur de ecuația 1. Să numim această stare  $I$ . Să schimbăm acum câmpul aplicat pînă la  $E_2$ , făcînd ceva cu sursa acestui câmp. Momentul dipolar se va schimba în  $p_2$  și o anumită cantitate de lucru mecanic  $W_{12}$  va fi efectuată, aducînd sistemul în starea  $II$ . Acum am fi putut efectua această schimbare în multe moduri diferite. Lucrul efectuat, totuși, trebuie să fie același pentru toate aceste căi, dacă energia este conservată, deoarece ele lasă sistemul în aceeași stare finală, anume, polarizat cu un moment dipolar  $p_2$ . Să luăm  $E_1 = 0$ ,  $p_1 = 0$  drept stare  $I$ , și să comparăm două moduri deosebit de simple de a atinge starea  $II$ . Cele două metode de variere a câmpului



de la zero la  $E_x$ , de componente  $E_{2x}$  și  $E_{2y}$ , sînt descrise în schița de mai jos:

*Prima metodă:*

Se lasă  $E_y = 0$ ; se schimbă  $E_x$  la  $E_{2x}$  Lucru efectuat =  
 Se lasă  $E_x = E_{2x}$ ; se schimbă  $E_y$  la  $E_{2y}$  Lucru efectuat =  
 Lucru total efectuat =

*A doua metodă*

Se lasă  $E_x = 0$ ; se schimbă  $E_y$  la  $E_{2y}$  Lucru efectuat =  
 Se lasă  $E_y = E_{2y}$ ; se schimbă  $E_x$  la  $E_{2x}$  Lucru efectuat =  
 Lucru total efectuat =

Lucrul efectuat în primul pas al primei metode este

$$\int_{E_x=0}^{E_x=E_{2x}} E_x dp_x$$

iar  $dp_x$  poate fi exprimat în funcție de  $dE_x$  prin ecuația 1. Găsiți lucrul total efectuat în fiecare dintre metodele de variere, și egalați cele două cantități.

*Cum se comportă un tensor la rotație.*

**9.23.** Pentru a vedea cum se transformă elementele unui tensor la rotația coordonatelor, să considerăm pentru simplitate, un caz bidimensional. Să presupunem că vectorii bidimensionali  $A$  și  $B$  sînt legați liniar ca mai departe, într-un sistem de coordonate  $xy$  particular:

$$B_x = \alpha_{xx}A_x + \alpha_{xy}A_y; \quad B_y = \alpha_{yx}A_x + \alpha_{yy}A_y.$$

Coeficienții  $\alpha$  alcătuiesc un tensor. Să considerăm acum o pereche de axe  $x'$  și  $y'$  rotite în sens contrar acelor de ceasornic prin unghiul  $\theta$  față de axele  $x$  și  $y$ . În noile coordonate vectorii  $A$  și  $B$ , care rămîn neschimbați în spațiu, au diverse componente  $A_{x'}$  etc. Care sînt noile componente exprimate în funcție de cele vechi? Tensorul  $\alpha$  aplicat lui  $A$  trebuie să dea în continuare același vector  $B$ . Dacă acesta trebuie să fie adevărat, care trebuie să fie relația dintre noile elemente ale tensorului și cele vechi? Presupuneți  $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$ . Arătați că această simetrie este păstrată la rotație, și că se poate găsi un unghi  $\theta$  care face acești coeficienți zero. Se cere doar mai multă răbdare pentru a efectua o analiză asemănătoare în trei dimensiuni, și a obține astfel regulile de transformare pentru un tensor cum este tensorul de polarizabilitate.

*Forța dintre doi dipoli.*

**9.24.** Un studiu al forței dintre dipoli. Doi dipoli dispuși astfel  $\rightarrow \rightarrow$  se atrag; doi dipoli dispuși astfel  $\uparrow \uparrow$  se resping. Explicați de ce. Aflați mărimea forței, în fiecare caz. Puteți reprezenta dipolul prin două sarcini punctuale la o mică distanță depărtare. Cu ce putere a distanței variază forța? Să considerăm acum doi dipoli dispuși astfel: Care este direcția forței asupra fiecărui dipol? (Acesta este un bun exemplu de forță *necentrală*. Forțele necentrle, de altă origine decît electrică, joacă un rol semnificativ în nucleu. Ele sînt răs-



punzătoare pentru faptul că nucleul de deuteriu nu este complet sferic dar ușor deformat, fapt a cărui descoperire a revelat întâia oară prezența unor astfel de forțe între nucleoni.)

Energia unei perechi de dipoli.

9.25. Doi dipoli permanenți au momente dipolare  $\mathbf{p}_1$  și  $\mathbf{p}_2$  și sînt dispuși cum se arată în partea (a) a figurii, la distanța  $r$  unul de altul și făcînd unghiurile  $\theta_1$  și  $\theta_2$ , respectiv cu linia care îi unește. Problema este de a calcula energia acestui sistem, care înseamnă energia necesară pentru a-l aduce în această configurație, pornind cu doi astfel de dipoli infinit depărtați. Aceasta nu cuprinde energia asociată cu crearea de astfel de dipoli. Mărimile dipolilor sînt presupuse fixate odată pentru totdeauna, dar ei pot fi orientați în diverse direcții. Dipolii pot fi aduși în pozițiile lor finale în multe moduri, și lucrul total

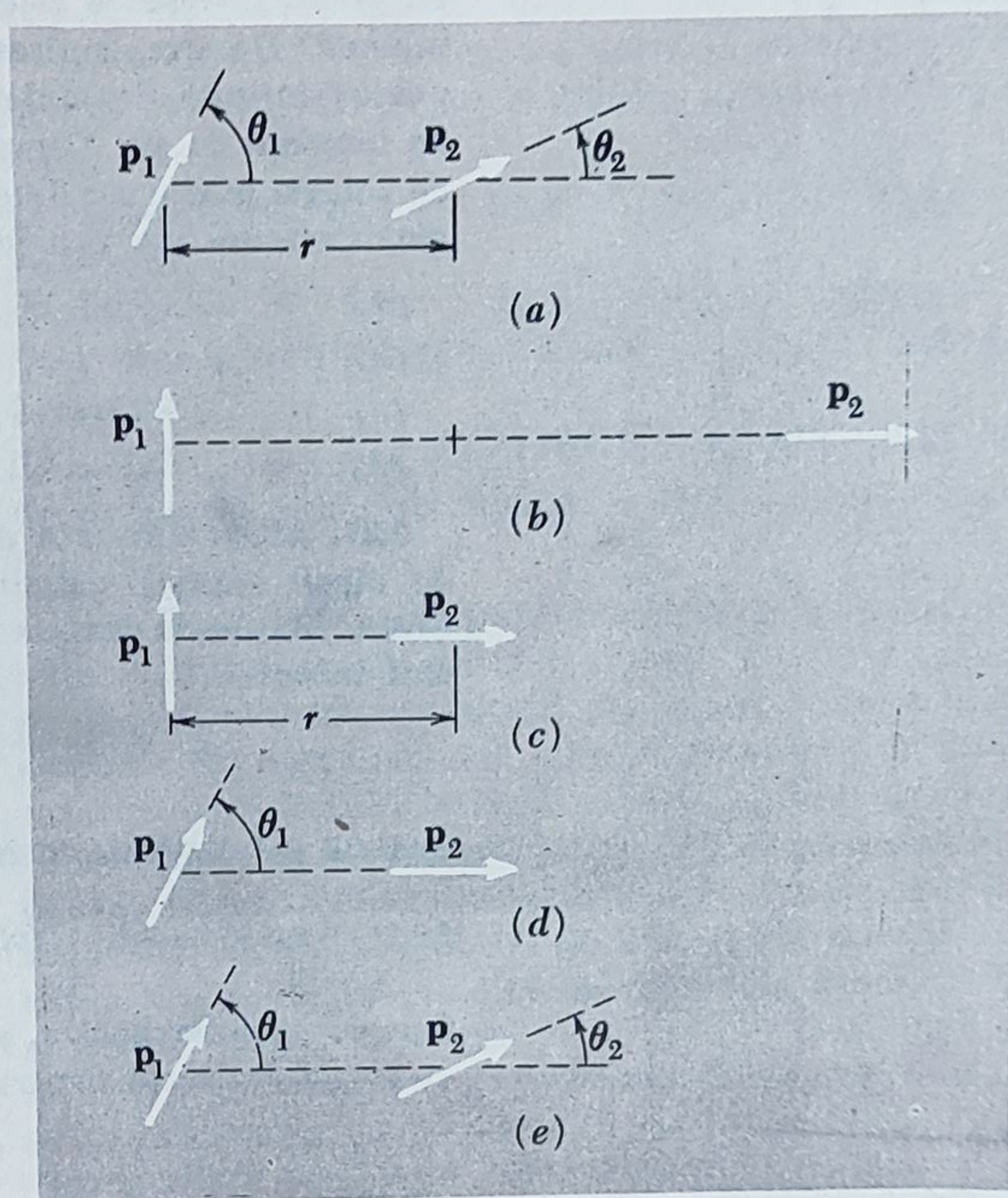


Fig. la problema 9.25.

efectuat trebuie să fie același în toate cazurile. O cale care face calculul foarte simplu este următoarea: Începem cu  $\mathbf{p}_1$  și  $\mathbf{p}_2$  foarte departe unul de altul, și orientați cum se arată în partea (b) a figurii. Menținînd această orientare, aducem  $\mathbf{p}_2$  din dreapta pînă cînd este la distanța  $r$  dorită de  $\mathbf{p}_1$ . Aceasta nu necesită nici un lucru mecanic. De ce nu? Rotiți  $\mathbf{p}_1$  în orientarea sa finală. Calculați lucrul necesar pentru a efectua această rotație în cîmpul lui  $\mathbf{p}_2$ , care este încă orientat de-a lungul lui  $\theta = 0$ . Acum



roțiți  $\mathbf{p}_2$  în orientarea sa finală,  $\theta = \theta_2$ . Lucrul necesar pentru a efectua această rotație în câmpul lui  $\mathbf{p}_1$  se poate calcula descompunând  $\mathbf{p}_1$  într-o componentă longitudinală  $p_1 \cos \theta_1$  și o componentă transversală  $p_1 \sin \theta_1$  și tratând aceste câmpuri, la poziția lui  $\mathbf{p}_2$ , în mod separat. Adunați tot lucrul efectuat și arătați că rezultatul se poate scrie

$$W = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} [\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos \theta_1 \cos \theta_2].$$

Energia unui lanț de dipoli.

**9.26.** Pentru această problemă și următoarea veți avea nevoie de rezultatul prob. 9.25 pentru anumite aranjări foarte simple ale perechii de dipoli. Să considerăm un șir liniar de dipoli egal depărtați, întinzându-se de la minus la plus infinit. Presupunem că pozițiile dipolilor sînt fixate și că fiecare dipol, cu moment de mărime  $p$ , este liber să se orienteze în orice direcție, ca și cum ar fi montat pe un pivot. Întrebarea este, care este aranjarea de energie minimă? Desigur, dacă avem un șir infinit, energia totală poate fi infinită, dar sîntem interesați în energia pe unitate de lungime de șir. Comparați următoarele aranjări față de energia medie per dipol. Care are cea mai înaltă energie? Care are cea mai joasă energie?

- (a) ...  $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$  ...  
 (b) ...  $\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow$  ...  
 (c) ...  $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$  ...  
 (d) ...  $\leftarrow \rightarrow \leftarrow \rightarrow \leftarrow \rightarrow \leftarrow \rightarrow$  ...

**9.27.** Aflați diferența de energie dintre un șir infinit de dipoli aranjați astfel: ...  $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$  ... și unul în care, la dreapta unui anumit punct  $b$  toți dipolii sînt inversați:

$$\dots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \underset{b}{\leftarrow} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \dots$$

Această diferență de energie este asociată cu frontiera  $b$  dintre două domenii. [Notă matematică:  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$ .]

Comparați, aproximativ, energia unui șir cu două astfel de frontiere foarte depărtate, ca:

$$\dots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \underset{b}{\rightarrow} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \underset{b}{\rightarrow} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots$$

cu energia unui șir în care cele două frontiere au devenit atât de apropiate cît se poate fără a se „anihila” una pe alta:

$$\dots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \underset{b}{\rightarrow} \underset{b}{\leftarrow} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots$$

Față de această diferență de energie, ați spune că cele două frontiere ar tinde să se respingă una pe cealaltă sau să se atragă una pe cealaltă?



Există un mod prin care o întoarcere ar putea să aibă loc mai economic, adică, cu cheltuială mai mică de energie, decât în inversarea bruscă considerată pînă aici? Comparați următoarele imagini de inversare. Poate puteți imagina o frontieră încă mai ieftină.

(a) (Brusc): ... → → → → → ← ← ← ...  
 (b) ... → → → → → ↑ ← ← ← ...  
 (c) ... → → → → → ↘ ↑ ↙ ← ← ...

Verificare experimentală a formulei Clausius-Mosotti.

9.28. Relația exprimată prin ecuația 72 este numită formula Clausius-Mosotti. Ea este exprimată de obicei prin constanta dielectrică  $k$ . Arătați că o formulă echivalentă este  $\frac{3}{N} \left( \frac{k-1}{k+2} \right) = \alpha$ . Datele tabelate mai jos sînt extrase dintr-un articol de Michels, Jaspers și Sanders, *Physica*, 1, 627 (1934), care au măsurat constanta dielectrică a hidrogenului pur la diferite presiuni și temperaturi:

Temperatura (°C)	23,8	23,8	23,8	23,8
Presiunea (atmosfere)	1,02	57,5	221,6	1011,6
Densitatea (g/cm <sup>3</sup> )	0,00118	0,06604	0,2361	0,5780
Constanta dielectrică	1,00052	1,03109	1,11413	1,29633

Cît de bine se potrivește aceasta cu formula lui Clausius-Mosotti?

Întrebare pentru discuție: „Catastrofa  $N\alpha/3$ ”.

9.29. Poate catastrofa prezisă de ec. 72, în eventualitatea  $N\alpha/3 > 1$ , să aibă loc în realitate? Pentru a vedea ce este implicat, să considerăm un „cristal” care constă doar din doi atomi similari,  $A$  și  $B$ , fixați într-un mod oarecare la distanța  $d$  unul de celălalt. Arătați că dacă  $A$  este polarizat de-a lungul liniei  $AB$ , el generează un cîmp în  $B$  care tinde să polarizeze pe  $B$  în aceeași direcție. Se poate concepe ca sistemul să intre într-o stare polarizată în care cîmpul lui  $A$  să mențină polarizarea lui  $B$  și invers? Discutați această întrebare din două puncte de vedere. Mai întîi, calculați distanța la care acest efect ar apărea pentru atomii  $A$  și  $B$  dacă polarizabilitatea fiecăruia este  $\alpha$ . Cum se compară aceasta cu mărimile pe care  $A$  și  $B$  sînt de așteptat să le aibă? În al doilea rînd, considerați energia sistemului ipotetic polarizat.

Un dielectric „artificial”.

9.30. Pentru focalizarea undelor radio scurte au fost făcuți dielectrici artificiali prin montarea unor mici sfere metalice într-o matrice de material plastic, ca atomii într-o rețea cristalină. Plasticul servește doar pentru a ține sferele pe locul lor și are un efect electric neglijabil. Polarizabilitatea unei sfere metalice se poate calcula cum s-a descris în probl. 9.9. Găsiți constanta dielectrică a unei rețele cubice de sfere cu diametrul de 2 cm, cu distanța dintre centre de 4 cm. Este posibil să se obțină  $N\alpha/3 > 1$ ?



pentru un astfel de dispozitiv? Cea mai bună șansă este cu o rețea cubică cu fețe centrate, unul din modurile de împachetare cele mai strânse. Ce teoremă ar fi violată dacă o rețea de sfere metalice ar manifesta polarizare indusă spontană?

## Capitolul 10

**10.14.** În discuția din figura 10.9, am presupus pentru simplitate că aspectul câmpului de inducție  $\mathbf{B}$  avea simetrie axială, implicând faptul că  $B_r$  are mărime constantă în jurul inelului. Arătați că aceasta nu este în realitate necesar; adică, arătați că obținem ecuația 18 chiar dacă  $B_r$  nu este constant în jurul inelului.

**10.15.** Un solenoid cilindric are o înfășurare într-un singur strat de rază  $r_0$ . Este atât de lung încât în vecinătatea unui capăt câmpul poate fi luat ca acela al unui solenoid semi-infinit. Arătați că punctul de pe axa solenoidului unde o mică probă paramagnetică va simți forța maximă este situat la distanța  $r_0/\sqrt{15}$  în interior de la capăt.

*Câmpul mediu în regiunea apropiată pentru un dipol electric finit și un inel de curent.*

**10.16.** În cazul unui dipol alcătuit din două sarcini  $Q$  și  $-Q$  separate prin distanța  $s$ , volumul regiunii apropiate, în care câmpul este esențial diferit de câmpul de dipol ideal, este proporțional cu  $s^3$ . Intensitatea câmpului din această regiune este proporțională cu  $Q/4\pi\epsilon_0 s^2$ , în puncte similare când  $s$  variază. Momentul dipolar  $p = Qs$ , astfel încât dacă micșorăm  $s$  menținând  $p$  constant, ce face produsul volumului și intensității câmpului? Efectuați raționamentul corespunzător pentru câmpul magnetic al unei bucle de curent. Morala este: Dacă ne interesăm de câmpul mediu spațial în orice volum care conține dipoli, diferența esențială dintre „interiorul” dipolilor electric și magnetic *nu* poate fi neglijată, chiar dacă altfel considerăm dipolii drept infinitesimali.

*Deteția magnetică a submarinelor.*

**10.17.** Un submarin cu carcasă de oțel produce o perturbație locală a câmpului magnetic terestru, care face posibilă deteția unui submarin printr-un instrument sensibil la variații foarte mici ale câmpului. Să presupunem că avem un magnetometru care poate fi purtat la o oarecare distanță în urma unui avion (pentru a-l îndepărta de perturbația avionului însuși) și care este capabil de a indica o fluctuație de 1 parte în  $10^5$  în câmpul înconjurător. Presupunând carcasa submarinului demagnetizată, prin îndepărtarea oricărei magnetizări remanente, totuși carcasa reprezintă pentru câmpul magnetic terestru un mediu magnetic anormal, și ne așteptăm ca ea să dezvolte un moment dipolar indus suficient pentru a modifica câmpul terestru, pe o lungime



de vas, prin aproximativ mărimea câmpului neperturbat. Dacă aceasta este situația, care este distanța maximă la care detecția poate fi încă sperată? Să presupunem că printr-o îmbunătățire de proiectare sensibilitatea magnetometrului a putut fi crescută printr-un factor de doi. Cum ar modifica aceasta numărul de avioane-mile necesare pentru a cerceta o arie dată a oceanului? (În realitate, problema nu este atât de simplă. Fluctuațiile naturale ale câmpului dau un „nivel de zgomot” care poate eventual să mascheze anomalia produsă de submarin, oricât de sensibil ar fi magnetometrul. O sursă de astfel de fluctuații este foarte simplă: valurile oceanului mișcă apa de mare în câmpul terestru; apa de mare este un conductor; curentul curge, producând câmpuri magnetice.)

*Întrebare pentru discuție.*

**10.18.** Avem două sfere goale de sticlă cu diametrul de 1,2 cm. Una conține un mic magnet în formă de bară de aproximativ 1 cm lungime. Cealaltă conține un electret — o bară de material care are o polarizare electrică permanentă. Aceasta ar putea fi descrisă la fel de bine ca o bară făcută dintr-un izolator foarte bun cu o sarcină pozitivă prinsă la un capăt și o sarcină negativă la celălalt. Considerați problema detectării prezenței a unuia sau a celuilalt dintre acestea, dacă obiectul este ținut în interiorul pumnului închis al cuiva. Cum ați explica diferența cuiva care avea doar atîta fizică cîtă știați și dumneavoastră înainte de a urma acest curs?

**10.19.** Un dipol magnetic de intensitate  $m$  este situat într-un câmp magnetic omogen de intensitate  $B_0$ , cu momentul dipolar orientat în sens opus câmpului. Arătați că în câmpul combinat, există o anumită suprafață sferică,

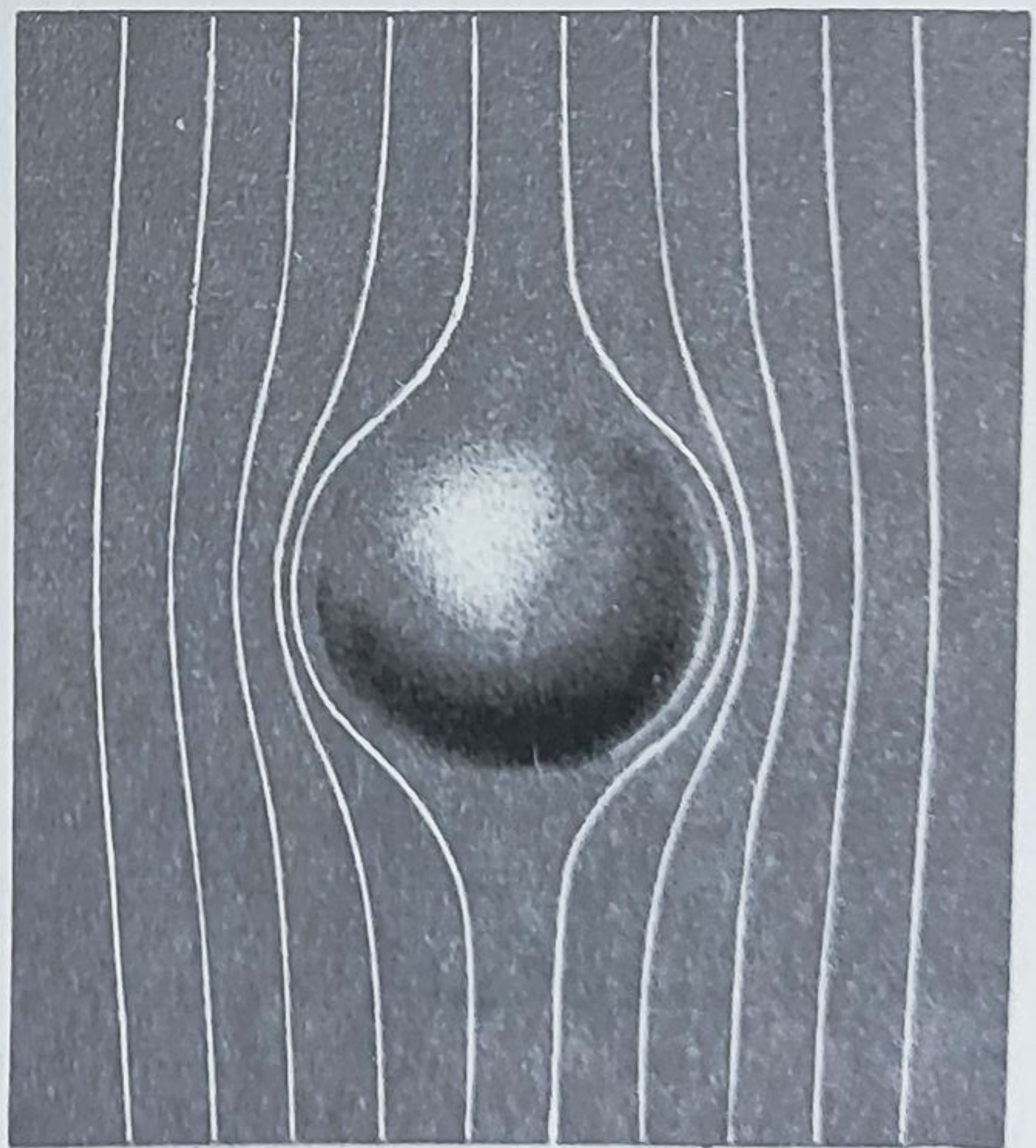


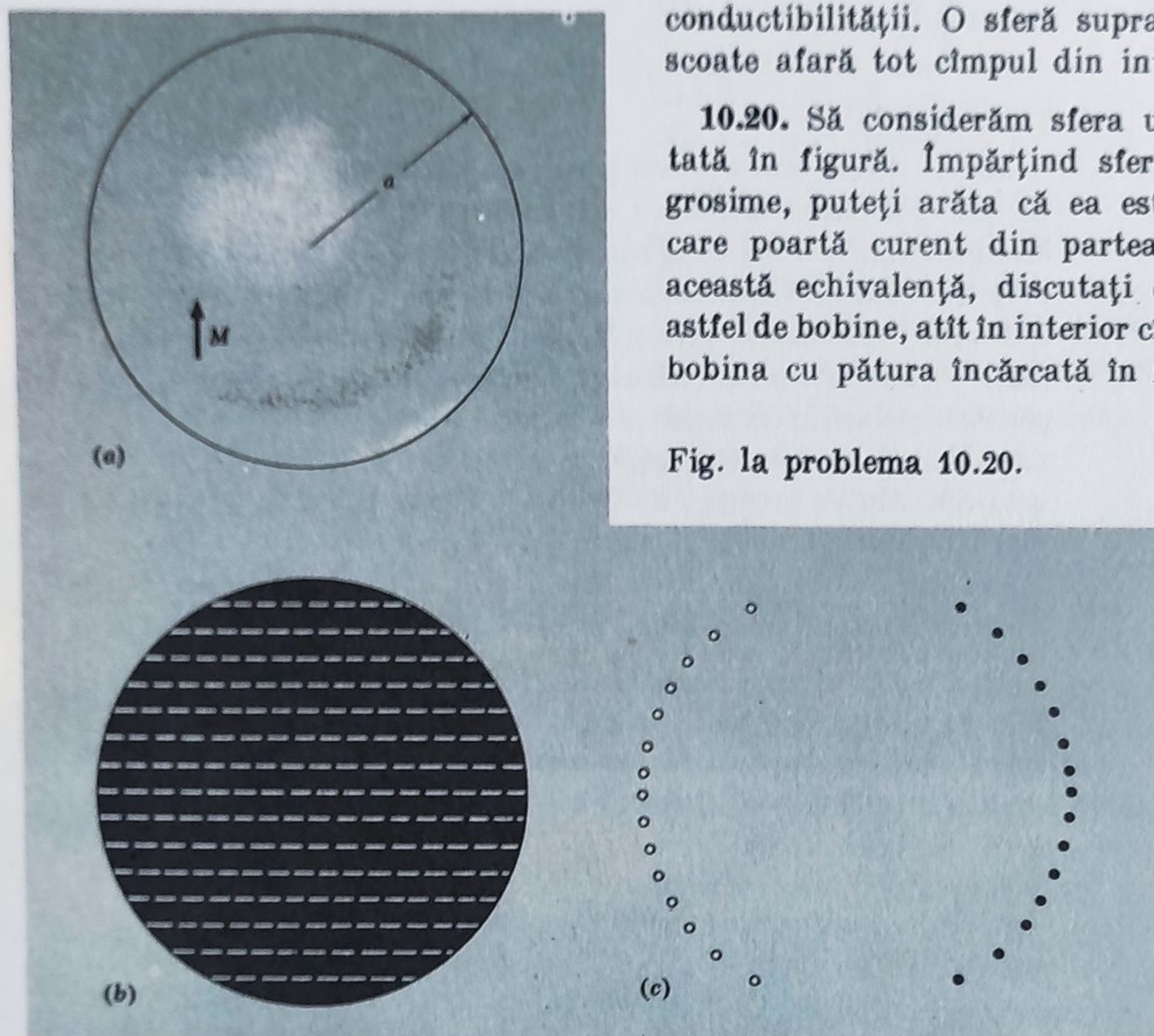
Fig. la problema 10.19.



centrată pe dipol, prin care nu trece nici o linie de câmp. Câmpul exterior, se poate spune, a fost „scos afară” din această sferă. Liniile de câmp în afara sferei au fost reprezentate în figură. Cum arată liniile de câmp în interiorul sferei? Care este intensitatea câmpului imediat în afara sferei, la ecuator? Câtă vreme ne interesează efectele asupra câmpului exterior, dipolul ar putea fi înlocuit prin curenți curgând pe suprafața sferică, dacă am putea obține distribuția de curent corectă. Care este câmpul în interiorul sferei în acest caz? De ce puteți fi siguri? (Aceasta este o configurație importantă în studiul supraconductibilității. O sferă supraconductoare, într-adevăr, scoate afară tot câmpul din interiorul ei.)

**10.20.** Să considerăm sfera uniform magnetizată arătată în figură. Împărțind sfera în straturi de aceeași grosime, puteți arăta că ea este echivalentă cu bobina care poartă curent din partea (c) a figurii. Folosind această echivalență, discutați câmpul magnetic al unei astfel de bobine, atât în interior cât și în exterior. Comparați bobina cu pătura încărcată în rotație din problema 10.6.

Fig. 1a problema 10.20.



*Aceasta completează discuția din § 10.5 arătând ce se întâmplă cu orbitele electronice orientate într-un plan paralel cu câmpul magnetic aplicat.*

**10.21.** Dezvoltați ecuații Maxwell așa cum ar apărea dacă am fi avut sarcină magnetică și curenți de sarcină magnetică ca și sarcină electrică și curenți electrici. Introduceți orice simbol nou de care aveți nevoie și definiți atent ce reprezintă. Aveți deosebită grijă asupra semnelor + și -.

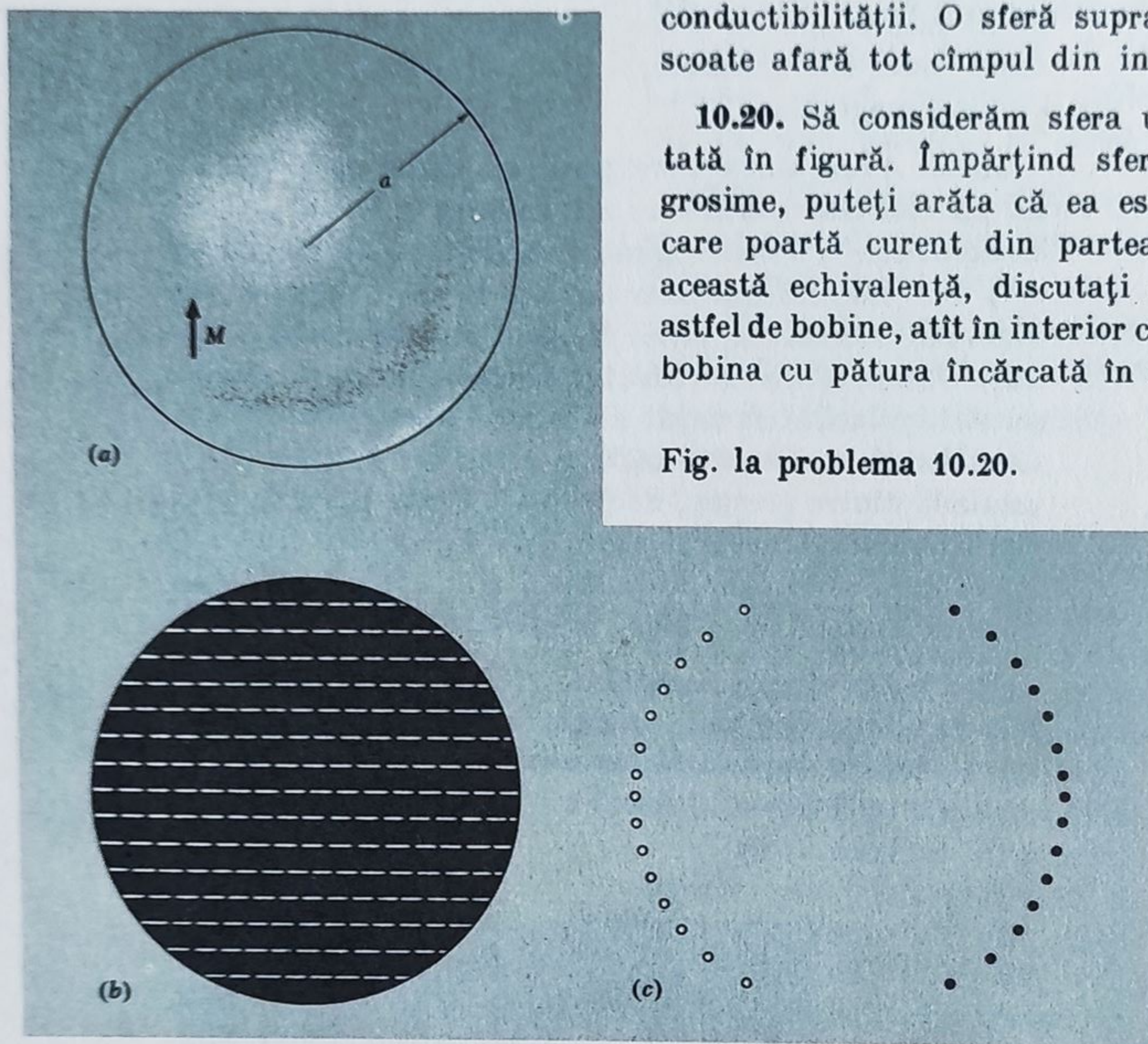
**10.22** În § 10.5, ilustrat în figura 10.12, am discutat ce se întâmplă când un câmp magnetic este aplicat perpendicular pe orbita unei particule încărcate care se rotește pe un cerc sub influența unei forțe. În această problemă veți găsi ce se întâmplă când liniile de câmp se află în planul orbitei. Tot ce aveți de făcut este să umpleți spațiile libere în următoarea analiză, după ce veți gândi atent asupra fiecărui pas:



centrată pe dipol, prin care nu trece nici o linie de câmp. Câmpul exterior, se poate spune, a fost „scos afară” din această sferă. Liniile de câmp în afara sferei au fost reprezentate în figură. Cum arată liniile de câmp în interiorul sferei? Care este intensitatea câmpului imediat în afara sferei, la ecuator? Câtă vreme ne interesează efectele asupra câmpului exterior, dipolul ar putea fi înlocuit prin curenți curgând pe suprafața sferică, dacă am putea obține distribuția de curent corectă. Care este câmpul în interiorul sferei în acest caz? De ce puteți fi siguri? (Aceasta este o configurație importantă în studiul supraconductibilității. O sferă supraconductoare, într-adevăr, scoate afară tot câmpul din interiorul ei.)

**10.20.** Să considerăm sfera uniform magnetizată arătată în figură. Împărțind sfera în straturi de aceeași grosime, puteți arăta că ea este echivalentă cu bobina care poartă curent din partea (c) a figurii. Folosind această echivalență, discutați câmpul magnetic al unei astfel de bobine, atât în interior cât și în exterior. Comparați bobina cu pătura încărcată în rotație din problema 10.6.

Fig. la problema 10.20.



**10.21.** Dezvoltați ecuații Maxwell așa cum ar apărea dacă am fi avut sarcină magnetică și curenți de sarcină magnetică ca și sarcină electrică și curenți electrici. Introduceți orice simbol nou de care aveți nevoie și definiți atent ce reprezintă. Aveți deosebită grijă asupra semnelor  $+$  și  $-$ .

**10.22** În § 10.5, ilustrat în figura 10.12, am discutat ce se întâmplă când un câmp magnetic este aplicat perpendicular pe orbita unei particule încărcate care se rotește pe un cerc sub influența unei forțe. În această problemă veți găsi ce se întâmplă când liniile de câmp se află în planul orbitei. Tot ce aveți de făcut este să umpleți spațiile libere în următoarea analiză, după ce veți gândi atent asupra fiecărui pas:

*Aceasta completează discuția din § 10.5 arătând ce se întâmplă cu orbitele electronice orientate într-un plan paralel cu câmpul magnetic aplicat.*



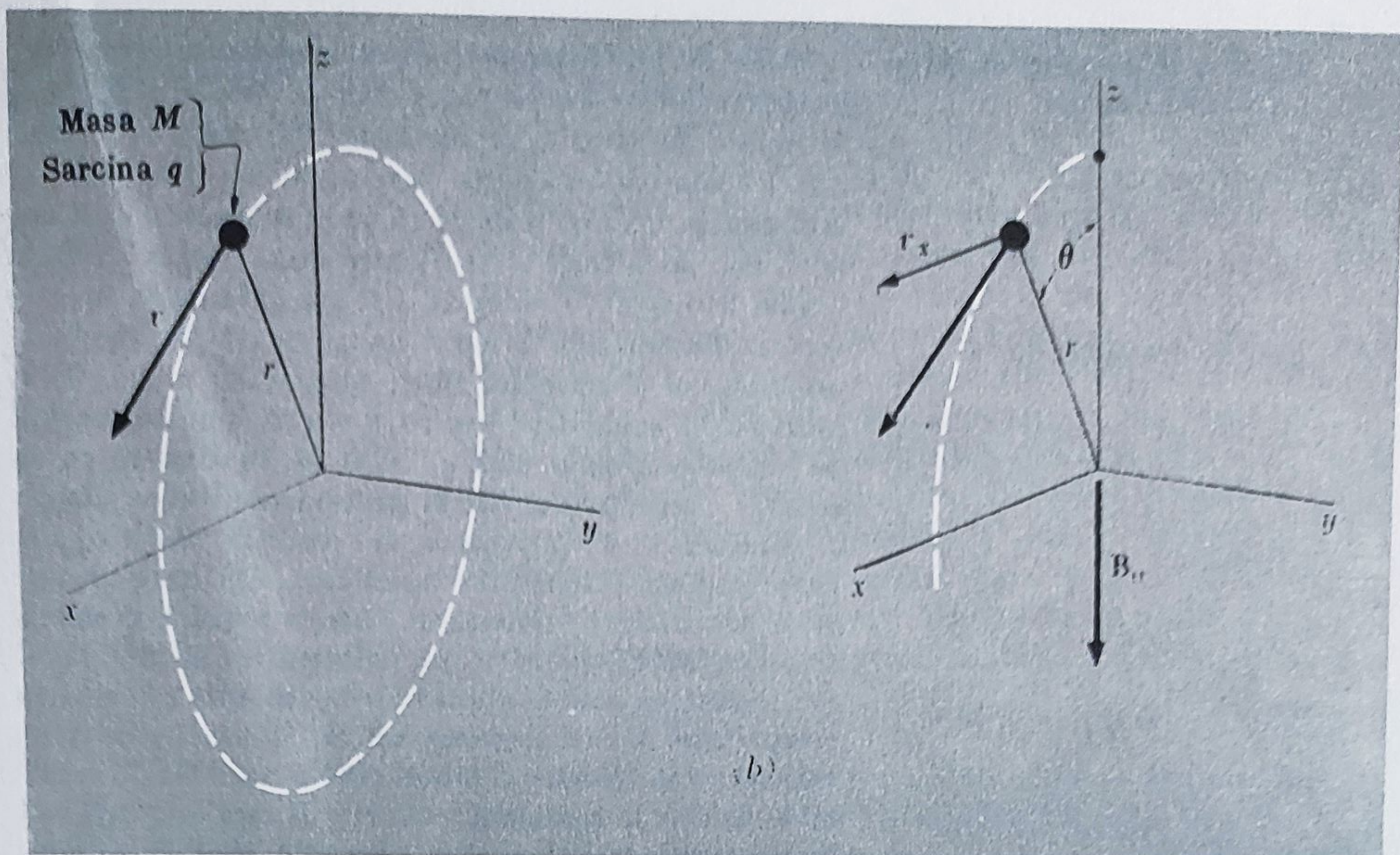


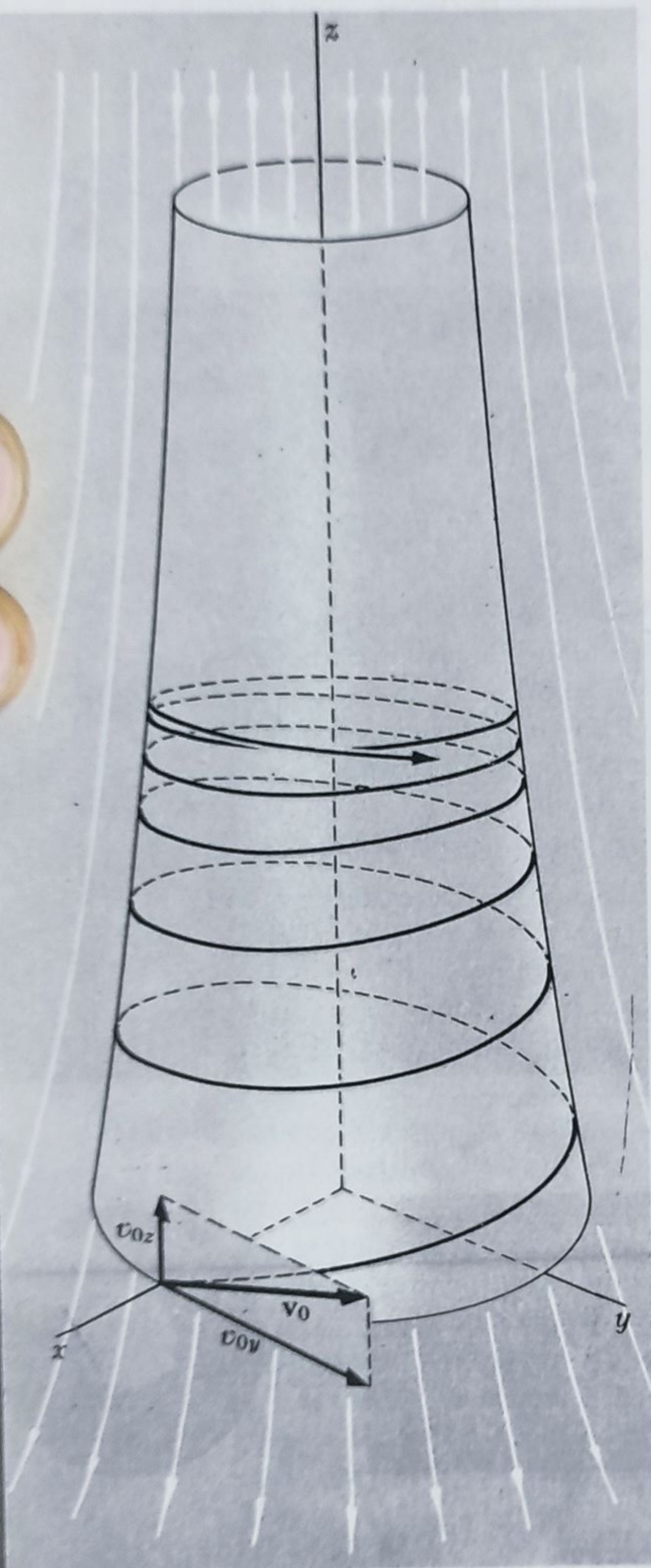
Fig. la problema 10.22.

O particulă de masă  $M$ , sarcină  $q$ , se rotește cu viteza  $v$  pe o traiectorie circulară în planul  $xz$ . Ea este menținută pe această traiectorie printr-o forță centrală a cărei origine nu ne preocupă; vezi partea (a) a figurii. Momentul cinetic  $L$ , asociat cu această mișcare, este un vector în direcție \_\_\_\_\_, de mărime  $L =$  \_\_\_\_\_. (Desenați pe diagramă.) Conectăm acum un câmp magnetic  $\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{z}}B$  ca în partea (b) a figurii. Cu particula în mișcare încă în planul  $xz$ , acesta va produce o nouă forță, de mărime \_\_\_\_\_ și direcție \_\_\_\_\_ care acționează asupra particulei. (Indicați [pe diagramă.] Presupunem că această forță este atât de slabă încât modifică mișcarea particulei doar treptat. Atunci am putea media efectul forței pe o orbită circulară completă. Forța se mediază la zero, dar *cuplul* rezultând din ea nu. Cuplul instantaneu în jurul axei \_\_\_\_\_ are mărimea \_\_\_\_\_, iar media pe un cerc întreg este \_\_\_\_\_. Deci cuplul mediu este un vector  $\mathbf{N}$ , de mărime  $N =$  \_\_\_\_\_ și direcție \_\_\_\_\_. Deoarece cuplul este rata de variație a momentului cinetic, aceasta ne spune că momentul cinetic  $L$ , se va \_\_\_\_\_, cu scurgerea timpului. Comparând aceasta cu ceea ce s-a întâmplat când orbita era perpendiculară pe câmp (fig. 10.12), observăm că \_\_\_\_\_. În cazul de acum mișcarea particulei, așa cum apare unui observator privind de jos în sus de-a lungul axei  $z$ , ar arăta astfel: (faceți o schiță).



Un electron liber într-un câmp magnetic variabil.

Fig. la problema 10.24.



Orbite electronice într-un câmp convergent.

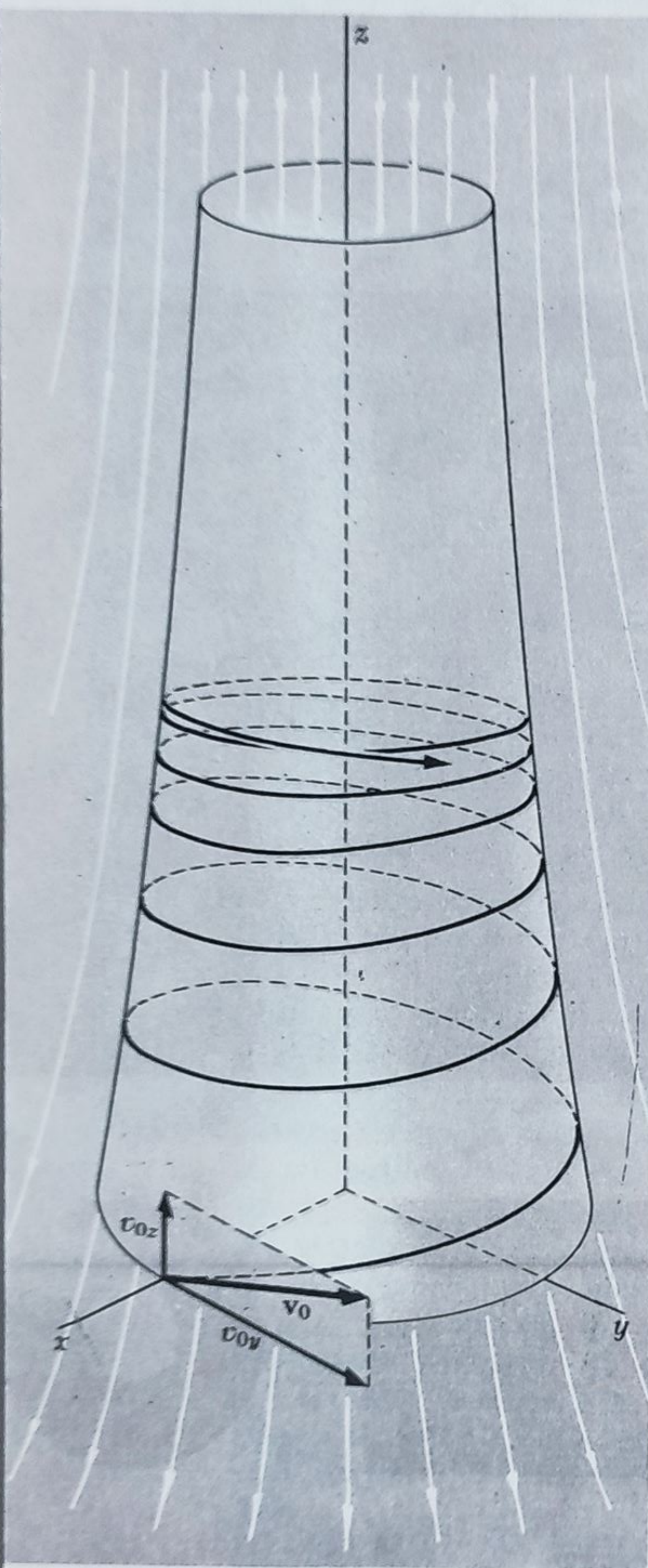
10.23. În § 10.5 am găsit că raza orbitei unei particule încărcate rămâne neschimbată când se instalează un câmp  $\mathbf{B}$  extern uniform — se schimbă doar viteza orbitală. Dar aceasta era adevărat doar dacă  $\Delta v \ll v_0$ , ceea ce este același lucru cu a spune că forța magnetică  $qvB$  este mult mai mică decât forța  $F_0$  care leagă particula de un centru oarecare de atracție. Un caz interesant în care această presupunere evident nu poate să fie verificată este acela al electronului liber, nelegat de nimic. Ce se întâmplă în acest caz? Pentru a studia aceasta, porniți cu o particulă de sarcină  $q$ , masă  $M$ , în mișcare pe un cerc într-un câmp magnetic  $\mathbf{B}$ . Aceasta este vechea situație a „ciclotronului“, guvernată de condiția  $Mv^2/r = qvB$ . Să presupunem că  $B$  este variat lent. Un câmp electric indus va accelera particula în direcția mișcării și relația  $dv = (qr/2M)dB$  va avea loc, întocmai ca și în celălalt caz. Arătați că aceasta și condiția de ciclotron conduc la o relație între  $B$  și  $r$ . Demonstrați că: (1) momentul magnetic al orbitei rămâne constant când  $B$  variază; (2) cantitatea de flux  $\Phi$  a câmpului exterior  $\mathbf{B}$  care este cuprinsă în interiorul orbitei rămâne constantă când  $B$  variază. (Descriind variația lui  $B$  drept înceată, înțelegem că el se schimbă doar printr-o mică fracțiune din mărimea sa pe perioada unei revoluții. Atunci traiectoria particulei va fi aproape circulară și aproape închisă în fiecare revoluție, astfel încât are sens să vorbim despre moment orbital și flux închis de orbită.)

10.24. Concluziile (1) și (2) din problema 10.23 sînt deosebit de utile pentru prezicerea traiectoriilor electronilor sau ionilor în câmpuri magnetice care sînt constante în timp dar variază treptat în spațiu, de exemplu, electronii captați în centura Van Allen în jurul pămîntului. Corespunzător condiției noastre din prob. 10.23 de variație lentă a lui  $B$ , considerăm aici câmpuri a căror variație spațială este relativ mică pe o distanță egală cu „raza de ciclotron“, pentru particula implicată. Să considerăm cazul particular al unui câmp magnetic orientat în general în direcția  $z$  negativă, dar crescînd în intensitate în direcția  $z$  pozitivă, cum se indică prin liniile din figură. O particulă pozitivă trece planul  $xy$  așa cum se arată, mișcîndu-se cu viteza  $v_0$  într-o direcție orientată ușor în sus. Dacă privim aceasta dintr-un sistem de referință în mișcare în direcția  $z$  cu viteza  $v_{0z}$ , vedem un câmp exterior cu o componentă  $B_z$  prin orbită. Folosiți acum concluziile prob. 10.23 pentru a discuta și explica comportarea particulei schițată în figură. Observați că există o diferență în acest caz: Pare să existe o forță orientată în jos asupra particulei. Cum explicați aceasta? Reamintind că un câmp magnetic static nu poate efectua lucru asupra unei particule încărcate, discutați variația diverselor componente ale vitezei, așa cum apar în sistemul laboratorului. Ce ați avea nevoie să cunoașteți pentru a prezice cît de departe pe suprafața în formă de trompetă va descrie particula spiralei înainte să se întoarcă și să o ia înapoi?



Un electron liber într-un câmp magnetic variabil.

Fig. la problema 10.24.



Orbite electronice într-un câmp convergent.

10.23. În § 10.5 am găsit că raza orbitei unei particule încărcate rămâne neschimbată când se instalează un câmp  $B$  extern uniform — se schimbă doar viteza orbitală. Dar aceasta era adevărat doar dacă  $\Delta v \ll v_0$ , ceea ce este același lucru cu a spune că forța magnetică  $qvB$  este mult mai mică decât forța  $F_0$  care leagă particula de un centru oarecare de atracție. Un caz interesant în care această presupunere evident nu poate să fie verificată este acela al electronului liber, nelegat de nimic. Ce se întâmplă în acest caz? Pentru a studia aceasta, porniți cu o particulă de sarcină  $q$ , masă  $M$ , în mișcare pe un cerc într-un câmp magnetic  $B$ . Aceasta este vechea situație a „ciclotronului“, guvernată de condiția  $Mv^2/r = qvB$ . Să presupunem că  $B$  este variat lent. Un câmp electric indus va accelera particula în direcția mișcării și relația  $dv = (qr/2M)dB$  va avea loc, întocmai ca și în celălalt caz. Arătați că aceasta și condiția de ciclotron conduc la o relație între  $B$  și  $r$ . Demonstrați că: (1) momentul magnetic al orbitei rămâne constant când  $B$  variază; (2) cantitatea de flux  $\Phi$  a câmpului exterior  $B$  care este cuprinsă în interiorul orbitei rămâne constantă când  $B$  variază. (Descriind variația lui  $B$  drept înceată, înțelegem că el se schimbă doar printr-o mică fracțiune din mărimea sa pe perioada unei revoluții. Atunci traiectoria particulei va fi aproape circulară și aproape închisă în fiecare revoluție, astfel încât are sens să vorbim despre moment orbital și flux închis de orbită.)

10.24. Concluziile (1) și (2) din problema 10.23 sînt deosebit de utile pentru prezicerea traiectoriilor electronilor sau ionilor în câmpuri magnetice care sînt constante în timp dar variază treptat în spațiu, de exemplu, electronii captați în centura Van Allen în jurul pămîntului. Corespunzător condiției noastre din prob. 10.23 de variație lentă a lui  $B$ , considerăm aici câmpuri a căror variație spațială este relativ mică pe o distanță egală cu „raza de ciclotron“, pentru particula implicată. Să considerăm cazul particular al unui câmp magnetic orientat în general în direcția  $z$  negativă, dar crescînd în intensitate în direcția  $z$  pozitivă, cum se indică prin liniile din figură. O particulă pozitivă trece planul  $xy$  așa cum se arată, mișcîndu-se cu viteza  $v_0$  într-o direcție orientată ușor în sus. Dacă privim aceasta dintr-un sistem de referință în mișcare în direcția  $z$  cu viteza  $v_{0z}$ , vedem un câmp exterior cu o componentă  $B_z$  prin orbită. Folosiți acum concluziile prob. 10.23 pentru a discuta și explica comportarea particulei schițată în figură. Observați că există o diferență în acest caz: Pare să existe o forță orientată în jos asupra particulei. Cum explicați aceasta? Reamintind că un câmp magnetic static nu poate efectua lucru asupra unei particule încărcate, discutați variația diverselor componente ale vitezei, așa cum apar în sistemul laboratorului. Ce ați avea nevoie să cunoașteți pentru a prezice cît de departe pe suprafața în formă de trompetă va descrie particula spiralei înainte să se întoarcă și să o ia înapoi?



O remarcă avansată și o problemă care o ilustrează.

10.25. Cineva care cunoaște câte ceva despre teoria cuantică a atomului ar putea fi încurcat de un punct din analiza noastră din § 10.5, a efectului unui câmp magnetic asupra vitezei orbitale a unui electron atomic. Când viteza variază în timp ce  $r$  rămâne constant, momentul cinetic  $mvr$  variază. Dar momentul cinetic al unei orbite electronice este presupus a fi un multiplu întreg de constanta  $h/2\pi$ ,  $h$  fiind constanta cuantică universală, constanta lui Planck. Cum poate varia  $mvr$  fără a viola această lege cuantică fundamentală? Rezolvarea acestui paradox este importantă pentru mecanica cuantică a particulelor încărcate, dar nu este specifică teoriei cuantice. Când considerăm conservarea energiei pentru o particulă care poartă sarcina  $q$ , în mișcare într-un câmp electrostatic extern  $E$ , totdeauna includem, alături de energia cinetică  $\frac{1}{2}mv^2$ , energia potențială  $q\phi$ , unde  $\phi$  este potențialul

electric scalar la poziția particulei. Nu ar trebui să fim surprinși să găsim că atunci când discutăm conservarea impulsului, nu trebuie să considerăm numai impulsul comun  $M\mathbf{v}$  dar de asemenea o cantitate care implică potențialul vector al câmpului magnetic,  $\mathbf{A}$ . Apare că impulsul trebuie luat ca  $M\mathbf{v} + q\mathbf{A}$ , unde  $\mathbf{A}$  este potențialul vector al câmpului extern evaluat la poziția particulei. Am putea numi  $M\mathbf{v}$  „impuls cinetic” și  $q\mathbf{A}$  „impuls potențial”. (În relativitate includerea termenului  $q\mathbf{A}$  este un pas evident deoarece, așa cum energia și impulsul alcătuiesc un „quadri-vector”, tot așa fac  $\phi$  și  $\mathbf{A}$ , potențialele scalar și vector ale câmpului.) Momentul cinetic care ne interesează aici trebuie atunci să fie, nu chiar

$$\mathbf{r} \times (M\mathbf{v}), \text{ ci } \mathbf{r} \times (M\mathbf{v} + q\mathbf{A})$$

Întoarceți-vă acum la cazul sarcinii în rotație la capătul coardei, din figura 10.12. Verificați mai întâi că un potențial vector potrivit pentru câmpul  $\mathbf{B}$  în direcția  $z$  negativă este  $\mathbf{A} = (B/2) (-\hat{y}x + \hat{x}y)$ . Apoi găsiți ce se întâmplă cu momentul cinetic  $\mathbf{r} \times [M\mathbf{v} + (q/A)]$  când este instalat câmpul.



## INDEX

- Acid clorhidric, momentul dipolar electric al 323, 364  
 Adair, R.K. 22 n\*  
 Admitanță, 303—305  
 Aliniere spontană a spinilor, 410—411  
 Alnico V, curba B—H pentru, 414  
 Aluminu, 372  
 Amoniac, molecule de, 333  
 Amortizare, a circuitului rezonant, 291, critică, 294  
 Ampère, André Marie, 168, 190, 242, 377, 405  
 Amper (unitate), 128, 451  
 Antiparticulă,  
 Arago, François, 242, 459  
 Arago, fenomenul lui, 459  
 Atom, curent electric în, 385—387  
 structura electrică, 325
- B, definiție, 202  
 B, și H și M, relația în interiorul unui cilindru uniform magnetizat, 408  
 unitate de măsură, 207—208,  
 Bandă de curent superficial, echivalentă unui bloc uniform magnetizat, 397  
 Bară conductoare în mișcare în câmp magnetic, 245—248  
 Biot-Savart, formula lui, 200—201, 276  
 Bioxid de carbon, molecula de, 329  
 Bobină toroidală, 450  
 energie înmagazinată în, 272  
 inductanță a, 267  
 Bobină, câmpul magnetic, al 203—206.  
 legată în serie, inductanța, 286  
 toroidală, 450  
 Buclă de curent, câmpul magnetic al, 377  
 cuplul asupra, 393, 451—452  
 în mișcare într-un câmp magnetic, 248—256  
 în rețea, 147  
 potențial vector al, 377—382  
 staționară, cu sursa câmpului în mișcare, 256—257  
 Butelia de Leyda, 364
- Cameră de ionizare, 441  
 Capacitate, definiție, 114  
 unitate de, 115—116, 140, 155—156  
 Cavendish, Henry, 25—26  
 Cavitatea rezonantă ca circuit LC, 312
- Celulă, rezistența internă, 154—155  
 voltaică, 150  
 standard Weston, 151—153  
 Centura van Allen, 472  
 Chamberlain, G.E., 21 n  
 Chu, W.T., 22 n  
 Cilindri, magnetizați, 403—404  
 paraleli conductori, 432—433  
 polarizați, 402—403  
 câmp electric al, 403, 404  
 Ciocniri, 135—138  
 timp mediu între, 137  
 variația de viteză în, 136  
 Circuit, 144—149  
 de curent alternativ, 290  
 putere și energie în, 306—310  
 echivalent, 446—447  
 LC, cavitatea rezonantă a, 312  
 LR, 268—271  
 constanta de timp a, 155  
 RC, 155  
 constanta de timp a, 155—156  
 RLC, 290  
 paralel, 311  
 rezonant (vezi Circuit)  
 Circuit rezonant, 290—294  
 amortizare a, 292, 294  
 frecvență în, 295  
 pentru magnetron, 460—461  
 Q al, 292  
 relație cu lărgimea rezonanței, 300  
 RLC, 311  
 Circulație, 83—85, 180  
 definiție, 83  
 Câmp electric-intensitatea câmpului electric, 32—35  
 al dipolului electric, 321—322  
 al discului încărcat, 58—62  
 al foi de sarcină infinite, 36  
 al liniei de sarcină, 44—45  
 al sarcinii punctuale cu viteză constantă, 177  
 derivare din potențial, 40—41, 56—57  
 de cuadropol, 433  
 distribuție continuă de sarcină, 20—21, 36—37  
 echilibru în, 82  
 energie înmagazinată în, 71—73 51—53,  
 flux al, 26, 37—42  
 integrală de suprafață, 39  
 legea lui Gauss, 23—26, 39—42

\* n arată că referirea se află într-o notă de subsol a paginii indicate.



- indus, 260—261  
integrala de linie a, 37, 54—55  
în conductori, 101  
în interiorul cavității unui conductor, 108—109  
în material polarizat, 337  
în materie, comparat cu cazul magnetic, 400  
în sisteme de referință diferite, 173—175  
la suprafața conductorilor, 103—105  
legi de transformare pentru, 176, 213—214  
macroscopic, 338  
reprezentare grafică, 19, 32—34  
(vezi de asemenea Sarcină în mișcare)  
Cîmp electromagnetic, legi de transformare pentru, 213—214  
Cîmp electrostatic, echilibru în, 82  
legi de transformare pentru, 176  
(vezi de asemenea Cîmp electric)  
Cîmp magnetic (inducția magnetică) al  
buclei de curent, 377—383  
al conductorului liniar, 203  
al foței de curent, 207—208  
al inelului de curent, 201—202  
al solenoidului, 203—206  
bară conductoare în mișcare prin, 245—248  
bucă în mișcare prin, 248—256  
conducție în, 217—220  
definiție, 202  
Cîmp magnetic (inducție magnetică), 376  
divergență a, 194, 376  
efect asupra proceselor chimice, 374  
energie înmagazinată în, 271—273  
forța asupra diverselor substanțe în, 370—372  
integrală de linie în, 210  
în materie, în comparație cu cazul electric, 400  
microscopic, 338  
rotor, de 212  
transformări ale, 231—232  
unitate de inducție, 207—208  
Cîmpul  $H$ , definiție, 390  
relație cu curenții liberi, 391, 450 și  $B$  și  $M$ ,  
relație în interiorul unui cilindru uniform magnetizat, 393  
Cîmpul magnetic al Pământului, 415—416  
Clausius — Mosotti, formula, 467  
Clorură, de cupru, 372, 373  
de sodiu, 372, 373  
CO (monoxid de carbon), molecula, 333.  
Condensator, 114—118  
asimetric, 99, 118  
cu plăci paralele, 114  
cu vid, 314  
definiție, 96, 114  
energie înmagazinată în, 109—110, 366—367  
plan paralel, 114  
sferic, 107, 125  
umplut cu dielectric, 340—341  
Conductivitate electrică, 114—129  
a apei de mare, 222  
a diverse substanțe, 142  
a metalelor, 142  
legea lui Ohm, și 132—134, 139—141  
unități pentru, 134  
Conductor, 100—123  
Cîmpul electric în, 101  
Cîmpul electric în cavitatea unui conductor, 109—110  
Cîmpul electric la suprafață, 104—105  
metalic, paramagnetismul, 394  
potențiale și sarcini pe mai mulți, 117—119  
sarcină punctuală lângă conductorul plan, 111—112  
sferic, concentric, 110  
Conducție în cîmp magnetic, 217—220  
Conservarea sarcinii, 19—20, 131, 273  
Constanta lui Planck, 392  
Constanta dielectrică, 18  
a diverselor substanțe, 315  
Continuitate, ecuație de, 273  
Contrație Lorentz, 195  
Corelația direcțiilor vitezelor, 136  
Coulomb, Charles de, 26  
Coulomb (unitate), 24, 451  
Coulomb, legea lui, 22—26, 190  
legea lui Gauss și, 41  
Cristal ionii, stabilitate și coeziune a, 29—31  
Cuantificarea sarcinii, 21—22, 173  
Cuplu, asupra buclei de curent, 393, 451—452  
asupra dipolului electric, 323  
asupra dipolului magnetic, 393  
Curba  $B-H$  pentru Alnico V, 414  
pentru fier, 414  
Curent alternativ, 294—301  
reprezentarea prin numere complexe, 301—303  
Curent de deplasare, 276—277  
Curent de sarcină legată, 359—363  
legat densitate de, 406  
Curenți, 128—162, 145  
disiparea energiei prin trecere, 149  
fluctuații în, 138—139  
liberi și legați, 406  
paraleli, forța dintre, 206—207  
staționari, 130—132  
variabili, 154—157  
Densitate de curent, definiție, 130  
liber, 406  
Densitate de polarizare, 334  
Densitate de sarcină liniară, 44  
Deplasare electrică  $D$ , 350, 406  
Derivată parțială, 57  $n$   
Diamagnetism, 371, 373, 395  
al orbitelor electronice, 390—392  
Dielectric, artificial, 467—468  
definiție, 315  
Diferență de potențial, definiție, 56  
Diodă, curent limitat prin sarcina spațială, 131, 442—443  
de vid, ca o componentă neohmică, 125, 139—140



plană, 131  
 Dipoli electrici, 319—322  
   cîmpul, 321—322  
   cuplul și forța asupra, 323—324  
   forța dintre, 464  
 Dipoli magnetici, cîmpul comparat cu  
 cîmpul dipolului electric, 381—382  
   cuplul asupra, 393  
   forța asupra, 383—385  
   unitate de, 385  
 Dipoli, rețea liniară, de, 466  
 Direcții de magnetizare ușoară, 412  
 Disc, încărcat, potențialul și cîmpul,  
   62—67  
   magnetizat, 403—404, 416—417  
   polarizat, 335—336  
 Distribuție de curent, echivalentă magne-  
 tizării neuniforme, 399  
 Distribuție de sarcină, continuă, 36—37  
   momentele, 317—320  
   liniară, 44—45  
   potențial de, 60—61  
   sferică, 39—40  
   singularități în, 36  
   superficială, 45  
   timp de relaxare, 140—141, 156—157  
 Divergență, 53—55, 73  
   a cîmpului magnetic, 212, 376  
   în coordonate carteziene, 75—79  
 Domenii magnetice, 413—414  
 Drude, P.K.G., 140  
 Düker, H. 425  
  
 Echilibru în cîmp electrostatic, 82  
 Ecran gravitațional, 124  
 Ecuația lui Laplace, 81—82  
   exemplu de metodă de relaxare, 436  
   de metodă variațională, 438—439  
   foaia elastică și, 437—438  
   în două dimensiuni, 120  
   unicitatea soluției, 88—91, 107—109  
 Ecuația lui Poisson, 61, 81  
 Ecuațiile lui Maxwell, 279—280  
 Efectul Hall, 219—220  
   exemplu de, 454  
 Einstein, Albert, 148—149  
 Electrodinamică cuantică, 19  
 Electromagnet, 417—418  
 Electroni, egalitatea sarcinii, 22  
   numărul într-un gram de aprcape  
   orice, 391—394  
 Electrostatica, definiție, 19  
 Elice, cîmp magnetic al, 451  
 Energie a rețelei cristaline, 30—32  
   a sistemelor de sarcini, 1—31, 28—48  
   definiție, 57  
   disipare, la curgere de curent, 149—150  
   înmagazinată în cîmp magnetic, 271—  
   273  
   înmagazinată în condensator, 101—102  
   potențială, 28  
  
 „Factor de calitate”, 292  
 Farad, 114, 155  
 Faraday, Michael, 164, 274—276  
   descoperirea inducției de, 242—244

experiența de la podul Waterloo, 455  
 reconstruirea unei experiențe a lui,  
 216  
 Fascicul de electroni deflecție pe fir  
 încărcat, 425  
 Fero magnetism, 372, 374, 356, 409—415  
 Feynman, R.P., 122  
 Fier, Curba B-H pentru, 414  
   fier magnetic Armco, 418  
   direcții de magnetizare ușoară, 412  
   în cîmp magnetic, 372, 373  
   magnetism de saturație în, 410—411  
   punct Curie al, 410  
 Fluctuații în curentul electric, 139  
 Flux, al cîmpului electric, 22—26, 38—42  
   Legea lui Gauss, 39—42  
   integrală de suprafață, 39  
   magnetic, 250  
 Foiță de curent, forța asupra, 208—209  
   cîmpul magnetic al, 207—208  
 Formula de adunare a vitezelor, 192  
 Forță, asupra dipolului magnetic, 383—385  
   asupra diverselor substanțe, în cîmp  
   magnetic, 372—374  
   asupra foiței de curent, 208—209  
   asupra particulei încărcate în cîmp  
   electric, 188  
   asupra sarcinii în mișcare, 167—171,  
   186—190 conservativă, 27  
   cu rază de acțiune finită, 83  
   între curenți paraleli, 207  
   magnetică, definiție, 165  
   (vezi de asemenea, lege invers pătratică)  
 Franklin, Benjamin, 364  
 Frecvența în circuite rezonante, 295  
 Frontieră de domeniu magnetic, 412  
   deplasare de, 413  
 Funcția complementară, 297  
 Funcții armonice, 81, 434  
  
 Galaxie, cîmp magnetic, în, 287  
 Galvani, Luigi, 150, 164  
 Gauss (unitate a lui B), 207  
 Gaze ionizate, 139  
 Generator Van de Graaff, 132, 141, 150, 157  
 Gheață, mecanismul de polarizare al,  
   361—362  
   variația constantei dielectrice  
   cu frecvența, 358  
 Gilbert, William, 164  
 Gradient, 57  
   al intensității cîmpului magnetic, 371  
 Grafit, 142, 372  
   diamagnetism cu al, 392  
 Gravitatea ca forță asupra purtătorilor  
 de sarcină, 101  
 Gray, Stephen, 100  
  
 H, și B și M, definiție, 406  
   relație cu curenții liberi, 406—450  
   relație în interiorul cilindrului  
   uniform magnetizat, 408  
   unități de, 451  
 H-, accelerarea ionilor de, 452—453  
 Helium, atcmul de, 170  
 Henry, Joseph, 263



Henry (unitate de inductanță), 263—264  
Hertz, Heinrich Rudolf, 164  
Hidratare, 462  
Hidrogen, atomul de, 325  
  câmpul magnetic în, 222  
  molecula de, 170  
Histereză, 414  
H<sub>2</sub>O, 372  
  molecula, 333  
  variația constantei dielectrice cu  
  frecvența, 358  
Hughes, V.W., 21  
Impedanță, 304—306  
Inductanță, a bobinelor cuplate  
  în serie, 286  
  auto —, 267—268  
  circuit LR, 268—271  
  mutuală, 263—265  
  teoremă de reciprocitate, 265—267  
Inducție, 242—284  
  descoperirea de către Faraday a,  
  242—244  
  legea lui Faraday a, 259  
  magnetică, 408  
Inducție electromagnetică (vezi inducție)  
Inel, câmp magnetic al, 201—202  
Informație, stocare magnetică a, 415  
Integrală, de suprafață, 39  
  eliptică, 64  
  particulară, 297  
Integrală de linie, a câmpului electric, 54  
  în câmp magnetic, 210  
  pe curbă închisă, 83  
Inversiune pe sferă, 432  
Ioni, conducția prin, 135  
  distribuția haotică a vitezelor, 138  
Izolator, 100  
  (vezi de asemenea, Conductor)  
Jaspers, A., 467  
Joule (unitate) 56, 449, 451  
King, J.G., 21 n  
Larsen, R.C., 21 n  
Lawton, W.R., 25 n  
Legea forței Lorentz, 166, 202  
Legea lui Faraday a inducției, 259  
Legea lui Gauss, 39  
  aplicată, în interiorul mediului  
  dielectric, 348—349  
  la discul încărcat, 62  
  la distribuția de sarcină sferică, 42  
  la distribuția liniară de sarcină, 45  
  la sarcina superficială, 29, 45  
  la suprafața unui conductor, 104  
  în formă diferențială, 75  
  pentru purtători de sarcină în mișcare,  
  169  
Legea lui Lenz, 254, 264  
Legea lui Ohm, 132  
  abatere de la, în metale, 139  
  eșec, al 123—125, 139  
Lege de conservare a sarcinii, 20  
Lege de transformare a forței, 188—189

Lege invers pătratică, domeniul de  
  valabilitate, 25  
  verificare, a 25  
Leipuner, L.B., 22 n  
Linii de câmp electrici, 34—35  
  metodă de demonstrare, 375  
Lorentz, H.A., 140, 164  
Lovell, B., 26 n  
Lumină, viteză, a independența de lun-  
  gime de undă, 25  
Magnetită, 372, 374  
Magnetizare, 396  
  de saturație, 410  
  neuniformă, 413  
Magnetohidrodinamică, 210  
Magnet permanent, 410—415  
  câmp al, 375, 401—405  
Magnetron, circuit rezonant pentru, 460—  
  461  
Masă, variație, a, 170  
Maxwell, James Clerk, 113, 148, 276  
M, B, și H, relație în interiorul cilindru-  
  lui uniform magnetizat 408  
Mecanică cuantică în paramagnetism  
  și diamagnetism, 394  
Membrană celulară, capacitate a, 114, 365  
Metan, polarizabilitatea moleculei de,  
  329  
Metanol, 333  
Metoda de relaxare 121, 435—436  
  imaginilor, 112  
Michels, A., 467  
Microfarad, 116  
MKS, unități, 23  
Mobilitate ionică, 440  
Molecule polare, 332—333, 357  
Möllenstedt, G., 425  
Moment de cuadripol, 320  
Moment dipolar, electric, 319  
  indus, 325—329  
  permanent, 331—333  
  magnetic, 379—380  
  al sarcinii pe orbită, 386—387  
  asociat cu spinul electronic, 392—394,  
  410  
  orbital, 385—386  
Moment unghiular, conservare în  
  câmp magnetic, 473  
  orbital, relație cu momentul  
  magnetic, 387  
Momentele unor distribuții de sarcină,  
  317—320  
  (vezi de asemenea Moment dipolar)  
Monopol magnetic, 376  
Monoxid de carbon, molecula de, 333  
Mosotti, formula lui Clausius, — 467  
Neutron, efecte magnetice asupra, 404  
Newton, Isaac, 43  
Newton (unitate), 449, 451  
NH<sub>3</sub> (amoniac) molecula, 333  
Nichel, punctul Curie pentru, 410  
NiSO<sub>4</sub> (sulfat de nichel) 372, 373  
Nod într-o rețea, 132, 147



Oersted, Hans Christian, 164, 172, 244  
 Ohm (unitate), 134, 451  
 Operatorul lui Laplace, 79  
   definiție, 80  
   pentru funcții cu simetrie sferică, 429  
 Orbită electronică, diamagnetism al,  
   390—392  
   moment magnetic al, 387  
 Oxid de azot, paramagnetismul, al 394  
 Oxigen lichid, în câmp magnetic, 372, 374  
   paramagnetism al, 394

Paramagnetism, 372, 373, 394  
 Perechi de dipoli, energie, 465—466  
 Permeabilitate energetică a spațiului vid,  
   450  
   magnetică, 409  
 Permitivitatea dielectrică a spațiului vid,  
   449

Picofarad, 116  
 Planck, Constanta lui, 18, 392  
 Plimpton, S.J., 26 n

Polarizabilitatea atomică, 328  
   susceptibilitatea electrică și 351—355  
 Polarizare, variații de energie la, 355—356  
   magnetică, 396

Pol magnetic, 376—377, 408  
 Pol nord, definiție, 376 n

Porumbel călător, orientare a, 453

Potențial, 56—97  
   al două sarcini punctuale, 60  
   al dipolului electric, 321  
   al discului încărcat, 62  
   al distribuției de sarcină, 60  
   al distribuției liniare de sarcină, 61  
   definiție, 38, 56  
   derivarea câmpului din, 59  
   scalar magnetic, 404  
   vector, 213, 265—266  
   al unei mini bucle de curent, 377—  
   383  
   Yukawa, 429

Pozitronium, 20  
 Priestley, Joseph, 25  
 Principiu variațional, 122  
 Problemă cu valori pe frontieră, 107,  
   120

Proiectarea unui magnet de deflexie,  
   417—419

Proton-electron, balanța de sarcină, 21

Punct Curie, 410, 397

Putere în circuite de curent alternativ,  
   306—310

Q de circuit rezonant, 292  
   relația cu lărgimea rezonanței, 300

Raport giromagnetic, 387 n  
 Raport magnetomecanic orbital, 387  
 Reactanță inductivă, 296  
 Remanență, 414  
 Reprezentare conformă, 120  
 Reprezentarea complexă a curentului  
   alternativ, 302—303

Rețea, de curent alternativ, 301—303  
   de curent continuu, 147  
   în punte, 161  
   în scară, 446

Rețea cristalină, energia electrică, a  
   30  
   a clorurii de sodiu, 30

Rezistență, 133  
   a firului uniform, 143  
   internă a pilelor, 154  
   între cilindri concentrici, 129

Rezistențe, 145 n  
   în paralel, 147  
   în serie, 147

Rezistivitate, 133  
   a diverselor substanțe, 142  
   de volum, 133

Rotor, 83—93  
   al câmpului magnetic, 212  
   al câmpului vitezelor, 82  
   ecuația fundamentală pentru, 85  
   în coordonate carteziane, 86  
   scris ca determinant, 89

Rotor-metru, 90

Rowland, Henry, 233

Sanders, P., 467

Sarcină (electrică), 2—29, 18  
   conservare a, 19—20, 131, 273  
   cuantificare, a, 21—22, 173  
   distribuție de (vezi Distribuție de  
   sarcină)  
   energia sistemului de, 26  
   interacția dintre (legea lui Coulomb),  
   23  
   invarianța de, 170  
   liberă și legată, 348—349  
   mai mică decât e, 22  
   pozitivă și negativă, 19  
   (vezi de asemenea sarcină în mișcare)  
   în mișcare, 167—196  
   forța asupra, 186  
   măsurare a, 167

Sarcină magnetică, absența de, 375, 397

Sarcină punctuală, cu viteză constantă,  
   câmp electric al, 178  
   lângă plan conductor, 111  
   natură a, 23  
   sfera și, 432

Sarcină superficială, forța asupra, 68

Scinteie electrică, 140

Semiconductor, 81, 140, 142

Sferă conductoare, sarcină punctuală și,  
   432  
   în câmp uniform, 365—366

Sferă dielectrică, 346—348, 365—366

Sferă polarizată, 342—346

Sisteme de referință în rotație, 390—391

Sistem izolat, definiție, 4, 20

Sistem linear, 119

Sodiu, 372, 373  
   conductivitate a, 125—126

Solenoid, 221  
   câmp magnetic al, 222, 450



superpoziție, 449—450  
 pentru producerea unui cîmp puternic  
 370—371  
 Solomon, L.H., 26 n  
 Spațiu vid, permeabilitate a, 450  
 permitivitate a, 449  
 Spini electronici, efectul temperaturii  
 asupra alinierii, 394, 411  
 momentul magnetic și, 392, 410  
 Superpoziție, a cîmpurilor solenoidale,  
 449—450  
 a potențialelor, 60  
 fronturilor de undă, 283—284  
 definiție, 25  
 Supraconductibilitate, 141  
 Suprafețe echipotențiale, 65  
 definiție, 61  
 Susceptibilitate electrică, 341  
 polarizabilitatea atomică și 351—355  
 Susceptibilitate magnetică, 395—396  
 a diverselor substanțe, 416  
 molară, 395  
 Temperatură, efectul asupra alinierii  
 spinilor electronici, 394—411  
 efect asupra conductivității, 142  
 Tensiune electromotoare (tem), 150  
 Tensor, 133 n, 139  
 comportarea la rotații a, 464  
 pentru polarizabilitatea moleculară,  
 329—331, 464  
 Teorema de unicitate, 107  
 Teorema, divergenței, 74  
 lui Gauss, 75

lui Stokes, 86  
 Teorie fenomenologică, 374  
 Tesla (unitate), 450, 451  
 Timp de relaxare al distribuției de sarcină  
 156  
 Transformare, a cîmpurilor electric, 230  
 Lorentz, 164, 173  
 Tranziții în circuite de curent alternativ,  
 295  
 Tub de flux magnetic, 234  
 Front de undă, 281—282  
 superpoziția de, 283—284

Unde electromagnetice, 280  
 trăsături generale ale, 284  
 Unghi de fază, 297, 301  
 Unități, 24

Viteza luminii, independența de lungime  
 de undă, 10  
 Viteză unghiulară Larmor, 390—391  
 Vitezele purtătorilor de sarcină, 118—123  
 Vîrf de rezonanță, lărgime a, 300  
 Volt, 56, 451  
 Volta, Alessandro, 150, 164

Waage, Harold, M., 375  
 Watt (unitate), 150  
 Weber (unitate), 451  
 Weber/m<sup>2</sup>, 450  
 Whipple, F.L., 26 n  
 Whittaker, Edmund, 350

Nr. collor de tipar: 30  
 Bun de tipar: 25.02.1982



Com. nr. 10.143/7097  
 Combinatul poligrafic  
 „CASA SCINTEII”  
 București — R.S.R.

Mărime  
 lungime  
 masă  
 timp  
 viteză  
 impuls  
 forță  
 lucru me  
 putere  
 sarcină  
 densitate  
 intensitat  
 densitate  
 potențial  
 tensiune e  
 tensiun  
 intensitate  
 inducție m  
 conductivi  
 rezistivitat  
 rezistență  
 flux magne  
 capacitate  
 inductanță  
 moment di  
 moment di  
 intensitate  
 cîmpulu



**SISTEMUL INTERNAȚIONAL DE UNITĂȚI (SI),**  
(MKSA raționalizat) unități de mecanică și de electricitate

Mărime	Simbol	Unitate	Definiție
lungime	$s$	metru	} unități fundamentale
masă	$m$	kilogram	
timp	$t$	secundă	
viteză	$v$	m/s	$v = ds/dt$
impuls	$p$	kg·m/s	$p = mv$
forță	$F$	newton	$F = dp/dt$
lucru mecanic, energie	$W$	joul	$W = \int F \cdot ds$
putere	$P$	watt	$P = dW/dt$
sarcină	$q$	coulomb	$q = I dt$
densitate de sarcină	$\rho$	coulomb/m <sup>3</sup>	$q = \int \rho dv$
intensitatea curentului	$I$	amper	unitate fundamentală
densitate de curent	$J$	amper/m <sup>2</sup>	$I = \int J \cdot da$
potențial electric	$\varphi, V$	volt	$W = q(\varphi_2 - \varphi_1)$
tensiune electromotoare, tensiune electrică	$\varepsilon, U$	volt	$W = q\mathcal{E}$
intensitatea câmpului electric	$E$	volt/m	$F = qE$
inducție magnetică	$B$	tesla	$F = qv \times B$
conductivitate	$\sigma$	(ohm·m) <sup>-1</sup>	$J = \sigma E$
rezistivitate	$\rho$	ohm·m	$J = E/\rho$
rezistență	$R$	ohm	$I = U/R$
flux magnetic	$\Phi$	weber	$\Phi = \int B \cdot da$
capacitate	$C$	farad	$q = C(\varphi_2 - \varphi_1)$
inductanță	$L, M$	henry	$\mathcal{E} = -LdI/dt$
moment dipolar electric	$p$	coulomb·m	$p = qs$
moment dipolar magnetic	$m$	amper·m <sup>2</sup>	$m = Ia$
intensitatea câmpului magnetic	$H$	amper/m	$\int H \cdot ds = I_{\text{liber}}$

